

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>Teil I Diskrete Systeme</b>		
<b>2</b>	<b>Das System von einem Freiheitsgrad</b> . . . . .	<b>13</b>
2.1	Vorbemerkung . . . . .	13
2.2	Kleine Phänomenologie linearer Schwinger von einem Freiheitsgrad . . . . .	13
2.2.1	Beispiele für freie Schwingungen . . . . .	14
2.2.2	Beispiele für erzwungene Schwingungen . . . . .	23
2.3	Freie Schwingungen – Eigenverhalten . . . . .	28
2.3.1	Das ungedämpfte System, $D = 0$ . . . . .	30
2.3.2	Das gedämpft schwingende System, $0 < D < 1$ . . . . .	34
2.3.3	Kriechvorgänge, $D \geq 1$ . . . . .	37
2.3.4	Das entdämpfte, selbsterregende System, $-1 < D < 0$ . . . . .	38
2.3.5	Monotone Instabilität – Divergenz, $D \leq -1$ . . . . .	39
2.3.6	Wurzelortskurvendarstellung . . . . .	40
2.3.7	Negative Steifigkeit, statische Instabilität . . . . .	42
2.3.8	Zusammenfassung . . . . .	43
2.4	Erzwungene Schwingung – Behandlung im Frequenzbereich . . . . .	44
2.4.1	Harmonische Erregung . . . . .	45
2.4.2	Allgemeine, periodische Erregung . . . . .	53
2.4.3	Allgemeine, transiente Erregung . . . . .	57
2.4.4	Komplexe Schreibweise . . . . .	63
2.4.5	Numerische Realisierung der Fourier-Transformation und die Fast-Fourier-Transformation . . . . .	75
2.5	Erzwungene Schwingungen – Behandlung im Zeitbereich . . . . .	80
2.5.1	Einige spezielle Stoßantwortfunktionen . . . . .	81
2.5.2	Die Duhamel’schen Integrale . . . . .	85
2.5.3	Ein Übertragungsverfahren . . . . .	88
	Literatur . . . . .	96

<b>3</b>	<b>Bewegungsdifferentialgleichungen für Systeme von zwei oder mehr Freiheitsgraden</b>	97
3.1	Das Verfahren der Steifigkeitszahlen	97
3.1.1	Erläuterung des Verfahrens an einem zweigeschossigen Stockwerkrahmen	97
3.1.2	Erweiterung des Verfahrens: Biegeschwingungen unter Berücksichtigung von Massen und Drehmassen	102
3.1.3	Bewegungsdifferentialgleichung für das Doppelpendel, aufgestellt mit dem Verfahren der Steifigkeitszahlen	106
3.2	Aufstellen der Bewegungsdifferentialgleichungen mit dem Prinzip der virtuellen Verrückung	108
3.3	Mathematische Eigenschaften von Steifigkeits-Massenmatrix	120
3.3.1	Symmetrie der Steifigkeitsmatrix bei Systemen mit potentieller Energie	121
3.3.2	Positive Definitheit	125
3.3.3	Bandstruktur	127
	Literatur	130
<b>4</b>	<b>Freie und erzwungene Schwingungen von Zwei- und Mehr-Freiheitsgradsystemen – Behandlung als gekoppeltes System</b>	131
4.1	Freie Schwingungen – Eigenverhalten	131
4.1.1	Eigenschwingungen eines ungedämpften Systems von zwei Freiheitsgraden	132
4.1.2	Eigenschwingungen eines gedämpften Systems	143
4.1.3	Eigenschwingungen eines selbsterregungsfähigen Systems	153
4.1.4	Stabilitätsuntersuchungen mit Hilfe von Beiwertbedingungen oder der Hurwitz-Determinante	165
4.2	Erzwungene Schwingungen von Mehr-Freiheitsgradsystemen – Behandlung im Frequenzbereich	171
4.2.1	Partikuläre und homogene Lösung	171
4.2.2	Harmonische Erregung	172
4.2.3	Übergang auf allgemeine periodische Erregung und transiente Erregung	184
4.3	Behandlung erzwungener Schwingungen durch Lösung des gekoppelten Systems im Zeitbereich	185
4.3.1	Allgemeine Überlegungen zur Integration	186
4.3.2	Vollständige Lösung für das Mehr-Freiheitsgradsystem und Vergleich mit der Duhamel-Lösung des Einmassenschwingers – das Faltungsintegral	192
	Literatur	195

