

Auf einen Blick

Über den Autor	11
Einführung	23
Teil I: Analysis – ein Überblick	29
Kapitel 1: Was ist Analysis?	31
Kapitel 2: Die beiden wichtigsten Konzepte der Analysis: Differenziation und Integration.....	37
Kapitel 3: Warum die Analysis funktioniert.....	45
Teil II: Die Voraussetzungen für die Analysis	51
Kapitel 4: Überblick über Vor-Algebra und Algebra.....	53
Kapitel 5: Verrückte Funktionen und ihre wunderbaren Graphen	73
Kapitel 6: Trigonometrie ist Trumpf!	93
Teil III: Grenzwerte	109
Kapitel 7: Grenzwerte und Stetigkeit.....	111
Kapitel 8: Grenzwerte auswerten	129
Teil IV: Differenziation	147
Kapitel 9: Differenziation – Orientierung.....	149
Kapitel 10: Regeln für die Differenziation –was sein muss, muss sein!	171
Kapitel 11: Differenziation und die Form von Kurven.....	193
Kapitel 12: Problemlos glücklich: Der Differenziation sei Dank!	223
Teil V: Integration und unendliche Reihen	261
Kapitel 13: Integration und Flächenberechnung – ein Einstieg	263
Kapitel 14: Integration: Die Rückwärtsdifferenziation.....	291
Kapitel 15: Integrationstechniken für Profis	321
Kapitel 16: Grau ist alle Theorie: Mit Integralen echte Probleme lösen	349
Kapitel 17: Unendliche Reihen.....	379
Teil VI: Der Top-Ten-Teil	407
Kapitel 18: Zehn Dinge, die Sie sich unbedingt merken sollten.....	409
Kapitel 19: Noch zehn Dinge, die Sie nicht vergessen sollten	413
Stichwortverzeichnis	419

Inhaltsverzeichnis

Über den Autor	11
Einführung	23
Über dieses Buch	23
Konventionen in diesem Buch	24
Wie Sie dieses Buch einsetzen	24
Törichte Annahmen über den Leser	25
Wie dieses Buch aufgebaut ist	25
Teil I: Analysis – ein Überblick	25
Teil II: Die Voraussetzungen für die Analysis	25
Teil III: Grenzwerte	26
Teil IV: Differenziation	26
Teil V: Integration und unendliche Reihen	26
Teil VI: Der Top-Ten-Teil	27
Symbole, die in diesem Buch verwendet werden	27
Wie es weitergeht	27
 TEIL I	
ANALYSIS – EIN ÜBERBLICK	29
 Kapitel 1	
Was ist Analysis?	31
Was Analysis nicht ist	31
Was also ist Analysis?	32
Beispiele für die Analysis aus der Praxis	34
 Kapitel 2	
Die beiden wichtigsten Konzepte der Analysis:	
Differenziation und Integration	37
Differenziation – Definition	37
Die Ableitung ist eine Steigung	37
Die Ableitung ist eine Änderungsrate	39
Und jetzt zur Integration	40
Unendliche Reihen	41
Divergierende Reihen	42
Konvergierende Reihen	42
 Kapitel 3	
Warum die Analysis funktioniert	45
Das Grenzwertkonzept: Ein mathematisches Mikroskop	45
Was passiert beim Vergrößern?	46
Zwei Warnungen – nur zur Vorsicht	49
Ich könnte meine Lizenz verlieren, Mathematik zu betreiben	49
Und was um alles in der Welt bedeutet »unendlich« eigentlich?	49

