de Gruyter Lehrbuch

Kowalsky · Lineare Algebra

Lineare Algebra

von

Dr. Hans-Joachim Kowalsky

o. Professor an der Technischen Universität Braunschweig

6., verbesserte Auflage

Walter de Gruyter · Berlin · New York 1972

Satz u. Druck: Walter de Gruyter & Co., Berlin — Printed in Germany.
ISBN 3 11 003723 8

Vorwort

Die Lineare Algebra muß heute zu den wichtigsten Grundstrukturen gerechnet werden, auf denen weite Teile der Mathematik basieren. Die Vertrautheit mit den Begriffsbildungen und Ergebnissen der Linearen Algebra gehört daher mit an den Anfang des Mathematikstudiums. Demgemäß wendet sich auch das vorliegende Lehrbuch an den Anfänger, bei dem indes bereits eine gewisse Übung im mathematischen Denken und Schließen sowie einige grundsätzliche Kenntnisse vorausgesetzt werden. In Vorlesungen wird die Lineare Algebra häufig im Rahmen der Analytischen Geometrie behandelt. Dieses Buch ist jedoch kein Lehrbuch der Analytischen Geometrie: die Anwendung der Linearen Algebra auf die Geometrie steht nicht im Vordergrund und erfolgt auch nur in dem erforderlichen Umfang.

Der auf den Anfänger bezogene Lehrbuchcharakter und der beschränkte Umfang erforderten auch eine Beschränkung in der Stoffauswahl. So wird die Lineare Algebra hier rein als die Theorie der Vektorräume über kommutativen Körpern entwickelt, während auf den allgemeineren Begriff des Moduls nicht eingegangen wird. Andererseits ist jedoch der Begriff des Vektorraums von vornherein möglichst allgemein und ohne Dimensionseinschränkung gefaßt. Allerdings wird hierbei auf Fragen, die speziellere Kenntnisse erfordern, nur in Hinweisen oder besonderen Ergänzungen eingegangen.

Dem Verlag möchte ich an dieser Stelle für sein vielfältiges Entgegenkommen und dafür danken, daß er das Erscheinen dieses Buches ermöglicht hat. Mein besonderer Dank gilt Fräulein A. M. Fraedrich, die die mühevollen Korrekturarbeiten auf sich genommen und mich mit wertvollen Ratschlägen unterstützt hat.

H.-J. KOWALSKY

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der Mathematik hat man es vielfach mit Rechenoperationen zu tun, die sich zwar auf völlig verschiedene Rechengrößen beziehen und somit auch auf ganz unterschiedliche Weise definiert sein können, die aber trotz dieser Verschiedenheit gemeinsamen Rechenregeln gehorchen. In der Algebra abstrahiert man nun von der speziellen Natur der Rechengrößen und Rechenoperationen und untersucht ganz allgemein die Gesetzmäßigkeiten, denen sie unterliegen. Ausgehend von einigen Rechenregeln, die man als Axiome an den Anfang stellt, entwickelt man die Theorie der durch diese Axiome charakterisierten abstrakten Rechenstrukturen. Die Lineare Algebra bezieht sich speziell auf zwei Rechenoperationen, die sogenannten linearen Operationen, und auf die entsprechenden Rechenstrukturen, die man als Vektorräume bezeichnet. Die grundlegende Bedeutung der Linearen Algebra besteht darin, daß zahlreiche konkrete Strukturen als Vektorräume aufgefaßt werden können, so daß die allgemein gewonnenen Ergebnisse der abstrakten Theorie auf sie anwendbar sind. So besteht z. B. die Analytische Geometrie in erster Linie in der Anwendung der Linearen Algebra auf die Geometrie, die die algebraische Fassung und rechnerische Behandlung geometrischer Gebilde ermöglicht. Umgekehrt gestattet es aber gerade diese Anwendung, Begriffe und Resultate der abstrakten Theorie geometrisch zu deuten und diese geometrischen Interpretationen auf völlig andersartige Modelle von Vektorräumen, wie etwa Funktionenräume, zu übertragen.

Das Hauptinteresse der Linearen Algebra gilt indes nicht dem einzelnen Vektorraum, sondern den Beziehungen, die zwischen Vektorräumen bestehen. Derartige Beziehungen werden durch spezielle Abbildungen beschrieben, die in bestimmter Hinsicht mit den linearen Operationen verträglich sind und die man lineare Abbildungen nennt. Ihr Studium erfolgt in zweierlei Weise: Einerseits werden einzelne Abbildungen hinsichtlich ihrer Wirkung und hinsichtlich der Möglichkeiten ihrer Beschreibung betrachtet. In diese Untersuchungen geht noch wesentlich die interne Struktur der Vektorräume ein. Zweitens aber interessiert man sich für die Struktur der Gesamtheit aller linearen Abbildungen, die man auch als Kategorie der linearen Abbildungen bezeichnet. Hierbei treten die Vektorräume nur noch als bloße Objekte ins

Spiel, zwischen denen Abbildungen definiert sind, deren interne Struktur aber nicht mehr in Erscheinung tritt. Dennoch können interne Eigenschaften von Vektorräumen auch extern in der Kategorie der linearen Abbildungen beschrieben werden; und gerade diese Möglichkeit spielt in den letzten Kapiteln eine wesentliche Rolle. Vielfach repräsentieren die dort konstruierten Vektorräume hinsichtlich ihrer internen Struktur keineswegs neue Vektorraumtypen. Neu aber ist ihre externe Charakterisierung, die die Existenz wichtiger Abbildungen sichert.

An den Anfänger wendet sich dieses Buch hauptsächlich im Sinn einer Ergänzung und Vertiefung. Seine Lektüre erfordert zwar keine speziellen Vorkenntnisse, setzt aber doch bei dem Leser eine gewisse Vertrautheit mit mathematischen Begriffsbildungen und Beweismethoden voraus. Die Stoffanordnung folgt nur teilweise systematischen Gesichtspunkten, die vielfach zugunsten didaktischer Erwägungen durchbrochen sind. Zahlreiche Fragen, die in den Text nicht aufgenommen werden konnten oder die bei dem Leser weitergehende Kenntnisse voraussetzen, werden in besonderen Ergänzungen und meist in Form von Aufgaben behandelt. Auf ein Literaturverzeichnis wurde verzichtet. Jedoch seien in diesem Zusammenhang besonders die entsprechenden Werke von N. Bourbaki und W. Graeub genannt, aus denen zahlreiche Anregungen übernommen wurden.

Bei der Numerierung wurde folgendes Prinzip angewandt: Definitionen, Sätze, Beispiele und Aufgaben sind an erster Stelle durch die Nummer des jeweiligen Paragraphen gekennzeichnet. An zweiter Stelle steht bei Definitionen ein kleiner lateinischer Buchstabe, bei Sätzen eine arabische Zahl, bei Beispielen eine römische Zahl und bei Ergänzungen bzw. Aufgaben ein großer lateinischer Buchstabe. Das Ende eines Beweises ist durch das Zeichen ◆ kenntlich gemacht. Neu definierte Begriffe sind im Text durch Fettdruck hervorgehoben; auf sie wird im Sachverzeichnis verwiesen. Am Ende des Buches finden sich die Lösungen der Aufgaben, die aus Platzgründen allerdings sehr knapp gehalten sind. Bei numerischen Aufgaben, deren Schema vorher behandelt wurde, sind im allgemeinen nur die Ergebnisse angegeben. Bei theoretischen Aufgaben handelt es sich meist um Beweisskizzen oder um einzelne Hinweise, aus denen der Beweisgang entnommen werden kann.

Erstes Kapitel

Grundbegriffe

Die lineare Algebra kann kurz als die Theorie zweier spezieller Rechenoperationen, der sogenannten linearen Operationen, gekennzeichnet werden. Die diesen Operationen entsprechenden algebraischen Strukturen werden lineare Räume oder Vektorräume genannt. Man kann daher die lineare Algebra auch als Theorie der Vektorräume bezeichnen. Der somit für das ganze Buch grundlegende Begriff des Vektorraums wird einschließlich einiger einfacher Eigenschaften im letzten Paragraphen dieses Kapitels behandelt. Vorbereitend wird in § 2 auf eine allgemeinere algebraische Struktur, die Gruppen, eingegangen. Schließlich setzt die allgemeine Definition des Vektorraums noch den Begriff des Körpers voraus, zu dem man durch die abstrakte Behandlung der rationalen Rechenoperationen geführt wird. Mit den Körpern und den mit ihnen eng zusammenhängenden Ringen befaßt sich der dritte Paragraph.

Neben diese algebraischen Grundlagen treten als wesentliche Voraussetzung noch einige einfache Begriffe der Mengenlehre, die im ersten Paragraphen aus Gründen der Bezeichnungsnormierung zusammengestellt werden. Der Mengenbegriff wird dabei als intuitiv gegeben vorausgesetzt; auf die axiomatische Begründung wird nicht eingegangen.

§ 1 Mengentheoretische Grundbegriffe

Die Objekte, aus denen eine Menge besteht, werden ihre **Elemente** genannt. Für „*x ist ein Element der Menge M*" schreibt man „$x \in M$". Die Negation dieser Aussage wird durch „$x \notin M$" wiedergegeben. Statt „$x_1 \in M$ *und* ... *und* $x_n \in M$" wird kürzer „$x_1, \ldots, x_n \in M$" geschrieben. Eine spezielle Menge ist die **leere Menge**, die dadurch charakterisiert ist, daß sie überhaupt keine Elemente besitzt. Sie wird mit dem Symbol $\emptyset$ bezeichnet. Weitere häufig auftretende Mengen sind:

$\mathbf{Z}$ Menge aller ganzen Zahlen.
$\mathbf{R}$ Menge aller reellen Zahlen.
$\mathbf{C}$ Menge aller komplexen Zahlen.

Eine Menge M heißt **Teilmenge** einer Menge N (in Zeichen: $M \leq N$), wenn aus $x \in M$ stets $x \in N$ folgt. Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge; außerdem ist jede Menge Teilmenge von sich selbst. Gilt $M \leq N$ und $M \neq N$, so heißt M eine **echte Teilmenge** von N.