<b>5</b>	<b>Die modale Analyse bei ungedämpften Strukturen und Strukturen mit Proportionaldämpfung</b> . . . . .	197
5.1	Die modale Entkopplung des ungedämpften Systems (Typ I) . . . . .	199
5.2	Die modale Analyse bei Strukturen mit proportionaler Dämpfung (Typ II) . . . . .	204
5.3	Harmonische Erregung – das Resonanzverhalten proportional gedämpfter Strukturen in modaler Darstellung . . . . .	208
5.4	Modale Behandlung transients Vorgänge im Zeitbereich . . . . .	215
5.4.1	Freie Schwingungen infolge von Anfangsbedingungen . . . . .	215
5.4.2	Erzwungene Schwingungen . . . . .	218
5.4.3	Die Response-Spektren-Methode . . . . .	224
5.5	Anmerkungen zur Proportionaldämpfung . . . . .	229
5.6	Kriterien für das Weglassen von modalen Freiheitsgraden bei der Integration der Bewegungsgleichungen . . . . .	232
	Literatur . . . . .	235
<b>6</b>	<b>Die modale Analyse bei Systemen mit starker Dämpfung oder Neigung zur Selbsterregung</b> . . . . .	237
6.1	Modale Zerlegung des stark gedämpften Systems (Typ III) . . . . .	238
6.2	Modale Zerlegung des allgemeinen mechanischen Systems (Typ IV) . . . . .	242
6.3	Resonanzverhalten stark gedämpfter und selbsterregungsfähiger Systeme in modaler Darstellung . . . . .	249
6.4	Modale Behandlung transients Vorgänge im Zeitbereich . . . . .	255
6.4.1	Freie Schwingungen infolge von Anfangsbedingungen . . . . .	255
6.4.2	Erzwungene Schwingungen . . . . .	256
6.5	Modale Zerlegung bei Doppel-Eigenwerten mit gleichen Eigenvektoren . . . . .	261
6.6	Erfassung des Einflusses von Parameteränderungen – Sensitivität . . . . .	263
	Literatur . . . . .	270
<b>7</b>	<b>Algorithmus zum formalisierten Aufstellen der Bewegungsdifferentialgleichungen von Mehrkörpersystemen</b> . . . . .	271
7.1	Vorbemerkung . . . . .	271
7.2	Modellierung eines Personenkraftwagens als ebenes Mehrkörpersystem . . . . .	272
7.3	Ebene Mehrkörpersysteme . . . . .	273
7.4	Erfassung der Fußpunktanregung . . . . .	291
7.5	Einige Hinweise zu räumlichen Systemen . . . . .	293
	Literatur . . . . .	295

<b>8</b>	<b>Die Elementmatrizen von Rotoren, Gyrostaten, vorgespannten Federn und die Behandlung von Zwangsbedingungen</b> . . . . .	297
8.1	Kinematische Überlegungen . . . . .	297
8.2	Impulssatz, Drallsatz und Newton-Euler-Gleichungen des bewegten, starren Körpers . . . . .	308
8.3	Matrizen für die Elemente „Rotor“ und „Gyrostat“ . . . . .	316
8.4	Erweiterung des Prinzips beim Auftreten von kinematischen Zwangsbedingungen und von Anfangslasten . . . . .	321
8.4.1	Vorbemerkung . . . . .	321
8.4.2	Ein Prinzip der virtuellen Arbeiten ohne a-priori-Erfüllung der Zwangsbedingungen . . . . .	323
8.4.3	Prinzip der virtuellen Arbeiten für Schwingungen um einen Bezugsstand (statische Ruhelage) . . . . .	326
8.4.4	Aufbau des Systems von Bewegungsgleichungen . . . . .	333
8.4.5	Elementmatrizen und Elementvektoren für Dehnfedern . . . . .	336
8.4.6	Ein Beispiel . . . . .	341
	Literatur . . . . .	344
<b>9</b>	<b>Anmerkungen zur numerischen Lösung</b> . . . . .	345
9.1	Superposition . . . . .	346
9.2	Lösung linearer Gleichungssysteme . . . . .	348
9.3	Lösen der Eigenwertprobleme . . . . .	351
9.3.1	Transformation der allgemeinen in die spezielle Eigenwertaufgabe – statische Kondensation – Shift . . . . .	351
9.3.2	Einige Eigenschaften der Eigenwertaufgabe . . . . .	353
9.3.3	Vektoriterationsverfahren . . . . .	354
9.3.4	Transformationsverfahren . . . . .	358
9.3.5	Determinantensuchverfahren . . . . .	361
9.3.6	Bisektionsverfahren . . . . .	364
9.4	Numerische Integration . . . . .	365
	Literatur . . . . .	365

