

# Inhaltsverzeichnis

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1 Einführung</b> .....  | <b>1</b>  |
| 1.1 Entwicklung der Orbitmechanik und Kosmologie .....                 | 2         |
| 1.2 Kapitelübersicht.....  | 7         |
| <b>2 Mathematische und physikalische Grundlagen</b> .....              | <b>9</b>  |
| 2.1 Vektorrechnung.....  | 9         |
| 2.1.1 Definition und Eigenschaften eines Vektors.....                  | 10        |
| 2.1.2 Vektoraddition und -subtraktion .....                            | 12        |
| 2.1.3 Skalarmultiplikation und Skalarprodukt eines Vektors.....        | 13        |
| 2.1.4 Kreuzprodukt oder Vektorprodukt.....                             | 13        |
| 2.1.5 Spatprodukt .....  | 15        |
| 2.2 Transformationsmatrizen.....                                       | 15        |
| 2.3 Differentialrechnung.....  | 17        |
| 2.3.1 Rechenregeln.....  | 17        |
| 2.3.2 Notationen .....   | 19        |
| 2.3.3 Extremstellen .....  | 20        |
| 2.3.4 Differentialgleichungen .....                                    | 20        |
| 2.4 Integralrechnung .....   | 21        |
| 2.4.1 Partielle Integration .....                                      | 22        |
| 2.4.2 Substitutionsregel .....   | 22        |
| 2.5 Newtonsche Mechanik .....  | 22        |
| <b>3 Koordinatensysteme</b> .....                                      | <b>25</b> |
| 3.1 Koordinatenarten .....   | 25        |
| 3.1.1 Kartesische Koordinaten.....                                     | 25        |
| 3.1.2 Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten ..... | 25        |
| 3.1.3 Koordinatentransformation .....                                  | 27        |
| 3.2 Drehung eines Koordinatensystems.....                              | 27        |
| 3.2.1 Drehung mittels Rotationsmatrizen .....                          | 28        |
| 3.2.2 Drehung mittels Quaternionen .....                               | 32        |
| 3.3 Arten von Koordinatensystemen .....                                | 34        |
| 3.3.1 Äquatorebene, Ekliptik und Frühlingspunkt .....                  | 34        |
| 3.3.2 Erdzentrische Äquatoriale Koordinatensysteme .....               | 35        |
| 3.3.3 Erdzentrisches Ekliptikales Koordinatensystem.....               | 36        |
| 3.3.4 Topozentrisches System.....                                      | 36        |
| 3.3.5 Perifokale und VNC-Systeme.....                                  | 36        |
| 3.3.6 Heliozentrisches System .....                                    | 37        |
| 3.3.7 Himmelsäquator- und geografisches System .....                   | 37        |
| 3.4 Das Sonnensystem als Beispiel.....                                 | 38        |
| <b>4 Zeitsysteme</b> .....   | <b>41</b> |
| 4.1 Sonnentag und Sternentag .....                                     | 42        |
| 4.2 Tropisches Jahr, Gregorianischer Kalender und Schaltjahre .....    | 44        |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 4.3   | Definierte Zeitsystematiken .....                                     | 45  |
| 4.3.1 | Universal Time (UT).....  | 45  |
| 4.3.2 | International Atomic Time (TAI).....                                  | 45  |
| 4.3.3 | Coordinated Universal Time (UTC) .....                                | 45  |
| 4.3.4 | Julianisches und Modifiziertes Julianisches Datum.....                | 45  |
| 4.3.5 | Sonnenwende.....  | 46  |
| 5     | Gravitationspotential und Gravitationskraft.....                      | 49  |
| 5.1   | Das Gravitationsgesetz von Newton.....                                | 49  |
| 5.2   | Gravitationspotential.....  | 50  |
| 5.3   | Gravitationspotential einer Kugel.....                                | 52  |
| 5.4   | Einordnung zur Realität am Beispiel Erde .....                        | 54  |
| 6     | Gleichungen des Zweikörperproblems .....                              | 57  |
| 6.1   | Die Kepler-Gesetze.....   | 57  |
| 6.2   | Die Bewegungsgleichung des Zweikörperproblems.....                    | 58  |
| 6.3   | Energieerhaltung im Zweikörperproblem.....                            | 60  |
| 6.4   | Impulserhaltung im Zweikörperproblem .....                            | 62  |