Die Elemente einer Menge $\mathfrak{S}$ können selbst Mengen sein. Es wird dann $\mathfrak{S}$ bisweilen auch als **Mengensystem** bezeichnet. Unter dem **Durchschnitt** D eines nicht-leeren Mengensystems $\mathfrak{S}$ versteht man die Menge aller Elemente, die gleichzeitig Elemente aller Mengen des Systems sind: Es ist also $x \in D$ gleichwertig mit $x \in M$ für alle Mengen $M \in \mathfrak{S}$. Man schreibt

$$D = \bigcap_{M \in \mathfrak{S}} M \quad \text{oder auch} \quad D = \bigcap \{M\colon M \in \mathfrak{S}\}.$$

Besteht das System aus nur endlich vielen Mengen $M_1, \ldots, M_n$, so bezeichnet man den Durchschnitt dieser Mengen auch mit $M_1 \cap \cdots \cap M_n$. Die Gleichung $M \cap N = \emptyset$ besagt, daß die Mengen M und N kein gemeinsames Element besitzen; es werden dann M und N als **fremde** Mengen bezeichnet.

Ähnlich wie der Durchschnitt wird die **Vereinigung** V eines nicht-leeren Mengensystems $\mathfrak{S}$ definiert: Sie ist die Menge aller derjenigen Elemente, die zu mindestens einer Menge aus $\mathfrak{S}$ gehören. Es ist also $x \in V$ gleichwertig mit $x \in M$ für mindestens eine Menge $M \in \mathfrak{S}$. Man schreibt

$$V = \bigcup_{M \in \mathfrak{S}} M \quad \text{oder auch} \quad V = \bigcup \{M\colon M \in \mathfrak{S}\}$$

und im Fall eines endlichen Systems entsprechend $M_1 \cup \cdots \cup M_n$. Mit Hilfe der Definitionen von Durchschnitt und Vereinigung ergeben sich unmittelbar folgende Beziehungen, deren Beweis dem Leser überlassen bleiben möge:

$$\begin{aligned}
&M \cap (N_1 \cup N_2) = (M \cap N_1) \cup (M \cap N_2),\\
&M \cup (N_1 \cap N_2) = (M \cup N_1) \cap (M \cup N_2),\\
&M \cap N = M \text{ ist gleichbedeutend mit } M \leq N,\\
&M \cup N = M \text{ ist gleichbedeutend mit } N \leq M.
\end{aligned}$$

Endliche Mengen können durch Angabe ihrer Elemente gekennzeichnet werden. Man schreibt $\{x_1, \ldots, x_n\}$ für diejenige Menge, die genau aus den angegebenen n Elementen besteht. Die einelementige Menge $\{x\}$ ist von ihrem Element x zu unterscheiden: So ist z. B. $\{\emptyset\}$ diejenige Menge, deren einziges Element die leere Menge ist.

Ein anderes Mittel zur Beschreibung von Mengen besteht darin, daß man alle Elemente einer gegebenen Menge X, die eine gemeinsame Eigenschaft $\mathscr{E}$ besitzen, zu einer neuen Menge zusammenfaßt. Bedeutet $\mathscr{E}(x)$, daß x die Eigenschaft $\mathscr{E}$ besitzt, so bezeichnet man diese Menge mit $\{x\colon x \in X,\ \mathscr{E}(x)\}$.

So ist z. B. $\{x\colon x \in \mathbf{Z},\ x^2 = 1\}$ die aus den Zahlen $+1$ und -1 bestehende Teilmenge der Menge aller ganzen Zahlen. Bei dieser Art der Mengenbildung ist die Angabe der Bezugsmenge X, aus der die Elemente entnommen werden, wesentlich, da sonst widerspruchsvolle Mengen entstehen können (vgl. 1 A). Da die Bezugsmenge jedoch im allgemeinen durch den jeweiligen Zusammenhang eindeutig bestimmt ist, soll in diesen Fällen auf ihre explizite Angabe verzichtet werden.

Ein wichtiges Beweishilfsmittel ist das **Zornsche Lemma**: Es sei $\mathfrak{S}$ ein nicht-leeres Mengensystem. Eine nicht-leere Teilmenge $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{S}$ heißt eine **Kette**, wenn aus $M_1, M_2 \in \mathfrak{K}$ stets $M_1 \leq M_2$ oder $M_2 \leq M_1$ folgt. Eine Menge $M \in \mathfrak{S}$ heißt ein **maximales Element** von $\mathfrak{S}$, wenn aus $N \in \mathfrak{S}$ und $M \leq N$ stets $M = N$ folgt. Das Zornsche Lemma lautet nun:

Wenn für jede Kette $\mathfrak{K}$ *von* $\mathfrak{S}$ *die Vereinigungsmenge* $\bigcup \{K\colon K \in \mathfrak{K}\}$ *ein Element von* $\mathfrak{S}$ *ist, dann gibt es zu jeder Menge* $A \in \mathfrak{S}$ *ein maximales Element* M *von* $\mathfrak{S}$ *mit* $A \leq M$.

Es seien jetzt X und Y zwei nicht-leere Mengen. Unter einer **Abbildung** φ von X in Y (in Zeichen: $\varphi\colon X \to Y$) versteht man dann eine Zuordnung, die jedem Element $x \in X$ eindeutig ein Element $y \in Y$ als **Bild** zuordnet. Das Bild y von x bei der Abbildung φ wird mit $\varphi(x)$ oder auch einfach mit φx bezeichnet. Die Menge X heißt der **Definitionsbereich** der Abbildung φ, die Menge Y ihr **Bildbereich**.

Ist φ eine Abbildung von X in Y und M eine Teilmenge von X, so nennt man die Menge aller Bilder von Elementen $x \in M$ entsprechend das Bild der Menge M und bezeichnet es mit $\varphi(M)$ oder einfach mit φM. Es gilt also

$$\varphi M = \{\varphi x\colon x \in M\},$$

und φM ist eine Teilmenge von Y. Das Bild der leeren Menge ist wieder die leere Menge. Weiter ist speziell φX eine Teilmenge von Y. Gilt sogar $\varphi X = Y$, tritt also jedes Element von Y als Bild eines Elements von X auf, so nennt man φ eine Abbildung von X *auf* Y. Umgekehrt sei N eine Teilmenge von Y. Dann wird die Menge aller Elemente von X, deren Bild ein Element von N ist, das **Urbild** von N bei der Abbildung φ genannt und mit $\varphi^-(N)$ bezeichnet. Es gilt also

$$\varphi^-(N) = \{x\colon \varphi x \in N\},$$

und $\varphi^-(N)$ ist eine Teilmenge von X. Auch wenn $N \neq \emptyset$ gilt, kann $\varphi^-(N)$ die leere Menge sein.

Bei einer Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ können verschiedene Elemente von X dasselbe Bild haben. Ist dies nicht der Fall, folgt also aus $x_1 \neq x_2$ stets $\varphi x_1 \neq \varphi x_2$, so heißt φ eine **eineindeutige Abbildung** oder kürzer eine **1-1-Abbildung**. Wenn φ eine 1-1-Abbildung von X auf Y ist, besitzt jedes Element $y \in Y$ ein Urbild, das aus genau einem Element von X besteht. Ordnet man daher jedem $y \in Y$ das auf diese Weise eindeutig bestimmte Element von X als Bild zu, so wird hierdurch eine 1-1-Abbildung von Y auf X definiert. Sie heißt die **Umkehrabbildung** von φ oder die zu φ **inverse Abbildung** und wird mit φ^{-1} bezeichnet.

Zwei Abbildungen $\varphi\colon X \to Y$ und $\psi\colon Y \to Z$ kann man hintereinander schalten und erhält so insgesamt eine mit $\psi \circ \varphi$ bezeichnete Abbildung von X in Z, die man die **Produktabbildung** von φ und ψ nennt. Das Bild eines Elements $x \in X$ bei der Produktabbildung erhält man, indem man x zunächst durch φ abbildet und das so erhaltene Bild φx anschließend weiter mit ψ abbildet. Es gilt also

$$(\psi \circ \varphi)\, x = \psi(\varphi x).$$

Der Definitionsbereich und der Bildbereich einer Abbildung können auch zusammenfallen. Man hat es dann mit einer Abbildung φ einer Menge X in sich zu tun. Bildet man z. B. jedes Element von X auf sich selbst ab, so erhält man eine 1-1-Abbildung von X auf sich, die die **Identität** oder die **identische Abbildung** von X genannt und mit ε_X bzw. einfach mit ε bezeichnet wird. Für jedes $x \in X$ gilt also $\varepsilon x = x$. Ist φ eine 1-1-Abbildung von X auf Y, so existiert ihre Umkehrabbildung φ^{-1}, und man erhält

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = \varepsilon_X, \qquad \varphi \circ \varphi^{-1} = \varepsilon_Y.$$

Ergänzungen und Aufgaben

1 A Das folgende Beispiel zeigt, daß bei der Bildung von Mengen der Art $\{x\colon x \in X,\ E(x)\}$ die Angabe der Bezugsmenge X wesentlich ist. Läßt man nämlich zu, daß die Elemente x aus irgendwelchen Mengen entnommen werden, so gelangt man folgendermaßen zu einem Widerspruch: Es sei M die Eigenschaft, eine Menge zu sein. Dann wäre $A = \{x\colon M(x)\}$ die Menge aller Mengen. Und weil dann A selbst eine Menge wäre, würde $A \in A$ gelten. Man könnte dann auch die Menge $B = \{x\colon x \notin x\}$ bilden. Sie wäre die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten. Für diese Menge müßte jedenfalls gelten $B \in B$ oder $B \notin B$. Nimmt man $B \in B$ an, so würde aus der Definition von B folgen, daß $B \notin B$ gelten müßte. Umgekehrt aber würde die Annahme $B \notin B$ ihrerseits $B \in B$ zur Folge haben. In jedem Fall würde man also einen Widerspruch erhalten (Russellsche Antinomie).

1 B Es gelte $\varphi\colon X \to Y$, und $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ seien nicht-leere Systeme von Teilmengen von X bzw. Y.

Aufgabe

1). Es gilt

$$\varphi \bigcup \{M\colon M \in \mathfrak{S}\} = \bigcup \{\varphi M\colon M \in \mathfrak{S}\} \text{ und } \varphi \bigcap \{M\colon M \in \mathfrak{S}\{ \leq \bigcap \{\varphi M\colon M \in \mathfrak{S}\}\,.$$

Man zeige jedoch an einem Beispiel, daß in der zweiten Beziehung das Gleichheitszeichen im allgemeinen nicht gilt. Hingegen gilt das Gleichheitszeichen stets, wenn φ eine 1-1-Abbildung ist.