## Teil II Kontinua und ihre Diskretisierung

<b>10</b>	<b>Analytische Lösungen einfacher schwingender Kontinua</b> . . . . .	369
10.1	Einleitung . . . . .	369
10.2	Aufstellung und Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung des schubstarren biegeelastischen Balkens . . . . .	370
10.2.1	Differentialgleichung, Randbedingungen, Anfangsbedingungen . . . . .	370
10.2.2	Lösung der Differentialgleichung und Einbau der Randbedingungen . . . . .	373

10.2.3	Anpassung der Lösung an die Anfangsbedingungen . . . . .	379
10.2.4	Zusammenfassung . . . . .	382
10.3	Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung bei harmonischer Erregung – eingeschwungener Zustand . . . . .	382
10.4	Der biegeelastische Balken mit Zusatzeffekten . . . . .	388
10.4.1	Elastisch gebetteter Biegebalken . . . . .	389
10.4.2	Biegebalken mit axialer Normalkraft im Ausgangszustand . . . . .	390
10.4.3	Der Biegebalken mit Schubelastizität und Drehträglichkeit (Timoshenko-Balken) . . . . .	393
10.4.4	Eigenfrequenzen des Biegebalkens mit Zusatzeffekten . . . . .	395
10.4.5	Biegebalken mit Proportionaldämpfung . . . . .	399
10.5	Ebene Flächentragwerke . . . . .	400
10.5.1	Bewegungsgleichungen für Scheiben und Platten in kartesischen Koordinaten . . . . .	401
10.5.2	Bewegungsgleichungen für ebene Flächentragwerke in Polarkoordinaten . . . . .	404
10.5.3	Anmerkungen zu analytischen Lösungen bei Platten . . . . .	406
Literatur	. . . . .	407
<b>11</b>	<b>Geschlossene Lösung einfacher schwingender Kontinua . . . . .</b>	<b>409</b>
11.1	Einleitung . . . . .	409
11.2	Orthogonalitätsbeziehungen für Balken mit einfachen Randbedingungen . . . . .	410
11.3	Freie Schwingungen: Die Anpassung an die Anfangsbedingungen durch modales Vorgehen . . . . .	413
11.4	Lösung für allgemeine, transiente Erregung . . . . .	415
11.5	Harmonische Erregung – Resonanzverhalten in modaler Darstellung . . . . .	419
11.6	Dämpfungseinfluss . . . . .	422
11.7	Bilanz zur modalen Betrachtungsweise und Verallgemeinerung . . . . .	426
Literatur	. . . . .	429
<b>12</b>	<b>Das Verfahren der Übertragungsmatrizen . . . . .</b>	<b>431</b>
12.1	Einleitung . . . . .	431
12.2	Einige Übertragungsmatrizen . . . . .	433
12.3	Das Übertragungsschema zur Eigenfrequenz- und Eigenformberechnung . . . . .	436
12.4	Weiche, steife und starre Zwischenstützen . . . . .	442
12.5	Erzwungene, periodische Schwingungen . . . . .	445
12.6	Harmonische Erregung in einer kettenförmigen Struktur mit Grenzen im Unendlichen . . . . .	448