| 6.5   | Bahngeometrie im Zweikörperproblem.....                               | 63  |
| 6.5.1 | Ellipse und Kreis.....  | 66  |
| 6.5.2 | Parabel.....  | 68  |
| 6.5.3 | Hyperbel.....   | 69  |
| 6.6   | Gesamtenergie, Geschwindigkeiten und Umlaufperiode.....               | 71  |
| 6.6.1 | Vis-Viva-Gleichung und Bahngeschwindigkeit.....                       | 72  |
| 6.6.2 | Kosmische Geschwindigkeiten.....                                      | 73  |
| 6.6.3 | Umlaufperiode.....  | 75  |
| 6.7   | Die klassischen Orbitalelemente.....                                  | 78  |
| 6.7.1 | Definition der klassischen Orbitalelemente .....                      | 78  |
| 6.7.2 | Umrechnung zwischen Vektoren und Orbitalelementen .....               | 80  |
| 6.8   | Die Keplergleichung .....   | 83  |
| 6.8.1 | Grafische Herleitung über die Bahnform .....                          | 83  |
| 6.8.2 | Analytische Herleitung .....  | 87  |
| 6.8.3 | Zusammenhang zwischen Position und Zeit für Hyperbel und Parabel..... | 90  |
| 6.8.4 | Anwendung der Keplergleichung .....                                   | 91  |
| 6.9   | Das Zweikörperproblem und die Realität.....                           | 95  |
| 7     | Bahnänderung und Missionsplanung im Zweikörperproblem.....            | 99  |
| 7.1   | Energiezustand und Änderung der Bahnenergie .....                     | 99  |
| 7.2   | Flucht von einer Kreisbahn.....                                       | 101 |
| 7.3   | Hohmanntransfer.....  | 102 |
| 7.4   | Bielliptischer Transfer (Sternfeldtransfer) .....                     | 105 |
| 7.5   | Anwendung der energieoptimalen Transferarten.....                     | 108 |
| 7.5.1 | $\Delta v$ -Bedarf und günstigster Transfer .....                     | 109 |
| 7.5.2 | Rendezvous mittels Hohmanntransfer .....                              | 110 |
| 7.6   | Allgemeine Bahntransfers: Lamberts-Problem.....                       | 113 |
| 7.6.1 | Herleitung der Gleichungen des Lamberts-Problems.....                 | 113 |
| 7.6.2 | Anwendung des Lamberts-Problems.....                                  | 116 |
| 7.6.3 | Lamberts-Problem und das Zweikörperproblem .....                      | 118 |
| 7.7   | Zusammengesetzte Kegelschnitte .....                                  | 118 |
| 7.7.1 | Planetare Einflussphären .....  | 119 |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 7.7.2     | Umwandlung der Größen zwischen den Systemen .....                     | 121        |
| 7.7.3     | Zusammensetzen der Kegelschnitte .....                                | 122        |
| 7.7.4     | Grenzen für zusammengesetzte Kegelschnitte .....                      | 125        |
| 7.8       | Bahnänderungen außerhalb der Ebene .....                              | 125        |
| 7.8.1     | Inklinationsänderung .....  | 125        |
| 7.8.2     | Änderung der Knoten .....   | 127        |
| 7.9       | Spezifischer Impuls und Raketengrundgleichung .....                   | 127        |
| 7.9.1     | Der massenspezifische Impuls .....                                    | 127        |
| 7.9.2     | Die Ziolkowskigleichung .....   | 128        |
| 7.9.3     | Näherung über eine Taylor-Entwicklung .....                           | 131        |
| 7.9.4     | Anwendung der Ziolkowskigleichung .....                               | 131        |
| <b>8</b>  | <b>Bahnarten und Bodenspuren .....</b>                                | <b>135</b> |
| 8.1       | Weltraumumgebung der Erde .....                                       | 135        |
| 8.2       | Typische Orbits und Bahntypen .....                                   | 136        |
| 8.2.1     | Niedriger Erdorbit .....  | 136        |
| 8.2.2     | Mittlerer Erdorbit .....  | 137        |
| 8.2.3     | Geosynchroner und Geostationärer Orbit .....                          | 137        |
| 8.2.4     | Hoher Erdorbit und Hochelliptischer Orbit .....                       | 139        |
| 8.2.5     | Park- und Friedhofsorbits .....                                       | 140        |
| 8.2.6     | Frozen Orbit .....  | 141        |
| 8.2.7     | Konstellationen .....   | 141        |
| 8.3       | Bodenspuren und ihre Bedeutung .....                                  | 142        |