2). Es gilt

$$\varphi^{-}(\bigcup\{N\colon N\in\mathfrak{S}'\})=\bigcup\{\varphi^{-}(N)\colon N\in\mathfrak{S}'\}\text{ und}$$

$$\varphi^{-}(\bigcap\{N\colon N\in\mathfrak{S}'\})=\bigcap\{\varphi^{-}(N)\colon N\in\mathfrak{S}'\}.$$

§ 2 Gruppen

Betrachtet man einerseits die Addition der ganzen, der rationalen oder der reellen Zahlen und andererseits die Multiplikation der von Null verschiedenen rationalen oder reellen Zahlen, so findet man, daß diese beiden Rechenoperationen weitgehend übereinstimmenden Rechengesetzen unterliegen. So gilt z. B.

$$(a+b)+c=a+(b+c)\text{ und }(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c).$$

Weiter gibt es ausgezeichnete Zahlen, nämlich 0 bzw. 1, die sich bei diesen Operationen neutral verhalten:

$$0+a=a\quad\text{und}\quad 1\cdot a=a.$$

Schließlich gilt

$$(-a)+a=0\quad\text{und}\quad\frac{1}{a}\cdot a=1;$$

d.h. es gibt zu jeder Zahl $a\neq 0$ eine Zahl a' $\left(\text{nämlich } -a \text{ bzw. } \frac{1}{a}\right)$, so daß die Summe bzw. das Produkt dieser beiden Zahlen gerade die neutrale Zahl ergibt.

Da diese Rechenregeln das Zahlenrechnen weitgehend beherrschen und auch in vielen anderen Fällen auftreten, ist es naheliegend, sie unabhängig von der speziellen Natur der Rechengrößen und der jeweiligen Operationen zu untersuchen. Bei dieser abstrakten Betrachtungsweise stehen die Rechengesetze im Vordergrund: Nicht womit man rechnet ist wesentlich, sondern wie man rechnet. Man setzt lediglich voraus, daß für die Elemente einer gegebenen Menge eine Operation definiert ist, die jedem geordneten Paar (a, b) von Elementen wieder ein Element der Menge zuordnet und die den oben erwähnten Regeln unterliegt. Die Operation selbst soll hierbei mit dem neutralen Symbol $\circ$ bezeichnet werden.

Definition 2a: *Eine* **Gruppe** *besteht aus einer Menge G und einer Operation $\circ$, die jedem geordneten Paar (a, b) von Elementen aus G eindeutig* *ein mit $a \circ b$ bezeichnetes Element von G so zuordnet, daß folgende Axiome erfüllt sind:*

(I) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$. (*Assoziativgesetz*)

(II) *Es gibt ein Element $e \in G$ mit $e \circ a = a$ für alle $a \in G$.*

(III) *Zu jedem $a \in G$ existiert ein Element $a' \in G$ mit $a' \circ a = e$.*

Die Gruppe heißt eine **abelsche** *oder auch* **kommutative Gruppe,** *wenn außerdem folgendes Axiom erfüllt ist:*

(IV) $a \circ b = b \circ a$. (*Kommutativgesetz*)

Zu den Bestimmungsstücken einer Gruppe gehört neben der Menge G auch die **Gruppenverknüpfung** genannte Operation $\circ$. Eine Gruppe ist demnach durch das Paar $(G, \circ)$ gekennzeichnet. Da vielfach jedoch die Gruppenverknüpfung durch den Zusammenhang eindeutig festgelegt ist, pflegt man in solchen Fällen die Gruppe einfach mit G zu bezeichnen. Die Gruppenverknüpfung wird bisweilen auch **Gruppenmultiplikation** genannt. Man bezeichnet dann das Element $a \circ b$ als **Produkt** der Elemente a und b und nennt diese selbst die **Faktoren** des Produkts. In nicht-abelschen Gruppen muß jedoch auf die Reihenfolge der Faktoren geachtet werden, weil dann $a \circ b$ und $b \circ a$ im allgemeinen verschiedene Gruppenelemente sind.

Axiom (I) besagt, daß es bei mehrgliedrigen Produkten nicht auf die Art der Klammersetzung ankommt. Man kann daher überhaupt auf die Klammern verzichten und z. B. statt $(a \circ b) \circ c$ einfacher $a \circ b \circ c$ schreiben. Diese Möglichkeit der Klammerersparnis wird weiterhin ohne besonderen Hinweis ausgenutzt werden.

Beispiele:

2. I Die Menge $\mathbf{Z}$ aller ganzen Zahlen bildet mit der gewöhnlichen Addition als Gruppenverknüpfung eine abelsche Gruppe $(\mathbf{Z}, +)$. Dasselbe gilt für die rationalen, die reellen und die komplexen Zahlen. Man spricht dann von der **additiven Gruppe** der ganzen Zahlen, der rationalen Zahlen usw. In allen diesen Fällen wird das Element e aus (II) durch die Zahl 0 und das Element a' aus (III) durch die Zahl $-a$ vertreten.

2. II Die Mengen der von Null verschiedenen rationalen, reellen oder komplexen Zahlen bilden hinsichtlich der gewöhnlichen Multiplikation als Gruppenverknüpfung je eine abelsche Gruppe (**multiplikative Gruppe** der rationalen Zahlen usw.). In diesen Gruppen wird e durch die Zahl 1 und a' durch die reziproke Zahl $\frac{1}{a}$ vertreten. Hingegen bilden die von Null verschiedenen ganzen Zahlen hinsichtlich der Multiplikation keine Gruppe, weil es z. B. zu 2 keine ganze Zahl a' mit $a' \cdot 2 = 1$ gibt.

2. III Es sei M eine beliebige, nicht-leere Menge, und $\mathfrak{S}_M$ sei die Menge aller 1-1-Abbildungen von M auf sich. Für je zwei Abbildungen $\alpha, \beta \in \mathfrak{S}_M$ bedeute $\alpha \circ \beta$ das in § 1 ebenso bezeichnete Produkt dieser Abbildungen. Für je drei Abbildungen α, β, γ und für jedes Element $x \in M$ gilt dann

$$((\alpha \circ \beta) \circ \gamma)\, x = (\alpha \circ \beta)\,(\gamma x) = \alpha(\beta(\gamma x)) \quad \text{und}$$
$$(\alpha \circ (\beta \circ \gamma))\, x = \alpha((\beta \circ \gamma) x) = \alpha(\beta(\gamma x));$$

d. h. (I) ist erfüllt. Wählt man für e die identische Abbildung ε von M, so gilt (II). Schließlich ergibt sich die Gültigkeit von (III), wenn man bei gegebenem $\alpha \in \mathfrak{S}_M$ als Abbildung α' die zu α inverse Abbildung α^{-1} wählt. Die Menge $\mathfrak{S}_M$ ist daher hinsichtlich der Multiplikation der Abbildungen eine Gruppe, die die **symmetrische Gruppe** der Menge M genannt wird.

Ist hierbei speziell M die Menge $\{1,2,\ldots,n\}$, so bezeichnet man die zugehörige symmetrische Gruppe einfacher mit $\mathfrak{S}_n$. Jede Abbildung $\alpha \in \mathfrak{S}_n$ ist eine Permutation der Zahlen $1, \ldots, n$. Gilt etwa $\alpha(1) = a_1, \alpha(2) = a_2, \ldots, \alpha(n) = a_n$, so ist α durch die Reihenfolge der Bildzahlen $a_1, \ldots, a_n$ eindeutig bestimmt. Man schreibt daher $\alpha = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$. Gilt z. B. $n = 3$ und $\alpha = \langle 2, 3, 1 \rangle$, $\beta = \langle 3, 2, 1 \rangle$, so erhält man folgende Produkte:

$$\alpha \circ \beta = \langle 1, 3, 2 \rangle \quad \text{und} \quad \beta \circ \alpha = \langle 2, 1, 3 \rangle.$$

Dieses Beispiel zeigt, daß $\mathfrak{S}_n$ für $n \geqq 3$ keine abelsche Gruppe ist.

Aus den Gruppenaxiomen sollen jetzt einige einfache Folgerungen abgeleitet werden. In den nachstehenden Sätzen bedeutet G immer eine Gruppe.

2. 1 *Für jedes das Axiom* (II) *erfüllende Element $e \in G$ gilt auch $a \circ e = a$ für alle $a \in G$. Aus $a' \circ a = e$ folgt auch $a \circ a' = e$.*

Beweis: Zunächst wird die zweite Behauptung bewiesen: Zu a' gibt es nach (III) ein $a'' \in G$ mit $a'' \circ a' = e$. Unter Beachtung von (I) und (II) erhält man dann

$$a \circ a' = e \circ (a \circ a') = (a'' \circ a') \circ (a \circ a') = a'' \circ ((a' \circ a) \circ a') = a'' \circ (e \circ a')$$
$$= a'' \circ a' = e.$$

Hieraus folgt jetzt die erste Behauptung:

$$a \circ e = a \circ (a' \circ a) = (a \circ a') \circ a = e \circ a = a. \quad \blacklozenge$$

2. 2 *Es gibt nur genau ein Element $e \in G$ der in* (II) *geforderten Art. Bereits aus $x \circ a = a$ für nur ein $a \in G$ folgt $x = e$.*

Beweis: Das Element e^* erfülle ebenfalls die Gleichung $e^* \circ a = a$ für alle $a \in G$. Dann gilt insbesondere $e^* \circ e = e$ und wegen 2. 1

$$e^* = e^* \circ e = e;$$

d. h. e ist eindeutig bestimmt. Gilt weiter $x \circ a = a$ für ein festes Element a, so existiert wegen (III) zu diesem ein $a' \in G$ mit $a' \circ a = e$, und wegen 2. 1 erhält man

$$x = x \circ e = x \circ (a \circ a') = (x \circ a) \circ a' = a \circ a' = e. \blacklozenge$$

Das somit durch die Axiome eindeutig bestimmte Element e wird das **neutrale Element** der Gruppe genannt.