TEIL II

DIE VORAUSSETZUNGEN FÜR DIE ANALYSIS..... 51

Kapitel 4

Überblick über Vor-Algebra und Algebra..... 53

Was Sie über Brüche wissen sollten..... 53

Ein paar schnelle Regeln..... 54

Brüche multiplizieren..... 54

Brüche dividieren..... 54

Brüche addieren..... 55

Brüche subtrahieren..... 58

Brüche kürzen..... 58

Betrag (Absolutwert) – absolut einfach..... 60

Potenzen machen stark..... 61

Zu den Wurzeln der Wurzeln..... 62

Wurzeln, überall Wurzeln!..... 62

Wurzeln vereinfachen..... 63

Logarithmen ... wirklich keine Hexerei..... 64

Faktorisieren – wer braucht denn so was?..... 65

Den größten gemeinsamen Teiler herausziehen..... 65

Die Mustersuche..... 66

Faktorisierung quadratischer Polynome..... 67

Quadratische Gleichungen lösen..... 67

Methode 1: Faktorisieren..... 67

Methode 2: Die *abc*-Formel oder Mitternachtsformel..... 69

Methode 3: Quadratische Ergänzung..... 70

Kapitel 5

Verrückte Funktionen und ihre wunderbaren Graphen..... 73

Was ist eine Funktion?..... 73

Die definierende Eigenschaft einer Funktion..... 74

Unabhängige und abhängige Variablen..... 76

Funktionsnotation..... 77

Verkettete Funktionen..... 77

Wie sieht eine Funktion aus?..... 79

Allgemeine Funktionen und ihre Graphen..... 80

Geradeheraus – Geraden in der Ebene..... 80

Parabel- und Betragsfunktionen – gerade heraus..... 84

Einige ungerade Funktionen..... 85

Exponentialfunktionen..... 85

Logarithmusfunktionen..... 86

Inverse Funktionen..... 87

Schieben, spiegeln, dehnen, stauchen..... 88

Horizontale Transformationen..... 89

Vertikale Transformationen..... 90

Kapitel 6

Trigonometrie ist Trumpf!	93
Trigonometrie im Crashkurs	93
Zwei spezielle rechtwinklige Dreiecke	95
Das 45°-45°-90°-Dreieck	95
Das 30°-60°-90°-Dreieck	96
Im Einheitskreis gefangen!	97
Winkel im Einheitskreis.....	98
Winkel im Bogenmaß messen	98
Liebling, ich habe die Hypotenuse geschrumpft!	99
Und jetzt das Ganze zusammen	100
Sinus, Kosinus und Tangens zeichnen	102
Inverse trigonometrische Funktionen	104
Identifikation mit trigonometrischen Identitäten	107

TEIL III

GRENZWERTE	109
-------------------------	------------

Kapitel 7

Grenzwerte und Stetigkeit	111
Bis an die Grenzen – NEIN.....	111
Drei Funktionen erklären den Grenzwert.....	112
Einseitige Betrachtungen	115
Einseitige und zweiseitige Grenzwerte: Der Teil und das Ganze!	116
Unendliche Grenzwerte und vertikale Asymptoten	117
Grenzwerte im Unendlichen – haben Sie gute Schuhe an?	119
Die Momentangeschwindigkeit berechnen – mithilfe von Grenzwerten	119
Grenzwerte und Stetigkeit verknüpfen.....	122
Stetigkeit und Grenzwerte gehen normalerweise Hand in Hand.....	123
Die Ausnahme für ein Loch bringt die Wahrheit ans Licht	124
Drei Bedingungen für die Stetigkeit.....	126
Die 33333-Eselsbrücke für den Grenzwert.....	126

Kapitel 8

Grenzwerte auswerten	129
Einfache Grenzwerte	129
Grenzwerte, die Sie sich merken sollten	129
Grenzwerte geometrisch bestimmen	130
Einsetzen und Einkochen.....	131
Die »echten« Aufgabenstellungen mit Grenzwerten	132
Einen Grenzwert mit dem Taschenrechner bestimmen	132
Grenzwertaufgaben algebraisch lösen	134
Guten Appetit – mit einem Grenzwertsandwich	137
Grenzwerte bei unendlich auswerten.....	141
Grenzwerte im Unendlichen und horizontale Asymptoten	143
Grenzwerte im Unendlichen mit einem Taschenrechner lösen.....	144
Algebra für Grenzwerte bei unendlich verwenden.....	145