| <b>9</b>  | <b>Gleichungen des Mehrkörperproblems .....</b>                       | <b>145</b> |
| 9.1       | Die Bewegungsgleichung des Mehrkörperproblems .....                   | 146        |
| 9.2       | Impulserhaltung im Mehrkörperproblem .....                            | 147        |
| 9.3       | Energieerhaltung im Mehrkörperproblem .....                           | 147        |
| 9.4       | Gleichung der relativen Bewegung .....                                | 149        |
| 9.5       | Eingeschränktes Dreikörperproblem und Jacobi-Integral .....           | 151        |
| 9.6       | Nullgeschwindigkeitsflächen .....                                     | 155        |
| 9.7       | Tisserandkriterium .....  | 156        |
| 9.8       | Schwungholmanöver .....   | 158        |
| 9.9       | Librationspunkte .....  | 162        |
| <b>10</b> | <b>Reale Bahnen .....</b>   | <b>165</b> |
| 10.1      | Methoden auf Basis des Zweikörperproblems .....                       | 165        |
| 10.1.1    | Cowell-Methode .....  | 166        |
| 10.1.2    | Enckesche Methode .....   | 167        |
| 10.2      | Änderung der Bahnelemente .....                                       | 170        |
| 10.2.1    | Änderung der Halbachse .....  | 171        |
| 10.2.2    | Änderung der Exzentrizität .....                                      | 173        |
| 10.2.3    | Änderung der Inklination und Rektaszension .....                      | 175        |
| 10.2.4    | Änderung der wahren Anomalie .....                                    | 177        |
| 10.2.5    | Änderung des Arguments des Perizentrums .....                         | 178        |
| 10.2.6    | Änderung des Zeitpunkts des Perizentrumsdurchgangs .....              | 179        |
| 10.2.7    | Anwendung bei Bahnberechnungen .....                                  | 180        |
| 10.3      | Änderung der Bahnelemente durch Abweichungen vom Kugelpotential ..... | 181        |
| 10.4      | Numerische Integrationsverfahren .....                                | 183        |
| 10.5      | Bahnbestimmung und -korrektur .....                                   | 185        |

|   |            |
|---|------------|
| <b>11 Niedrigschub: die Besonderen Bahnen</b> .....               | <b>187</b> |
| 11.1 Definition und Bedeutung.....                                | 187        |
| 11.2 Antriebsarten und Anwendungsfälle.....                       | 189        |
| 11.2.1 Elektrothermische Triebwerke.....                          | 190        |
| 11.2.2 Elektromagnetische Triebwerke.....                         | 190        |
| 11.2.3 Elektrostatische Triebwerke.....                           | 190        |
| 11.2.4 Segelantrieb.....  | 191        |
| 11.2.5 Historie wichtiger Missionen.....                          | 192        |
| 11.3 Bahnberechnung.....  | 192        |
| 11.3.1 Berechnung des $\Delta v$ über die Edelbaum-Gleichung..... | 193        |
| 11.3.2 Berechnung der Schubdauer.....                             | 195        |
| 11.4 Optimierungsmethoden.....                                    | 195        |
| 11.4.1 Diskretisierung.....                                       | 196        |
| 11.4.2 Bahnmodellierung.....                                      | 197        |
| 11.4.3 Suche nach der optimalen Lösung.....                       | 198        |
| <b>I Anhang</b> .....   | <b>201</b> |
| I.1 Daten der Himmelskörper.....                                  | 201        |
| I.2 Übungsaufgaben.....   | 203        |
| Aufgabe 1: Bezugssysteme.....                                     | 203        |
| Lösung Aufgabe 1.....   | 204        |
| Aufgabe 2: Zweikörperproblem.....                                 | 207        |
| Lösung Aufgabe 2.....   | 208        |
| Aufgabe 3: Bahnen mit Antrieb und Keplergleichung.....            | 211        |
| Lösung Aufgabe 3.....   | 212        |
| <b>II Abbildungsverzeichnis</b> .....                             | <b>215</b> |
| <b>III Tabellenverzeichnis</b> .....                              | <b>216</b> |
| <b>IV Abkürzungsverzeichnis</b> .....                             | <b>217</b> |
| <b>V Schlagwortverzeichnis</b> .....                              | <b>219</b> |