2. 3 *In* (III) *ist a' durch a eindeutig bestimmt.*

Beweis: Neben $a' \circ a = e$ gelte auch $a^* \circ a = e$. Wegen 2. 1 erhält man dann

$$a^* = a^* \circ e = a^* \circ (a \circ a') = (a^* \circ a) \circ a' = e \circ a' = a'. \blacklozenge$$

Man nennt a' das **inverse Element** von a und schreibt statt a' im allgemeinen a^{-1}. Wenn allerdings in Spezialfällen die Gruppenverknüpfung als Addition geschrieben wird (vgl. 2. I), bezeichnet man das neutrale Element mit 0 und das zu a inverse Element mit $-a$.

2. 4 $$(a^{-1})^{-1} = a \quad \textit{und} \quad (a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}.$$

Beweis: Die in 2. 1 bewiesene Gleichung $a \circ a^{-1} = e$ besagt, daß a das zu a^{-1} inverse Element ist, daß also die erste Behauptung gilt. Die zweite folgt aus

$$(b^{-1} \circ a^{-1}) \circ (a \circ b) = b^{-1} \circ ((a^{-1} \circ a) \circ b) = b^{-1} \circ (e \circ b) = b^{-1} \circ b = e. \blacklozenge$$

2. 5 *In einer Gruppe G besitzen bei gegebenen Elementen $a, b \in G$ die Gleichungen $x \circ a = b$ und $a \circ y = b$ eindeutig bestimmte Lösungen $x, y \in G$.*

Beweis: Wenn $x \in G$ Lösung der ersten Gleichung ist, wenn also $x \circ a = b$ gilt, folgt

$$x = x \circ e = x \circ a \circ a^{-1} = b \circ a^{-1};$$

d. h. x ist durch a und b eindeutig bestimmt. Umgekehrt ist aber wegen

$$(b \circ a^{-1}) \circ a = b \circ (a^{-1} \circ a) = b \circ e = b$$

das Element $x = b \circ a^{-1}$ auch tatsächlich eine Lösung. Entsprechend schließt man im Fall der zweiten Gleichung. $\blacklozenge$

Ergänzungen und Aufgaben

2 A Es sei G eine nicht-leere Menge, in der eine Operation $\circ$ definiert ist, die das Gruppenaxiom (I) und folgende Forderung erfüllt:

(*) Zu je zwei Elementen $a, b \in G$ gibt es mindestens ein $x \in G$ mit $x \circ a = b$ und mindestens ein $y \in G$ mit $a \circ y = b$.

Aufgabe: Es sei a ein festes Element aus G. Zeige, daß dann aus $x \circ a = a$ auch $x \circ z = z$ für alle $z \in G$ folgt. Folgere, daß G eine Gruppe ist und daß (II) und (III) mit (*) gleichwertig sind.

2B Eine Permutation aus $\mathfrak{S}_n (n \geqq 2)$ heißt eine **Transposition**, wenn sie zwei der Zahlen $1, \ldots, n$ vertauscht, die übrigen aber einzeln fest läßt.

Aufgabe: Zeige, daß sich jede Permutation $\alpha \in \mathfrak{S}_n$ als Produkt von endlich vielen Transpositionen darstellen läßt und daß bei verschiedenen solchen Darstellungen von α die Anzahl der auftretenden Transpositionen entweder immer gerade oder immer ungerade ist.

Bedeutet k die Anzahl der Transpositionen in irgendeiner Darstellung von α, so ist hiernach die ganze Zahl $\operatorname{sgn}(\alpha) = (-1)^k$ eindeutig durch α bestimmt und unabhängig von der Art der Darstellung. Man nennt $\operatorname{sgn}(\alpha)$ das **Vorzeichen** oder **Signum** der Permutation α. Gilt $\operatorname{sgn}(\alpha) = +1$, so heißt α eine **gerade Permutation**, im anderen Fall, nämlich $\operatorname{sgn}(\alpha) = -1$, eine **ungerade Permutation**. Die geraden Permutationen bilden für sich eine Gruppe $\mathfrak{A}_n$, die man die **alternierende Gruppe** nennt.

Aufgabe: $\operatorname{sgn}(\alpha \circ \beta) = (\operatorname{sgn}(\alpha)) \cdot (\operatorname{sgn}(\beta))$.

§ 3 Körper und Ringe

Während der Gruppenbegriff sich auf nur eine Verknüpfungsoperation bezog, werden jetzt nebeneinander zwei Operationen betrachtet, die in Anlehnung an das übliche Zahlenrechnen mit $+$ und $\cdot$ bezeichnet und Addition bzw. Multiplikation genannt werden. Geht man etwa von den rationalen Zahlen aus, so gewinnt man aus den dort gültigen Regeln durch eine entsprechende Abstraktion wie bei den Gruppen neue algebraische Strukturen.

Definition 3a: *Ein* **Körper** *besteht aus einer Menge K und zwei Operationen, die jedem geordneten Paar (a, b) von Elementen aus K eindeutig ein Element $a + b$ bzw. $a \cdot b$ von K so zuordnen, daß folgende Axiome erfüllt sind:*

(I) $(a + b) + c = a + (b + c)$. (*Assoziativität der Addition*)

(II) $a + b = b + a$. (*Kommutativität der Addition*)

(III) *Es gibt ein Element $0 \in K$ mit $0 + a = a$ für alle $a \in K$.*

(IV) *Zu jedem $a \in K$ existiert ein Element $-a$ in K mit $(-a) + a = 0$.*

(V) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. (*Assoziativität der Multiplikation*)

(VI) *Es gibt ein Element $1 \in K$ mit $1 \cdot a = a$ für alle $a \in K$.*

(VII) *Zu jedem $a \in K$ mit $a \neq 0$ existiert ein Element a^{-1} in K mit $a^{-1} \cdot a = 1$.*

(VIII) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *und* $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.
(*Distributivität*)

(IX) $1 \neq 0$.

Fordert man lediglich die Gültigkeit der Axiome (I)—(V) *und* (VIII), *so nennt man K einen* **Ring**. *Gilt zusätzlich das Axiom*

(X) $a \cdot b = b \cdot a$ (*Kommutativität der Multiplikation*),

so wird K ein **kommutativer** *Körper bzw. Ring genannt.*

Ebenso wie eine Gruppe wird auch ein Körper bzw. Ring statt mit $(K, +, \cdot)$ einfacher mit K bezeichnet. Das Symbol für die Multiplikation wird im allgemeinen unterdrückt und statt $a \cdot b$ kürzer ab geschrieben. Vielfach werden mit „Körper" nur kommutative Körper bezeichnet, während dann nichtkommutative Körper „Schiefkörper" genannt werden. In diesem Buch wird es sich allerdings ausschließlich um kommutative Körper handeln.

Wegen (I) und (V) können wieder bei endlichen Summen und Produkten die Klammern fortgelassen werden. Eine weitere Regel zur Klammerersparnis besteht in der üblichen Konvention, daß die Multiplikation stärker binden soll, daß also z. B. statt $(ab) + c$ einfacher $ab + c$ geschrieben werden darf. Diese Vereinfachung wurde bereits bei der Formulierung von (VIII) benutzt.

Die Axiome (I)—(IV) besagen, daß ein Körper bzw. Ring hinsichtlich der Addition eine abelsche Gruppe ist. Das neutrale Element 0 wird das **Nullelement** oder kurz die **Null** des Körpers bzw. Rings genannt. Das inverse Element $-a$ heißt das zu a **negative** Element. Statt $b + (-a)$ schreibt man kürzer $b - a$ und nennt dieses Element die **Differenz** von b und a. Es gilt $a + (b - a) = b$, und $b - a$ ist somit die nach 2.5 eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $a + x = b$. Wegen 2.4 gilt schließlich $-(-a) = a$ und $-(a + b) = -a + (-b) = -a - b$.

Die Axiome (V), (VI) und (VII) besagen, daß in einem Körper die von 0 verschiedenen Elemente auch hinsichtlich der Multiplikation eine Gruppe bilden. Das neutrale Element 1 dieser multiplikativen Gruppe wird das **Einselement** oder einfach die **Eins** des Körpers genannt. In Ringen braucht ein Einselement nicht zu existieren. Zu seiner Kennzeichnung müssen in nichtkommutativen Ringen jedoch beide Gleichungen $1 \cdot a = a$ und $a \cdot 1 = a$ gefordert werden, da sie wegen des Fehlens von (VII) nicht auseinander folgen. Umgekehrt braucht in kommutativen Ringen natürlich nur eine der beiden Gleichungen (VIII) gefordert zu werden.

Beispiele:

3. I Die rationalen, die reellen und die komplexen Zahlen bilden hinsichtlich der üblichen Addition und Multiplikation je einen kommutativen Körper.

3. II Die ganzen Zahlen bilden hinsichtlich der üblichen Rechenoperationen einen kommutativen Ring mit Einselement. Sie bilden jedoch keinen Körper, weil z. B. 2 in $\mathbf{Z}$ kein reziprokes Element besitzt. Auch die geraden ganzen Zahlen bilden einen kommutativen Ring. Dieser besitzt jedoch kein Einselement.

3. III Es sei G eine beliebige, additiv geschriebene abelsche Gruppe mit dem neutralen Element 0. Durch $ab = 0$ für alle $a, b \in G$ wird dann in G auch eine Multiplikation definiert, und G wird hierdurch ein kommutativer Ring.

3. IV Die Menge K bestehe aus genau zwei Elementen, die mit 0 und 1 bezeichnet werden. Definiert man eine Addition und Multiplikation durch

$$0 + 0 = 1 + 1 = 0, \quad 0 + 1 = 1 + 0 = 1;$$
$$0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1,$$

so erhält man einen Körper.

Die folgenden Sätze zeigen, daß in beliebigen Ringen oder Körpern in der üblichen Weise gerechnet werden kann.

3. 1 *In einem Ring gilt* $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ *für jedes Element* a.

Beweis: Wegen $0 + 0 = 0$ und wegen (VIII) gilt

$$0 \cdot a + 0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a.$$

Hieraus folgt nach 2. 2 die erste Behauptung $0 \cdot a = 0$. Die zweite Behauptung ergibt sich entsprechend. ◆

3. 2 *In einem Körper folgt aus* $ab = 0$ *stets* $a = 0$ *oder* $b = 0$.

Beweis: Es gelte $ab = 0$, aber $a \neq 0$. Dann existiert das zu a reziproke Element a^{-1}, und wegen 3. 1 folgt

$$b = 1 \cdot b = a^{-1}ab = a^{-1} \cdot 0 = 0. \quad ◆$$

Wie Beispiel 3. III zeigt, kann in einem Ring $ab = 0$ auch dann gelten, wenn a und b von 0 verschieden sind. Man nennt dann a einen linken und b einen rechten **Nullteiler**. Der letzte Satz besagt, daß ein Körper stets nullteilerfrei ist.

