

Inhalt

Prolog

Die Entstehung der Algebra	1
Das Erbe der Griechen	1
Die Renaissance in Italien	2
Auf dem Weg zur modernen Algebra	2
Symmetrien	3
Transformationen	3
Affine und euklidische Räume	3
Die Bewegungsgruppe in der euklidischen Ebene	5
Symmetrie von Objekten	6
Über das Lösen von Gleichungen	9
Lineare Gleichungen	9
Quadratische Gleichungen	9
Kubische Gleichungen	9
Quartische Gleichungen	10
Spezielle Gleichungen höheren Grades	12

Teil I Gruppen

1 Gruppen	13
1.1 Grundlegende Begriffe	13
1.2 Untergruppen und Homomorphismen	19
1.3 Direkte Produkte und Summen	22
1.4 Normalteiler und Faktorgruppen	23
1.5 Zyklische Gruppen	27
1.6 Aktionen	28
1.7 Anhang: Der euklidische Algorithmus	35
Übungsaufgaben	37
2 Die Sätze von Sylow	41
2.1 Die Klassengleichung	41
2.2 Exponenten	42
2.3 p -Sylow-Untergruppen	43

Übungsaufgaben	45
3 Der Satz von Jordan-Hölder	46
3.1 Auflösbare und einfache Gruppen	46
3.2 Verfeinerung von Normalreihen	48
Übungsaufgaben	51
4 Symmetrie	52
4.1 Permutationsgruppen	52
4.2 Beispiele	55
4.2.1 Die Gruppe $\mathcal{S}_3$	55
4.2.2 Die Gruppe $\mathcal{A}_4$	55
4.2.3 Die Gruppe $\mathcal{S}_4$	56
4.2.4 Die Gruppe $\mathcal{A}_5$	56
Übungsaufgaben	57
5 Platonische Körper	59
5.1 Polytope und Polyeder	59
5.2 Das Tetraeder	62
5.3 Der Würfel und das Oktaeder	63
5.4 Das Dodekaeder und das Ikosaeder	63
6 Universelle Konstruktionen	65
6.1 Produkte und Koprodukte von Mengen	65
6.2 Produkte und Koprodukte von Gruppen	66
6.3 Semidirekte Produkte	68
6.4 Limites und Kolimites	72
6.5 Freie Gruppen	73
6.6 Beispiele	76
Übungsaufgaben	78
7 Endlich erzeugte abelsche Gruppen	80
7.1 Freie abelsche Gruppen	80
7.2 Torsion in Gruppen	82
7.3 Struktur endlicher abelscher Gruppen	84
Übungsaufgaben	87

Teil II

Ringtheorie

8 Ringe	88
8.1 Grundlagen	88
8.2 Unterringe und Homomorphismen	90
8.3 Produkte von Ringen	92
8.4 Ideale und Faktorenringe	93
8.5 Ideale in kommutativen Ringen	96
8.6 Der chinesische Restsatz	98
Übungsaufgaben	101
 9 Lokalisierung	 104
9.1 Lokalisierung von Ringen	104
9.2 Ideale und Lokalisierung	106
Übungsaufgaben	108
 10 Hauptidealringe und faktorielle Ringe	 109
10.1 Faktorielle Ringe	109
10.2 Euklidische Ringe	112
Übungsaufgaben	113
 11 Quadratische Zahlringe	 114
11.1 Zahlringe	114
11.2 Einheiten	115
11.3 Die pellsche Gleichung	117
11.4 Der Euler-Lagrangesche Satz	120
11.5 Primelemente im gaußschen Zahlring	122
Übungsaufgaben	124
 12 Polynomringe	 125
12.1 Polynome	125
12.2 Polynome in mehreren Variablen	126
12.3 Auswerten von Polynomen	128
12.4 Potenzreihen	129
12.5 Derivationen	130
12.6 Symmetrische Funktionen	132
12.7 Resultante und Diskriminante	135
12.8 Eindeutige Primfaktorzerlegung	139
12.9 Irreduzibilität	141