TEIL IV

DIFFERENZATION 147

Kapitel 9

Differenziation – Orientierung 149

 Differenziation: Such die Steigung! 150

 Die Steigung einer Geraden 153

 Die Ableitung einer Geraden 155

 Die Ableitung: Einfach eine Änderungsrate 155

 Analysis auf dem Spielplatz 155

 Geschwindigkeit – die uns vertrauteste Änderungsrate 157

 Die Beziehung zwischen Änderungsrate und Steigung 158

 Die Ableitung einer Kurve 158

 Der Differenzenquotient 160

 Durchschnittliche Änderungsrate und momentane Änderungsrate 167

 Sein oder Nichtsein? Drei Fälle, in denen die Ableitung nicht existiert 168

Kapitel 10

Regeln für die Differenziation – was sein muss, muss sein!... 171

 Grundlegende Regeln der Differenziation 172

 Die Konstantenregel 172

 Die Potenzregel 172

 Die Faktorregel 174

 Die Summenregel – die kennen Sie schon 175

 Die Differenzregel – macht kaum einen Unterschied 175

 Trigonometrische Funktionen differenzieren 176

 Exponential- und Logarithmusfunktionen differenzieren 176

 Differenziationsregeln für Profis – Wir sind die Champions! 178

 Die Produktregel 178

 Die Quotientenregel 179

 Die Kettenregel 181

 Implizite Differenziation 186

 Logarithmische Differenziation – der Rhythmus macht's 188

 Inverse Funktionen differenzieren 189

 Ableitungen höherer Ordnung – die Leiter hinabsteigen 191

Kapitel 11

Differenziation und die Form von Kurven 193

 Ein Ausflug mit der Analysisgruppe 193

 Über die Berge und durch die Täler: Positive und negative Steigungen 194

 Mir fällt einfach keine Reisetapher für diesen Abschnitt ein:

 Krümmung und Wendepunkte 195

 Das Tal der Tränen: Ein lokales Minimum 196

 Ein atemberaubender Ausblick: Das absolute Maximum 196

 Autopanne: Auf dem Gipfel hängen geblieben 196

 Von nun an geht's bergab! 196

 Ihr Reisetagebuch 197

Extremwerte finden.....	198
Die kritischen Stellen herausleiern.....	198
Der Test der ersten Ableitung.....	200
Der Test der zweiten Ableitung – Tests, Tests, Tests!	202
Absolute Extremwerte für ein abgeschlossenes Intervall finden	205
Und wenn der Definitionsbereich kein abgeschlossenes Intervall ist?.....	208
Krümmung und Wendepunkte bestimmen	210
Die Graphen von Ableitungen – bis zum Abwinken	212
Der Mittelwertsatz – es bleibt einem nichts erspart!.....	215
Die Regel von L'Hôpital: Analysis für den Notfall.....	218
Nicht akzeptable Formen in Form bringen.....	219
Drei weitere nicht akzeptable Formen	220

Kapitel 12

Problemlos glücklich: Der Differenziation sei Dank! 223

Wie Sie das meiste aus Ihrem Leben machen: Optimierungsprobleme.....	223
Das maximale Volumen einer Schachtel.....	224
Die maximale Fläche eines Weidezauns berechnen – Cowboys unter sich!.....	226
Husch, husch: Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung	229
Geschwindigkeit und Tempo	231
Maximale und minimale Höhe	232
Positionsänderung, zurückgelegter Weg und Abstand	233
Gummigeruch und Bremsspuren: Beschleunigung und Abbremsen.....	235
Und jetzt alles zusammen.....	236
Voneinander abhängige Änderungsraten.....	237
Einen Ballon aufblasen.....	237
Einen Trog auffüllen	240
Schnallen Sie sich an: Wir nähern uns einer Analysiskreuzung.....	242
Tangenten und Normalen: Auf die Spitze getrieben.....	245
Die Aufgabenstellung mit der Tangente.....	245
Und jetzt zur Normale.....	247
Leichtes Spiel mit linearen Näherungen.....	250
Aufgabenstellungen aus der Geschäftswelt und aus der Wirtschaft	253
Verwaltung von Grenzkosten in der Wirtschaft.....	253

TEIL V

INTEGRATION UND UNENDLICHE REIHEN 261

Kapitel 13

Integration und Flächenberechnung – ein Einstieg 263

Integration: Einfach eine seltsame Addition.....	263
Die Fläche unter einer Kurve bestimmen	266
Der Umgang mit negativen Flächen.....	269

Flächen annähern	270
Flächen mithilfe linker Summen annähern	270
Flächen mithilfe rechter Summen annähern	273
Flächen mit Mittelpunktsummen annähern	275
Die Summennotation	277
Die Grundlagen summieren	278
Riemann-Summen in Sigma-Notation	278
Flächeninhalte mithilfe des bestimmten Integrals exakt bestimmen	282
Flächen annähern mit der Trapezregel und der Simpson-Regel	286
Die Trapezregel	287
Die Simpson-Regel – Thomas (1710–1761), nicht Homer (1987–)	289

Kapitel 14

Integration: Die Rückwärtsdifferenziation	291
Stammfunktionen suchen – die umgekehrte Differenziation	291
Das Vokabular: Welchen Unterschied macht es?	293
Die müßige Flächenfunktion	294
Ruhm und Ehre mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	297
Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, Teil 2	301
Warum der Hauptsatz funktioniert: Flächenfunktionen, Erklärung 1	304
Warum der Hauptsatz funktioniert: Flächenfunktionen, Erklärung 2	306
Warum der Hauptsatz funktioniert: Die Verbindung zwischen Integration und Differenziation	307
Stammfunktionen finden: Drei grundlegende Techniken	309
Umkehrregeln für Stammfunktionen	309
Raten und Prüfen	312
Die Substitutionsmethode	313
Flächen mithilfe der Substitutionsmethode bestimmen	318