3. 3 *In einem Ring gilt* $a(-b) = (-a)\,b = -(ab)$, *insbesondere also* $(-a)(-b) = ab$.

Beweis: Wegen (VIII) und 3. 1 erhält man

$$ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a \cdot 0 = 0.$$

Hiernach ist $a(-b)$ das zu ab negative Element; d. h. es gilt $a(-b) = -(ab)$. Entsprechend ergibt sich die zweite Gleichung. ◆

Es sei jetzt K ein Körper. Für jede natürliche Zahl $n > 0$ und für jedes Element $a \in K$ bedeute $n \times a$ die aus n Summanden a bestehende Summe $a + a + \cdots + a$. In den Körpern der rationalen, reellen oder komplexen Zahlen gilt stets $n \times 1 \neq 0$. Das Beispiel 3. IV zeigt jedoch, daß in gewissen Körpern bei geeigneter Wahl von n auch der Fall $n \times 1 = 0$ eintreten kann.

Definition 3b: *Wenn es zu einem Körper K überhaupt eine natürliche Zahl $n > 0$ mit $n \times 1 = 0$ gibt, so heißt die kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft die* **Charakteristik** *von K. Gilt jedoch $n \times 1 \neq 0$ für alle natürlichen Zahlen $n > 0$, so wird K die Charakteristik 0 zugeordnet.*

Wenn die Charakteristik eines Körpers von Null verschieden ist, dann muß sie wegen (IX) jedenfalls größer als 1 sein. Der zweielementige Körper aus 3. IV besitzt daher die Charakteristik 2.

3. 4 *Die Charakteristik eines Körpers ist entweder 0 oder eine Primzahl.*

Beweis: Es sei p die Charakteristik eines Körpers, und es gelte $p \neq 0$. Nimmt man an, daß p keine Primzahl ist, so gibt es natürliche Zahlen s und t mit $s < p$, $t < p$ und $p = st$. Wegen (VIII) ergibt sich unmittelbar $(s \times 1)\ (t \times 1) = p \times 1 = 0$, wegen 3. 2 also $s \times 1 = 0$ oder $t \times 1 = 0$. Dies widerspricht wegen $s < p$, $t < p$ der Definition der Charakteristik. ◆

Ergänzungen und Aufgaben

3A Es sei q eine natürliche Zahl > 0. Für jede ganze Zahl a bedeute dann $\bar{a}$ die Menge aller ganzen Zahlen x, für die die Differenz $x - a$ durch q teilbar ist. Schließlich sei K_q die Menge aller dieser „Restklassen“.

Aufgabe:

1). Zeige, daß aus $\bar{a} = \bar{c}$ und $\bar{b} = \bar{d}$ auch $\overline{a + b} = \overline{c + d}$ und $\overline{ab} = \overline{cd}$ folgt.

2). Zeige weiter, daß durch

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} \quad \text{und} \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}$$

in K_q eine Addition und eine Multiplikation definiert werden und daß K_q hinsichtlich dieser Operationen ein kommutativer Ring mit genau q Elementen ist.

3). K_q ist genau dann ein Körper, wenn q eine Primzahl ist.

4). Ist q eine Primzahl, so ist q gleichzeitig die Charakteristik des Körpers K_q.

5). Ist q keine Primzahl, so enthält der Ring K_q Nullteiler.

3B Es sei G die Menge aller geordneten Paare $\mathfrak{x} = (x_1, x_2)$ ganzer Zahlen x_1, x_2. In G wird durch

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

eine Addition definiert.

Aufgabe: Zeige, daß G hinsichtlich dieser Addition als Verknüpfungsoperation eine abelsche Gruppe ist.

Weiter sei A die Menge aller Abbildungen α der Gruppe G in sich mit

$$\alpha(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = (\alpha\mathfrak{x}) + (\alpha\mathfrak{y})$$

für alle $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in G$. Für je zwei Abbildungen $\alpha, \beta \in A$ sei $\alpha\beta$ die Produktabbildung $\alpha \circ \beta$. Ferner sei $\alpha + \beta$ diejenige Abbildung, die jedes Element $\mathfrak{x} \in G$ auf das Element $(\alpha\mathfrak{x}) + (\beta\mathfrak{x})$ abbildet; es soll also gelten:

$$(\alpha + \beta)\,\mathfrak{x} = (\alpha\mathfrak{x}) + (\beta\mathfrak{x}).$$

Aufgabe: 1). Zeige, daß A hinsichtlich der so definierten Rechenoperationen ein Ring mit Einselement ist.

2). Zeige, daß A Nullteiler enthält und daß die Multiplikation nicht kommutativ ist.

§ 4 Vektorräume

Der ursprüngliche Begriff des Vektors besitzt eine anschauliche geometrische Bedeutung. Man denke sich etwa in der Ebene einen festen Punkt a als Anfangspunkt ausgezeichnet. Jedem weiteren Punkt x kann dann umkehrbar eindeutig die von a nach x weisende gerichtete Strecke zugeordnet werden, die man sich etwa durch einen in a ansetzenden Pfeil mit der Spitze in x repräsentiert denken kann. Man nennt diese gerichtete Strecke den **Ortsvektor** von x bezüglich des Anfangspunktes a und bezeichnet ihn mit dem entsprechenden deutschen Buchstaben $\mathfrak{x}$. Ist $\mathfrak{y}$ ein zweiter Ortsvektor, so kann man den Summenvektor $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ in bekannter Weise nach dem Parallelogrammprinzip definieren (vgl. Fig. 1). Einfache geometrische Überlegungen zeigen nun, daß die Ortsvektoren hinsichtlich dieser Addition als

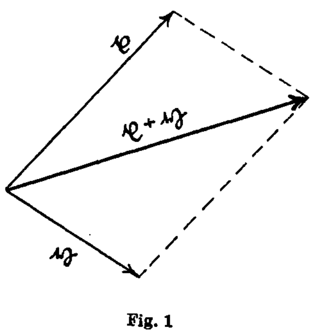

Fig. 1

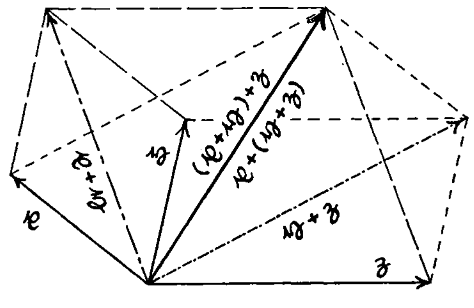

Fig. 2

Verknüpfungsoperation eine abelsche Gruppe bilden. So folgt z. B. das Assoziativgesetz aus der in Fig. 2 angedeuteten Kongruenz von Dreiecken. Das neutrale Element dieser Gruppe ist der zu einem Punkt entartete Ortsvektor des Anfangspunktes selbst. Daneben kann man aber auch jeden Ortsvektor $\mathfrak{x}$ mit einer reellen Zahl a multiplizieren: Der Vektor $a\mathfrak{x}$ sei derjenige Vektor, dessen Länge das $|a|$-fache der Länge des Vektors $\mathfrak{x}$ ist und dessen Richtung im Fall $a > 0$ mit der Richtung von $\mathfrak{x}$ übereinstimmt, im Fall $a < 0$ zu ihr entgegengesetzt gerichtet ist. Außerdem sei $0\mathfrak{x}$ wieder der Ortsvektor des Anfangspunkts. Für diese zweite Operation der Multiplikation von Ortsvektoren mit reellen Zahlen gelten nun folgende Regeln, die sich leicht geometrisch nachweisen lassen:

$$\begin{aligned}(ab)\,\mathfrak{x} &= a(b\mathfrak{x}),\\ a(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) &= a\mathfrak{x}+a\mathfrak{y},\\ (a+b)\,\mathfrak{x} &= a\mathfrak{x}+b\mathfrak{x},\\ 1\mathfrak{x} &= \mathfrak{x}.\end{aligned}$$

Der allgemeine Begriff des Vektorraums entsteht nun wie bei den Gruppen, Körpern und Ringen wieder durch eine entsprechende Abstraktion, die von der speziellen Natur der Vektoren und Rechenoperationen absieht. Diese Abstraktion geht hier sogar noch etwas weiter: Bei den Ortsvektoren wurden als Multiplikatoren reelle Zahlen benutzt. Bei der allgemeinen Begriffsbildung tritt an die Stelle der reellen Zahlen ein beliebiger kommutativer Körper K, der dann der **Skalarenkörper** genannt wird und dessen Elemente als **Skalare** bezeichnet werden.

Definition 4a: *Ein* **Vektorraum** *oder auch* **linearer Raum** *besteht aus einer additiv geschriebenen, abelschen Gruppe X, deren Elemente* **Vektoren** *genannt werden, einem kommutativen Skalarenkörper K und einer Multiplikation, die jedem geordneten Paar $(a, \mathfrak{x})$ mit $a \in K$ und $\mathfrak{x} \in X$ eindeutig einen Vektor $a\mathfrak{x} \in X$ so zuordnet, daß folgende Axiome erfüllt sind:*

(I) $$(ab)\,\mathfrak{x} = a(b\mathfrak{x}) \quad (a, b \in K;\ \mathfrak{x} \in X).$$

(*Assoziativität*)

(II) $$\begin{aligned}a(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) &= a\mathfrak{x}+a\mathfrak{y} \quad (a \in K;\ \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in X),\\ (a+b)\,\mathfrak{x} &= a\mathfrak{x}+b\mathfrak{x} \quad (a, b \in K;\ \mathfrak{x} \in X).\end{aligned}$$

(*Distributivität*)

(III) $$1\mathfrak{x} = \mathfrak{x} \qquad (1 \in K;\ \mathfrak{x} \in X).$$

Wie schon in diesen Axiomen sollen auch im allgemeinen Skalare mit kleinen lateinischen, Vektoren hingegen mit kleinen deutschen Buchstaben bezeichnet werden. Zu beachten ist, daß die Rechenoperationen trotz gleicher Bezeichnung teilweise verschiedene Bedeutung haben: So steht z. B. auf der linken Seite der zweiten Gleichung von (II) die Summe zweier Skalare, auf der rechten Seite aber die Summe zweier Vektoren. Das Zeichen $+$ bedeutet also auf der linken Seite die Addition im Skalarenkörper K, rechts hingegen die Vektoraddition in X. Ebenso treten auch in (I) verschiedene Arten der Multiplikation auf. In (II) wurde außerdem bereits eine der früheren Festsetzung entsprechende Vereinfachung benutzt: die Multiplikation mit Skalaren soll stärker binden als die Vektoraddition; statt $(a\mathfrak{x}) + \mathfrak{y}$ soll also einfacher $a\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ geschrieben werden dürfen. Axiom (I) gestattet schließlich, auch bei mehrfacher Multiplikation mit Skalaren die Klammern fortzulassen.