Übungsaufgaben	144
----------------------	-----

Teil III

Abriss der Körpertheorie

13 Grundlagen der Körpertheorie	147
13.1 Körper und Primkörper	147
13.2 Körpererweiterungen	148
13.3 Algebraische Körpererweiterungen	150
13.4 Algebraisch abgeschlossene Erweiterungen	152
13.5 Konjugierte Erweiterungen	154
Übungsaufgaben	157
14 Theorie der Körpererweiterungen	158
14.1 Separabilität	158
14.2 Inseparabilität	164
14.3 Normale Erweiterungen	165
Übungsaufgaben	168

Teil IV

Galois-Theorie

15 Die Galois-Korrespondenz	170
15.1 Galois-Erweiterungen	170
15.2 Hauptsatz der Galois-Theorie	172
15.3 Ein Beispiel	176
15.4 Ein zweites Beispiel	177
15.5 Unendliche Galoiserweiterungen	178
15.6 Anwendungen der Galois-Theorie	181
Übungsaufgaben	184
16 Kreisteilungskörper	186
16.1 Einheitswurzeln	186
16.2 Irreduzibilität des Kreisteilungspolynoms	190
16.3 Endliche Körper	193
Übungsaufgaben	196
17 Das quadratische Reziprozitätsgesetz	197
17.1 Quadratische Erweiterungen	197
17.2 Gaussche Summen	199

17.3 Das quadratische Reziprozitätsgesetz	200
Übungsaufgaben	203
18 Auflösung durch Radikale	204
18.1 Der Satz von Speiser	204
18.2 Kummer-Theorie	206
18.3 Artin-Schreier-Theorie	209
18.4 Zyklische Erweiterungen	210
18.5 Der Hauptsatz	211
18.6 Kubische Gleichungen	213
18.7 Quartische Gleichungen	215
19 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal	217

Teil V

Darstellungen von endlichen Gruppen

20 Grundlagen	220
20.1 Darstellungen	220
20.2 Grundlegende Beispiele	221
20.3 Projektoren	225
20.4 Irreduzible Darstellungen	227
20.5 Die induzierte Darstellung	231
20.6 Adjungierte Funktoren	234
Übungsaufgaben	236
21 Charaktere	238
21.1 Der Charakter einer Darstellung	238
21.2 Orthogonalitätsrelationen	240
21.3 Zerlegung der regulären Darstellung	243
21.4 Anzahl der irreduziblen Darstellungen	244
21.5 Beispiele	246
21.5.1 Die Gruppe $\mathcal{S}_2$	246
21.5.2 Zyklische Gruppen	246
21.5.3 Die Gruppe $\mathcal{S}_3$	246
21.5.4 Die Gruppe $\mathcal{A}_4$	247
21.5.5 Die Gruppe $\mathcal{S}_4$	248
Übungsaufgaben	250

Teil VI Moduln und Algebren

22 Moduln und Algebren	251
22.1 Grundlegende Begriffe	251
22.2 Homomorphismen und freie Moduln	253
22.3 Vollständig reduzible Moduln	255
22.4 Der Satz von Wedderburn	258
22.5 Quaternionenalgebren	260
Übungsaufgaben	263
 23 Tensorprodukte	 264
23.1 Tensorprodukt von Moduln	264
23.2 Assoziativität des Tensorprodukts	266
23.3 Homomorphismen und direkte Summen	267
23.4 Tensorprodukt von Algebren	269
23.5 Die Tensoralgebra	270
23.6 Die symmetrische Algebra	272
23.7 Die Clifford-Algebra	273

Teil VII Codierungstheorie

24 Einführung	274
24.1 Motivation und Einleitung	274
24.2 Hamminggewicht und -distanz	275
24.3 Fehlererkennung und -korrektur	276
24.4 Lineare Codes	278
Übungsaufgaben	286
 25 BCH- und RS-Codes	 288
25.1 Zyklische lineare Codes	288
25.2 BCH-Codes	290
25.3 RS-Codes	295
Übungsaufgaben	298
 Literaturverzeichnis	 299
 Liste der Symbole	 301

Index 303