12.7 Gesamtgleichungssystem und verzweigte Strukturen . . . . .	453
12.8 Numerische Schwierigkeiten . . . . .	456
12.9 Vorzüge und Grenzen des Übertragungsmatrizenverfahrens . . . . .	458
Literatur . . . . .	460
<b>13 Energieformulierungen als Grundlage für Näherungsverfahren . . . . .</b>	<b>461</b>
13.1 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für Durchlaufträger und ebene Rahmentragwerke . . . . .	463
13.1.1 Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen . . . . .	465
13.1.2 Gleichwertigkeit des Prinzips der virtuellen Verrückungen mit den Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	467
13.1.3 Weitere Umformung des PdvV . . . . .	469
13.1.4 Zulässige Verschiebungszustände . . . . .	470
13.1.5 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für ebene Rahmentragwerke . . . . .	471
13.2 Ableitung der Orthogonalitätsrelation mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen . . . . .	472
13.3 Prinzip der virtuellen Verrückungen für andere Kontinua . . . . .	474
13.3.1 Nicht-dünnwandiger, räumlicher Stab mit doppelt-symmetrischem Querschnitt . . . . .	474
13.3.2 Orthotrope, schubstarre Platte . . . . .	479
13.3.3 Schubweiche Platte . . . . .	480
13.3.4 Schubweiche Platte in Polarkoordinaten . . . . .	481
13.3.5 Andere Kontinua . . . . .	482
Literatur . . . . .	483
<b>14 Der Rayleigh-Quotient und das Ritz'sche Verfahren . . . . .</b>	<b>485</b>
14.1 Der Rayleigh-Quotient . . . . .	485
14.1.1 Definition des Rayleigh-Quotienten . . . . .	485
14.1.2 Minimaleigenschaft des Rayleigh-Quotienten . . . . .	487
14.1.3 Rayleigh-Quotient für höhere Eigenfrequenzen . . . . .	488
14.1.4 Möglichkeiten zur Verbesserung der Ansatzfunktion . . . . .	489
14.2 Das Ritz'sche Verfahren zur Eigenschwingungsberechnung . . . . .	490
14.2.1 Grundgedanke des Ritz'schen Verfahrens . . . . .	490
14.2.2 Beispielrechnung . . . . .	492
14.2.3 Minimaleigenschaften der mit dem Ritz'schen Verfahren ermittelten Eigenfrequenzen, Genauigkeit und Konvergenzverhalten . . . . .	494
Literatur . . . . .	497

<b>15</b>	<b>Die Methode der finiten Elemente</b> . . . . .	499
15.1	Einleitung . . . . .	499
15.2	Methode der finiten Elemente für Durchlaufträger (Stabzüge) . . . . .	501
15.2.1	Zerlegung in Einzelemente . . . . .	502
15.2.2	Behandlung der Einzelemente eines Durchlaufträgers . . . . .	504
15.2.3	Zusammenbau der Einzelemente zum Gesamtsystem . . . . .	509
15.2.4	Praktisches Vorgehen zum Aufstellen der Systemmatrizen und -vektoren (Indextafel-Organisation) . . . . .	511
15.2.5	Schnittkraftermittlung . . . . .	515
15.2.6	Zusammenfassung . . . . .	518
15.3	Methode der finiten Elemente für ebene und räumliche Rahmentragwerke . . . . .	520
15.3.1	Voraussetzungen . . . . .	520
15.3.2	Elementmatrizen und Elementvektoren . . . . .	521
15.3.3	Koordinatentransformation . . . . .	524
15.3.4	Gelenke und Mechanismen, Zwangsbedingungen . . . . .	526
15.4	Elementmatrizen für Stäbe mit Schubweichheit, Drehmassenbelegung und Vorspannung . . . . .	527
15.5	Finite-Elemente-Verfahren für Platten . . . . .	529
15.5.1	Vorbemerkung . . . . .	529
15.5.2	Elementmatrizen für schubstarre Platten . . . . .	530
15.5.3	Elementmatrizen für schubweiche Platten . . . . .	538
15.6	Finite-Element-Verfahren auf der Grundlage gemischt-hybrider Arbeitsausdrücke . . . . .	540
	Literatur . . . . .	545
<b>16</b>	<b>Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften</b> . . . . .	547
16.1	Ein einfaches Beispiel . . . . .	548
16.2	Allgemeine Regel für die Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften bei dreidimensionalen Strukturen . . . . .	550
16.3	Berechnung der Eigenschwingungen eines Radsatzes bei Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften . . . . .	553
	Literatur . . . . .	559
<b>17</b>	<b>Reduktion der Zahl der Freiheitsgrade</b> . . . . .	561
17.1	Der Formalismus der Reduktion . . . . .	562
17.2	Statische Kondensation . . . . .	564
17.3	Die modale Kondensation unter Verwendung eines benachbarten, konservativen Hilfssystems . . . . .	569
17.4	Gemischte statische und modale Kondensation zur Beibehaltung wichtiger physikalischer Freiheitsgrade im reduzierten System . . . . .	571