Ebenso wie bei den Gruppen, Ringen und Körpern pflegt man auch einen Vektorraum nur mit dem einen Buchstaben zu bezeichnen, der schon der Gruppe zugeordnet ist. Wenn der Skalarenkörper K besonders hervorgehoben werden soll, spricht man von einem Vektorraum X über K. Allgemein soll folgende Festsetzung gelten: Sofern nicht spezielle Skalarenkörper angegeben werden, soll der zu einem Vektorraum gehörende Skalarenkörper immer mit K bezeichnet werden. Treten in einem Zusammenhang mehrere Vektorräume gleichzeitig auf, so sollen sie immer denselben Skalarenkörper besitzen. Dieser darf ein beliebiger kommutativer Körper sein. Nur in Einzelfällen wird er einschränkenden Bedingungen unterworfen werden, die dann aber stets ausdrücklich angegeben werden. Für die Anwendung der Theorie sind allerdings diejenigen Vektorräume am wichtigsten, deren Skalarenkörper der Körper der reellen oder der komplexen Zahlen ist. Man spricht in diesen Fällen kurz von **reellen** bzw. **komplexen Vektorräumen**.

Die charakteristischen Operationen eines Vektorraums sind die Vektoraddition und die Multiplikation der Vektoren mit Skalaren. Diese beiden Operationen werden unter dem gemeinsamen Namen **lineare Operationen** zusammengefaßt.

Es sei jetzt X ein beliebiger Vektorraum. Da X eine (additiv geschriebene, abelsche) Gruppe ist, existiert in X ein eindeutig bestimmter neutraler Vektor. Dieser wird der **Nullvektor** genannt und mit $\mathfrak{o}$ bezeichnet. Es gilt $\mathfrak{o} + \mathfrak{x} = \mathfrak{x}$ für alle Vektoren $\mathfrak{x} \in X$, und aus $\mathfrak{x} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ für nur einen Vektor $\mathfrak{a} \in X$ folgt bereits $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$. Ebenso existiert zu jedem Vektor $\mathfrak{x}$ ein eindeutig bestimmter negativer Vektor $-\mathfrak{x}$. Für ihn gilt $\mathfrak{x} + (-\mathfrak{x}) = \mathfrak{o}$. Statt $\mathfrak{a} + (-\mathfrak{b})$ wird wieder kürzer $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ geschrieben, und dieser Vektor wird der **Differenzvektor** von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ genannt. In einem Vektorraum ist somit auch die Subtraktion unbeschränkt ausführbar.

Beispiele:

4. I Nach den einleitenden Bemerkungen bilden die ebenen Ortsvektoren (bezüglich eines festen Anfangspunktes) einen reellen Vektorraum. In analoger Weise kann man auch im Raum Ortsvektoren definieren, die dann ebenfalls einen reellen Vektorraum bilden.

4. II Es sei K ein kommutativer Körper, und $n > 0$ sei eine natürliche Zahl. Ein Aggregat $(a_1, \ldots, a_n)$ von Elementen aus K wird dann ein **n-Tupel** genannt, und die Menge aller dieser n-Tupel wird mit K^n bezeichnet. Es seien nun $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ und $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ zwei n-*Tupel* aus K^n, und c sei ein Element aus K. Setzt man dann

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \quad \text{und} \quad c\mathfrak{a} = (ca_1, \ldots, ca_n),$$

so werden hierdurch in K^n die linearen Operationen definiert, und K^n wird zu einem Vektorraum über K. Man nennt diesen Vektorraum den n-dimensionalen **arithmetischen Vektorraum** über K. In ihm ist der Nullvektor das aus lauter Nullen bestehende n-Tupel $(0, \ldots, 0)$. Der Fall $n = 1$ zeigt, daß man jeden kommutativen Körper als Vektorraum über sich selbst auffassen kann.

4. III Es sei F die Menge aller auf einem reellen Intervall $[a, b]$ definierten reellwertigen Funktionen. Für je zwei Funktionen $f, g \in F$ sei $f + g$ diejenige Funktion, deren Werte durch

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

bestimmt sind. Entsprechend sei für jede reelle Zahl c die Funktion cf durch

$$(cf)(t) = c(f(t)) \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

definiert. Hinsichtlich der so erklärten linearen Operationen ist F ein reeller Vektorraum. Nullvektor ist die auf $[a, b]$ identisch verschwindende Funktion.

Abschließend sollen noch einige Regeln für das Rechnen in Vektorräumen hergeleitet werden, die weiterhin ohne besondere Hinweise benutzt werden.

4. 1 *Für beliebige Vektoren $\mathfrak{x}$ und Skalare c gilt*

$$0\mathfrak{x} = \mathfrak{o} \text{ \textit{und} } c\mathfrak{o} = \mathfrak{o}.$$

$$\text{\textit{Aus} } c\mathfrak{x} = \mathfrak{o} \text{ \textit{folgt} } c = 0 \text{ \textit{oder} } \mathfrak{x} = \mathfrak{o}.$$

Beweis: Wegen (II) gilt

$$0\mathfrak{x} + 0\mathfrak{x} = (0 + 0)\,\mathfrak{x} = 0\mathfrak{x} \quad \text{und}$$

$$c\mathfrak{o} + c\mathfrak{o} = c(\mathfrak{o} + \mathfrak{o}) = c\mathfrak{o}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $0\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$, aus der zweiten $c\mathfrak{o} = \mathfrak{o}$. Weiter werde $c\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$, aber $c \neq 0$ vorausgesetzt. Wegen (III) erhält man dann

$$\mathfrak{x} = 1\mathfrak{x} = c^{-1}c\mathfrak{x} = c^{-1}\mathfrak{o} = \mathfrak{o}. \blacklozenge$$

Für die Bildung des negativen Vektors gilt wieder $-(-\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}$. Die Vektoren $-\mathfrak{x}$ und $(-1)\mathfrak{x}$ müssen jedoch zunächst unterschieden werden: $-\mathfrak{x}$ ist der durch die Gleichung $\mathfrak{x} + (-\mathfrak{x}) = \mathfrak{o}$ eindeutig bestimmte Vektor, während $(-1)\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{x}$ durch Multiplikation mit -1 hervorgeht. Der folgende Satz zeigt jedoch, daß beide Vektoren gleich sind.

4. 2 $-\mathfrak{x} = (-1)\mathfrak{x}$.

Beweis: Wegen (II), (III) und 4. 1 gilt

$$\mathfrak{x} + (-1)\mathfrak{x} = 1\mathfrak{x} + (-1)\mathfrak{x} = (1 + (-1))\mathfrak{x} = 0\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$$

und daher $(-1)\mathfrak{x} = -\mathfrak{x}$. $\blacklozenge$

Wegen $(-c)\mathfrak{x} = (-1)c\mathfrak{x}$ folgt hieraus noch unmittelbar die Beziehung

$$(-c)\mathfrak{x} = -(c\mathfrak{x}) = c(-\mathfrak{x}).$$

Ergänzungen und Aufgaben

4A In dem folgenden Beispiel werden die reellen Zahlen einerseits als Skalare, andererseits aber auch als Vektoren aufgefaßt. Als Skalare sollen sie in der üblichen Weise addiert werden. Als Vektoren soll für sie jedoch eine neue Art der Addition definiert werden, die zur Unterscheidung mit $\oplus$ bezeichnet wird. Es soll nämlich gelten

$$a \oplus b = \sqrt[3]{a^3 + b^3},$$

wobei unter dem Wurzelzeichen die Addition in der üblichen Weise auszuführen ist. Entsprechend bedeute ab das übliche Produkt. Faßt man jedoch a als Skalar und b als Vektor auf, so sei ein neues, mit $\odot$ bezeichnetes Produkt durch eine der beiden folgenden Gleichungen definiert:

1). $a \odot b = ab$

2). $a \odot b = \sqrt[3]{a} \cdot b$.

Aufgabe: Man untersuche, in welchem Fall der so definierten linearen Operationen ein reeller Vektorraum vorliegt.

4B Es sei K ein kommutativer Körper und X eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe. Definiert man dann das Produkt eines beliebigen „Skalars" $a \in K$ mit einem beliebigen „Vektor" $\mathfrak{x} \in X$ durch $a\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ (neutrales Element von X), so sind mit Ausnahme von (III) alle Axiome des Vektorraums erfüllt.

Die Bedeutung von Axiom (III) soll durch folgende Aufgabe beleuchtet werden: X erfülle alle Axiome eines Vektorraums über K mit Ausnahme von (III). Es existiere also ein „Vektor" $\mathfrak{a} \in X$ mit $1\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}$.

Aufgabe:

1). Für einen „Vektor" $\mathfrak{x} \in X$ gilt $1\mathfrak{x} = \mathfrak{x}$ genau dann, wenn $\mathfrak{x}$ sich in der Form $\mathfrak{x} = 1\mathfrak{y}$ mit einem geeigneten „Vektor" $\mathfrak{y} \in X$ darstellen läßt.

2). Für jeden „Vektor" $\mathfrak{x}$ der Form $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} - 1\mathfrak{y}$ gilt $1\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$.

3). Es werde

$$U = \{\mathfrak{x}\colon \mathfrak{x} \in X,\ 1\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\} \quad \text{und} \quad V = \{\mathfrak{x}\colon \mathfrak{x} \in X,\ 1\mathfrak{x} = \mathfrak{o}\}$$

gesetzt. Zeige, daß sich jeder „Vektor" $\mathfrak{x} \in X$ auf genau eine Weise in der Form $\mathfrak{x} = \mathfrak{u} + \mathfrak{v}$ mit $\mathfrak{u} \in U$ und $\mathfrak{v} \in V$ darstellen läßt.