Kapitel 15

Integrationstechniken für Profis	321
Teilweise (partielle) Integration: Teile und Herrsche!	321
Das u auswählen	325
Partielle Integration: Beim zweiten wie beim ersten Mal	327
Alles im Kreis!	328
Tricks mit Trig-Integralen	330
Integrale mit Sinus und Kosinus	331
Integrale mit Sekans und Tangens	334
Integrale mit Kosekans und Kotangens	337
Ihr schlimmster Albtraum: Trigonometrische Substitution	337
1. Fall: Tangens	338
2. Fall: Sinus	341
3. Fall: Sekans	342
A, B und C in Teilbrüchen (Partialbrüchen)	343
1. Fall: Der Nenner enthält nur lineare Faktoren	344
2. Fall: Der Nenner enthält quadratische Faktoren ohne Nullstellen	345

3. Fall: Der Nenner enthält mehrere gleiche lineare oder quadratische Faktoren.....	347
Bonusrunde: Koeffizientenvergleich	347

Kapitel 16

Grau ist alle Theorie: Mit Integralen echte

Probleme lösen	349
Der Mittelwertsatz der Integralrechnung und der Durchschnittswert	350
Die Fläche zwischen zwei Kurven – der doppelte Spaß	353
Die Volumen unregelmäßiger Körper ermitteln	357
Die Wurstscheibenmethode.....	357
Die Pfannkuchenstapelmethode	359
Die Stapel-Donuts-auf-den-sich-jemand-gesetzt-hat-Methode	360
Die Methode mit den Matroschkas	362
Bogenlängen analysieren	365
Drehoberflächen – entstehen durch Drehen!	367
Uneigentliche Integrale – am Verlauf zu erkennen	370
Vertikale Asymptoten.....	371
Uneigentliche Integrale mit einer oder zwei Integrationsgrenzen im Unendlichen	373
Und jetzt zu Gabriels Horn.....	375

Kapitel 17

Unendliche Reihen	379
Folgen und Reihen: Worum es eigentlich geht.....	380
Folgen aneinanderreihen.....	380
Reihen summieren.....	382
Konvergenz oder Divergenz? Das ist hier die Frage!.....	385
Der einfachste Test auf Divergenz: Die Prüfung auf den n -ten Term.....	385
Drei grundlegende Reihen und die zugehörigen Prüfungen auf Konvergenz/Divergenz.....	387
Drei Vergleichstests für Konvergenz/Divergenz	390
Tests auf Quotienten und Wurzeln.....	396
Alternierende Reihen	399
Absolute oder bedingte Konvergenz bestimmen.....	399
Der Test mit den alternierenden Reihen	400
Nehmen Sie die Tests leicht	405

TEIL VI

DER TOP-TEN-TEIL	407
-------------------------------	------------

Kapitel 18

Zehn Dinge, die Sie sich unbedingt merken sollten	409
Die drei binomischen Formeln	409
$\frac{0}{5} = 0$, aber $\frac{5}{0}$ ist undefiniert	409
$0/0$ ist nicht definiert	410

22 Inhaltsverzeichnis

$0 \cdot \infty$ ist nicht definiert..... 410

Irgendetwas⁰ = 1 410

Die GAGA-HühnerHof-AG 410

Trigonometrische Werte für 30-, 45- und 60-Grad-Winkel..... 411

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 411

Die Produktregel..... 411

Die Quotientenregel..... 411

Kapitel 19

Noch zehn Dinge, die Sie nicht vergessen sollten 413

$(a + b)^2 = a^2 + b^2$ - falsch!..... 413

$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ - falsch!..... 413

Steigung einer Geraden = $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ - falsch!..... 413

$\frac{3a + b}{3a + c} = \frac{b}{c}$ - falsch!..... 414

$e^{a+b} = e^a + e^b$ und $\ln(a + b) = \ln(a) + \ln(b)$ - falsch!..... 414

$\frac{d}{da} x^3 = 3x^2$ - falsch!..... 414

Wenn k eine Konstante ist, dann ist $\frac{d}{dx} kx = k'x + kx'$ - na ja ... 414

Die Quotientenregel ist $\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v'u - vu'}{v^2}$ - falsch!..... 415

$\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3$ - falsch! 415

$\int (\sin x) dx = \cos x + C$ - falsch!..... 415

Stichwortverzeichnis 419