17.5	Vergleich der drei Reduktionsverfahren . . . . .	576
17.6	Kondensation bei Systemen mit lokalen Nichtlinearitäten . . . . .	577
	Literatur . . . . .	578
<b>18</b>	<b>Substrukturtechniken . . . . .</b>	<b>581</b>
18.1	Vorbemerkung . . . . .	581
18.2	Modale Synthese bei Verwendung von Substrukturen, die an den Koppelstellen gefesselt sind . . . . .	585
18.3	Modale Synthese bei Verwendung von Substrukturen mit freien Koppelstellen . . . . .	594
18.3.1	Ein einfaches Beispiel . . . . .	595
18.3.2	Modale Synthese für unverschiebliche Substrukturen mit freien Koppelstellen . . . . .	603
18.3.3	Die Modifikation des Verfahrens nach Craig und Chang . . . . .	610
18.4	Genauigkeit und Konvergenzverhalten bei der modalen Synthese . . . . .	612
18.5	Übersicht über die modalen Syntheseverfahren . . . . .	615
	Literatur . . . . .	616
<b>19</b>	<b>Bewegungsgleichungen von rotierenden elastischen Strukturen . . . . .</b>	<b>619</b>
19.1	Bewegungsgleichungen des rotierenden Punktmassenmodells . . . . .	620
19.1.1	Mechanisches Modell . . . . .	620
19.1.2	Kinematik des Massenpunktes . . . . .	621
19.1.3	Auswertung der Massenterme des Prinzips der virtuellen Verrückungen . . . . .	623
19.1.4	Gesamtgleichungssystem der rotierenden Punktmassenstruktur . . . . .	624
19.1.5	Diskussion der Bewegungsgleichungen . . . . .	625
19.2	Bewegungsgleichungen der rotierenden Struktur mit kontinuierlicher Massenverteilung – konsistente Modellierung . . . . .	626
19.2.1	Mechanisches Modell . . . . .	627
19.2.2	Kinematik des Massenpunktes . . . . .	627
19.2.3	Auswertung der Massenintegralterme des Prinzips der virtuellen Verrückungen . . . . .	629
19.2.4	Finite-Elemente-Diskretisierung . . . . .	630
19.2.5	Gesamtgleichungssystem der rotierenden Struktur . . . . .	631
19.3	Modale Kondensation zur Reduktion der Zahl der Freiheitsgrade der rotierenden Struktur . . . . .	632
19.4	Bewegungsgleichungen von gekoppelten rotierenden und nicht rotierenden Strukturen . . . . .	633
	Literatur . . . . .	634

---

<b>20</b>	<b>Stabilität von periodisch zeitvarianten Systemen – Parametererregung</b>	<b>635</b>
20.1	Vorbetrachtung: Pendel mit bewegtem Aufhängepunkt; Stabilität der Mathieu’schen Differentialgleichung	636
20.2	Parameterresonanzen bei Mehr-Freiheitsgradsystemen	641
20.3	Stabilitätsuntersuchung nach Floquet	643
20.4	Stabilitätsuntersuchung nach Hill	649
20.5	Kleiner Vergleich der Stabilitätsuntersuchungen nach Floquet und Hill	653
20.6	Modale Behandlung linearer periodisch zeitvarianter Bewegungsgleichungen	655
20.6.1	Die Orthogonalitätsbedingung des linearen zeitvarianten Systems und seine Transformation in ein zeitinvariantes entkoppeltes System	656
20.6.2	Der Hill’sche Ansatz für die homogene Lösung des periodisch zeitvarianten Systems und die Fundamentalmatrix	658
20.6.3	Aufbau und Inversion der Transformationsmatrix	661
20.6.4	Ermittlung von erzwungenen Schwingungen auf modalem Weg	664
20.6.5	Direkte Gewinnung der Antwort bei rein harmonischer Erregung	669
20.6.6	Ein technisches Beispiel	670
	Literatur	674
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>675</b>
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>685</b>