4). Wendet man die linearen Operationen auf „Vektoren" aus U an, so erhält man stets wieder „Vektoren" aus U. Die Teilmenge U von X erfüllt alle Axiome eines Vektorraums.

4C Die in der Definition des Vektorraums enthaltene Forderung, daß der Skalarenkörper ein kommutativer Körper sein soll, ist zunächst unwesentlich. Alle bisherigen Betrachtungen und auch die Ergebnisse der folgenden Paragraphen gelten sinngemäß ebenso dann, wenn man als Skalarenkörper einen Schiefkörper zuläßt. Erst an einer späteren Stelle (§ 9) wird entscheidend benutzt, daß der Skalarenkörper kommutativ ist.

Zweites Kapitel

Unterräume, Basis, Koordinaten

In diesem Kapitel werden zunächst Begriffsbildungen behandelt, die unmittelbar an die Definition des Vektorraums anschließen und sich auf nur einen Vektorraum beziehen. Im Mittelpunkt dieser Betrachtungen steht der Begriff der Basis eines Vektorraums und der mit ihm eng zusammenhängende Begriff der linearen Unabhängigkeit von Vektoren. Mit diesen Hilfsmitteln ist es dann auch möglich, die Dimension eines Vektorraums zu definieren. Hierbei ergibt sich eine Aufteilung der Vektorräume in endlich-dimensionale und solche unendlicher Dimension. Wesentlich für das konkrete Rechnen mit Vektoren ist schließlich, daß man in endlich-dimensionalen Vektorräumen hinsichtlich einer Basis jeden Vektor durch endlich viele Skalare, seine Koordinaten, beschreiben kann. Der Koordinatenbegriff gestattet es, das Rechnen mit Vektoren auf das Rechnen im Skalarenkörper zurückzuführen.

§ 5 Unterräume

Es sei U eine nicht-leere Teilmenge eines Vektorraums X. Mit zwei Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aus U wird dann im allgemeinen nicht auch ihr Summenvektor $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ in U liegen; und entsprechend wird aus $c \in K$ und $\mathfrak{a} \in U$ im allgemeinen auch nicht $c\mathfrak{a} \in U$ folgen. Wenn dies jedoch der Fall ist, wenn also aus $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in U$ und $c \in K$ stets $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \in U$ und $c\mathfrak{a} \in U$ folgt, so sind die linearen Operationen auch in der Teilmenge U definiert. Man sagt dann, daß U gegenüber den linearen Operationen abgeschlossen ist.

Definition 5a: *Eine Teilmenge U eines Vektorraums X heißt ein* **Unterraum** *von X (in Zeichen: $U \leq | X$), wenn sie gegenüber den linearen Operationen abgeschlossen und selbst ein Vektorraum ist.*

Diese Definition des Unterraums enthält neben der Forderung der Abgeschlossenheit noch die weitere Forderung, daß auch alle an einen Vektorraum gestellten Bedingungen erfüllt sein sollen. Daß hierbei in Wirklichkeit keine zusätzliche Forderung vorliegt, sondern daß sich die Gültigkeit der Axiome automatisch überträgt, zeigt der folgende Satz.

5. 1 *Eine nicht-leere Teilmenge U eines Vektorraums X ist genau dann ein Unterraum von X, wenn sie gegenüber den linearen Operationen abgeschlossen ist, wenn also aus $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in U$ und $c \in K$ stets $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \in U$ und $c\mathfrak{a} \in U$ folgt.*

Beweis: Es ist lediglich zu zeigen, daß sich die Gültigkeit der Axiome von X auf U überträgt. Von den Axiomen (I)—(III) aus 4a ist dies unmittelbar klar und ebenso auch von der Assoziativität und Kommutativität der Vektoraddition, weil diese Bedingungen ja in X, erst recht also in der Teilmenge U erfüllt sind. Eine Ausnahme machen lediglich die Existenzforderungen, die sich auf die Existenz des neutralen und des negativen Vektors beziehen. Nun ist aber U nicht leer, enthält also mindestens einen Vektor $\mathfrak{a}$. Nach Voraussetzung gilt dann auch $\mathfrak{o} = 0\mathfrak{a} \in U$. Die Menge U enthält also den Nullvektor von X, der dann auch neutrales Element in U ist. Außerdem enthält U nach Voraussetzung mit dem Vektor $\mathfrak{x}$ auch den Vektor $(-1)\,\mathfrak{x}$, wegen 4. 2 also den Vektor $-\mathfrak{x}$. ◆

Da ein Unterraum, für sich betrachtet, selbst ein Vektorraum ist, muß er jedenfalls den Nullvektor enthalten. Die leere Menge ist daher kein Unterraum. Unmittelbar ergibt sich außerdem: Ist U ein Unterraum von X und V ein Unterraum von U, so ist V auch ein Unterraum von X.

Beispiele:

5. I Die nur aus dem Nullvektor bestehende Teilmenge $\{\mathfrak{o}\}$ eines Vektorraums X ist ein Unterraum von X; und zwar ist $\{\mathfrak{o}\}$ offenbar der kleinste Unterraum von X. Man nennt ihn den **Nullraum**. Außerdem ist jeder Vektorraum X ein Unterraum von sich selbst.

5. II In dem reellen Vektorraum der ebenen Ortsvektoren bezüglich eines Anfangspunktes a erhält man Unterräume auf folgende Weise: Es sei G eine durch a gehende Gerade. Dann bilden die zu den Punkten von G gehörenden Ortsvektoren einen Unterraum. Außer dem Nullraum und der ganzen Ebene sind diese durch a gehenden Geraden auch die einzigen Unterräume. Bei den räumlichen Ortsvektoren treten als weitere Unterräume noch die Ebenen durch den Anfangspunkt auf.

5. III Die Menge aller n-Tupel der Form $(0, a_2, \ldots, a_n)$ ist ein Unterraum des arithmetischen Voktorraums K^n (vgl. 4. II).

5. IV In dem Funktionenraum F (vgl. 4. III) bilden die Teilmengen aller integrierbaren, aller stetigen oder aller differenzierbaren Funktionen je einen Unterraum. Ebenso ist die Teilmenge aller Polynome ein Unterraum von F. In der angegebenen Reihenfolge sind sie sogar Unterräume voneinander.

5. 2 *Der Durchschnitt beliebig vieler Unterräume eines Vektorraums ist selbst wieder ein Unterraum.*

Beweis: Es sei $\mathfrak{S}$ ein System von Unterräumen, und

$$D = \cap \{U : U \in \mathfrak{S}\}$$

sei ihr Durchschnitt. Aus $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in D$ folgt $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in U$ für alle $U \in \mathfrak{S}$. Wegen 5. 1 gilt dann auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \in U$ für alle $U \in \mathfrak{S}$ und somit $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \in D$. Ebenso folgt aus $c \in K$, $\mathfrak{a} \in D$ zunächst $c\mathfrak{a} \in U$ für alle $U \in \mathfrak{S}$ und weiter $c\mathfrak{a} \in D$. Wieder wegen 5. 1 und wegen $\mathfrak{o} \in D$ ist daher D ein Unterraum. ◆

Es sei jetzt M eine beliebige Teilmenge eines Vektorraums X. Dann ist das System $\mathfrak{S}$ aller Unterräume U von X mit $M \leq U$ wegen $X \in \mathfrak{S}$ nicht leer, und der Durchschnitt von $\mathfrak{S}$ ist nach dem letzten Satz wieder ein Unterraum von X. Er ist offenbar der kleinste Unterraum von X, der die Menge M enthält. Man bezeichnet ihn mit $[M]$ und nennt ihn den von der Menge M **erzeugten** oder **aufgespannten** Unterraum. Es gilt also

Definition 5b:

$$[M] = \cap \{U : M \leq U, U \leq | X\}.$$

Ist M eine endliche Teilmenge von X, gilt also etwa $M = \{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n\}$, so soll statt $[M]$ auch $[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$ geschrieben werden. Eine Teilmenge M von X ist genau dann ein Unterraum von X, wenn $M = [M]$ gilt. Aus $M \leq N \leq X$ folgt außerdem $[M] \leq | [N] \leq | X$. Da die leere Menge Teilmenge jedes Unterraums und insbesondere des Nullraums ist, gilt $[\emptyset] = \{\mathfrak{o}\}$. Da der Nullvektor ebenfalls den Nullraum erzeugt, kann statt $\{\mathfrak{o}\}$ auch $[\mathfrak{o}]$ geschrieben werden.

Definition 5c: *Es seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ endlich viele Vektoren eines Vektorraums X. Jeder Vektor der Form $c_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + c_n\mathfrak{a}_n$ mit beliebigen Skalaren $c_1, \ldots, c_n$ wird dann eine* **Linearkombination** *der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ genannt. Ein Vektor heißt eine Linearkombination einer nicht-leeren Teilmenge M von X, wenn er eine Linearkombination endlich vieler Vektoren aus M ist.*

5. 3 *Der von einer nicht-leeren Teilmenge M eines Vektorraums X aufgespannte Unterraum $[M]$ besteht aus genau allen Linearkombinationen von M.*

Beweis: Addiert man zwei Linearkombinationen von M oder multipliziert man eine Linearkombination von M mit einem Skalar, so erhält man offenbar wieder eine Linearkombination von M. Wegen 5. 1 ist daher die Menge M^* aller Linearkombinationen von M ein Unterraum von X. Jeder Vektor $\mathfrak{a} \in M$ ist wegen $\mathfrak{a} = 1\mathfrak{a}$ eine Linearkombination von M. Daher gilt $M \leq M^*$, und es folgt $[M] \leq M^*$. Andererseits muß $[M]$ als Unterraum mit je endlich vielen Vektoren aus M auch jede ihrer Linearkombinationen enthalten; d. h. es gilt umgekehrt $M^* \leq [M]$. Zusammen ergibt dies die behauptete Gleichung $[M] = M^*$. ◆

Ist wieder $\mathfrak{S}$ ein System von Unterräumen eines Vektorraums X, so ist die Vereinigungsmenge dieses Systems im allgemeinen kein Unterraum von X. Jedoch wird von dieser Vereinigungsmenge ein Unterraum aufgespannt, den man die **Summe** der Unterräume des Systems nennt und mit $\Sigma\, \{U\colon U \in \mathfrak{S}\}$, oder bei endlich vielen Unterräumen auch mit $U_1 + \cdots + U_n$ bezeichnet. Es gilt also

Definition 5d:

$$\Sigma\, \{U\colon\ U \in \mathfrak{S}\} = [\bigcup\, \{U\colon\ U \in \mathfrak{S}\}].$$

Der Summenraum $\Sigma\, \{U\colon U \in \mathfrak{S}\}$ besteht nach 5.3 aus genau den Vektoren der Form $c_1 \mathfrak{a}_1 + \cdots + c_n \mathfrak{a}_n$, wobei jeder der Vektoren $\mathfrak{a}_\nu (\nu = 1, \ldots, n)$ in einem Unterraum U_ν des Systems $\mathfrak{S}$ liegt. Dann aber gilt auch $c_\nu \mathfrak{a}_\nu \in U_\nu$. Sind außerdem gewisse der Unterräume U_ν gleich, gilt also etwa $U_{\nu_1} = \cdots = U_{\nu_k} = U$, so folgt sogar $c_{\nu_1} \mathfrak{a}_{\nu_1} + \cdots + c_{\nu_k} \mathfrak{a}_{\nu_k} \in U$. Nach geeigneter Zusammenfassung läßt sich daher die Linearkombination $c_1 \mathfrak{a}_1 + \cdots + c_n \mathfrak{a}_n$ auch in der Form $\mathfrak{u}_1 + \cdots + \mathfrak{u}_r$ darstellen, wobei die Vektoren $\mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_r$ in verschiedenen Unterräumen $U_1, \ldots, U_r$ des Systems $\mathfrak{S}$ liegen. Unmittelbar ergibt sich hieraus:

5.4 *Der Summenraum $\Sigma\, \{U\colon U \in \mathfrak{S}\}$ besteht aus genau denjenigen Vektoren $\mathfrak{x}$, die sich in der Form $\mathfrak{x} = \mathfrak{u}_1 + \cdots + \mathfrak{u}_r$ darstellen lassen, wobei die Vektoren $\mathfrak{u}_1, \ldots, \mathfrak{u}_r$ in verschiedenen Unterräumen $U_1, \ldots, U_r$ des Systems $\mathfrak{S}$ liegen.*

Ergänzungen und Aufgaben

5A Es sei K der aus genau zwei Elementen bestehende Körper des Beispiels 3. IV.

Aufgabe: Man bestimme alle Unterräume des arithmetischen Vektorraums K^3.

5B Eine Teilmenge L eines Vektorraums X heißt eine **lineare Mannigfaltigkeit**, wenn es zu ihr einen Unterraum U_L von X mit folgender Eigenschaft gibt: Aus $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in L$ folgt stets $\mathfrak{a} - \mathfrak{b} \in U_L$ und aus $\mathfrak{a} \in L$, $\mathfrak{u} \in U_L$ umgekehrt $\mathfrak{a} + \mathfrak{u} \in L$. Als spezielle lineare Mannigfaltigkeit ordnet sich in diese Definition auch die leere Menge ein.

Jeder Unterraum von X ist eine lineare Mannigfaltigkeit. Aber z. B. ist auch jede einelementige Teilmenge $\{\mathfrak{a}\}$ von X eine lineare Mannigfaltigkeit, jedoch nur im Fall $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ ein Unterraum.

Aufgabe:

1). Der zu einer nicht-leeren linearen Mannigfaltigkeit L gehörende Unterraum U_L ist durch L eindeutig bestimmt. Ist $\mathfrak{a}$ ein fester Vektor aus L, so gilt $U_L = \{\mathfrak{a} - \mathfrak{x}\colon \mathfrak{x} \in L\}$.

2). Eine Teilmenge M von X ist genau dann eine lineare Mannigfaltigkeit, wenn sie mit je endlich vielen Vektoren $\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_n$ auch jeden Vektor der Form $c_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + c_n\mathfrak{a}_n$ mit $c_1 + \cdots + c_n = 1$ enthält.

3). Eine lineare Mannigfaltigkeit ist genau dann ein Unterraum, wenn sie den Nullvektor enthält.

4). Der Durchschnitt von beliebig vielen linearen Mannigfaltigkeiten ist wieder eine lineare Mannigfaltigkeit.

5). Es seien L und M zwei nicht-leere lineare Mannigfaltigkeiten, und N sei die kleinste lineare Mannigfaltigkeit, die L und M enthält. Dann gilt $U_N = U_L + U_M$ im Fall $L \cap M \neq \emptyset$. Im Fall $L \cap M = \emptyset$ gilt jedoch $U_N = U_L + U_M + [\mathfrak{a}]$ mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} - \mathfrak{c}$, wobei $\mathfrak{b}$ ein beliebiger Vektor aus L und $\mathfrak{c}$ ein beliebiger Vektor aus M ist.

§ 6 Basis und Dimension

Es seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ endlich viele Vektoren eines Vektorraums X. Diese Vektoren spannen dann einen Unterraum U von X auf, und nach 5. 3 läßt sich jeder Vektor aus U als eine Linearkombination von $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ darstellen. Dies gilt insbesondere für den Nullvektor. Eine mögliche Darstellung des Nullvektors ist $\mathfrak{o} = 0\mathfrak{a}_1 + \cdots + 0\mathfrak{a}_n$; sie wird die **triviale Darstellung** genannt. Daneben können aber auch nicht-triviale Darstellungen $\mathfrak{o} = c_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + c_n\mathfrak{a}_n$ mit $c_\nu \neq 0$ für mindestens einen Index ν existieren. Die folgende Definition betrifft den Sonderfall, in dem dies nicht möglich ist.

Definition 6a: *Endlich viele Vektoren* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ *eines Vektorraums heißen* **linear unabhängig,** *wenn der Nullvektor nur die triviale Darstellung als Linearkombination von* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ *zuläßt; wenn also aus* $c_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + c_n\mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}$ *stets* $c_1 = \cdots = c_n = 0$ *folgt. Wenn die Vektoren* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ *nicht linear unabhängig sind, werden sie* **linear abhängig** *genannt.*

Wenn die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ linear unabhängig sind, gilt $\mathfrak{a}_\nu \neq \mathfrak{o}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, weil z. B. aus $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{o}$ die nicht-triviale Darstellung $\mathfrak{o} = 1\mathfrak{a}_1 + 0\mathfrak{a}_2 + \cdots + 0\mathfrak{a}_n$ folgen würde. Insbesondere ist also ein einzelner Vektor genau dann linear unabhängig, wenn er vom Nullvektor verschieden ist.

Definition 6b: *Eine Teilmenge* M *eines Vektorraums* X *heißt* **linear unabhängig,** *wenn je endlich viele verschiedene Vektoren aus* M *linear unabhängig sind. Andernfalls heißt die Menge* M **linear abhängig.**

Als Spezialfall dieser Definition ist die leere Menge linear unabhängig. Außerdem ergibt sich unmittelbar: Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge ist selbst linear unabhängig; jede Obermenge einer linear abhängigen Menge ist wieder linear abhängig.

6.1 *Eine aus mindestens zwei Vektoren bestehende Menge M ist genau dann linear abhängig, wenn sich mindestens ein Vektor $\mathfrak{x} \in M$ als Linearkombination verschiedener Vektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \in M$ mit $\mathfrak{a}_\nu \neq \mathfrak{x}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ darstellen läßt.*

Beweis: Gilt $\mathfrak{x} = c_1 \mathfrak{a}_1 + \cdots + c_n \mathfrak{a}_n$ mit verschiedenen Vektoren $\mathfrak{x}, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \in M$, so ist $\mathfrak{o} = 1\mathfrak{x} - c_1\mathfrak{a}_1 - \cdots - c_n\mathfrak{a}_n$ eine nicht-triviale Darstellung des Nullvektors, und M ist linear abhängig. Umgekehrt sei M linear abhängig. Dann gibt es verschiedene Vektoren $\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_n \in M$ und Skalare $c_0, \ldots, c_n$ mit $c_0\mathfrak{a}_0 + \cdots + c_n\mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}$ und $c_\nu \neq 0$ für mindestens einen Index ν. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $c_0 \neq 0$ und $n \geqq 1$ angenommen werden. Es folgt $\mathfrak{a}_0 = -c_0^{-1}c_1\mathfrak{a}_1 - \cdots - c_0^{-1}c_n\mathfrak{a}_n$; d. h. $\mathfrak{a}_0$ kann als Linearkombination von $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ dargestellt werden. ◆

Definition 6c: *Eine Teilmenge B eines Vektorraums X heißt eine* **Basis** *von X, wenn B linear unabhängig ist und den ganzen Raum X aufspannt (d. h. $[B] = X$).*

Unmittelbar folgt hieraus: Eine Teilmenge M von X ist genau dann linear unabhängig, wenn sie eine Basis des von ihr aufgespannten Unterraums $[M]$ ist.

Beispiele:

6. I Die leere Menge ist eine Basis des Nullraums; und zwar ist sie auch die einzige Basis, weil die Menge $\{\mathfrak{o}\}$ selbst linear abhängig ist.

6. II In dem reellen Vektorraum der ebenen Ortsvektoren bilden je zwei Ortsvektoren, deren Spitzen nicht mit dem Anfangspunkt auf einer Geraden liegen, eine Basis. Entsprechend bilden je drei Ortsvektoren, deren Spitzen nicht mit dem Anfangspunkt in einer Ebene liegen, eine Basis des Vektorraums der räumlichen Ortsvektoren.

6. III In dem arithmetischen Vektorraum K^n (vgl. 4. II) bilden die n-Tupel

$$\mathfrak{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad \mathfrak{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad \mathfrak{e}_n = (0, \ldots, 0, 1),$$

die an genau einer Stelle eine 1 und sonst lauter Nullen aufweisen, eine Basis. Diese Basis wird auch die **kanonische Basis** von K^n genannt. Sie ist jedoch nicht die einzige Basis von K^n. So bilden z. B. die Tripel

$$\mathfrak{a}_1 = (1, 1, 0), \quad \mathfrak{a}_2 = (1, 0, 1), \quad \mathfrak{a}_3 = (0, 1, 1)$$

ebenfalls eine Basis von K^3, sofern K nicht die Charakteristik 2 besitzt. Wenn jedoch K ein Körper der Charakteristik 2 ist, gilt wegen $1 + 1 = 0$ auch $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3 = \mathfrak{o}$; in diesem Fall sind also die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ linear abhängig.