



Kiehl Wirtschaftsstudium

Foit | Lorberg | Vogl (Hrsg.)

Kastner

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

2. Auflage

kiehl
 E-BOOK



Kiehl Wirtschaftsstudium

Foit | Lorberg | Vogl (Hrsg.)

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Prof. Dr. Marc Kastner

2., aktualisierte Auflage

kiehl



ISBN 978-3-470-**10212-2** • 2., aktualisierte Auflage 2022
eISBN 978-3-470-**00331-3**

© NWB Verlag GmbH & Co. KG, Herne 2018
www.kiehl.de

Kiehl ist eine Marke des NWB Verlags

Alle Rechte vorbehalten.

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages.

Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Satz: SATZ-ART Prepress & Publishing GmbH, Bochum

Druck: Druckerei Hachenburg PMS GmbH, Hachenburg

Zur Reihe „Kiehl Wirtschaftsstudium“

Liebe Leserinnen und Leser,

wir freuen uns, dass Sie einen Blick in dieses Buch aus der Reihe „Kiehl Wirtschaftsstudium“ werfen.

Die Reihe vermittelt diejenigen Inhalte, die typischerweise zu einem Studium der Betriebswirtschaftslehre an einer deutschen Hochschule gehören. Die einzelnen Bände fassen die verschiedenen Felder der Betriebswirtschaftslehre sowie die relevanten Bereiche der Volkswirtschaftslehre und deren praxisorientierte Anwendungsfelder und der Rechtswissenschaft im Zuschnitt eines typischen Kurses bzw. Moduls zusammen. Sie ermöglichen Studierenden an Hochschulen und Akademien und interessierten Praktikern einen leichten Einstieg in das grundlegende Wissen für Studium und Praxis – in einer lesefreundlichen Darstellung, die gleichzeitig das akademische Niveau wahrt.

Uns als Herausgebern und den Autoren der Reihe geht es darum, dass Sie die großen Zusammenhänge und die wesentlichen Details des jeweiligen Themenbereichs kennen lernen. Daher haben wir bewusst einen Umfang gewählt, der Sie nicht sofort verschreckt, und einen Stil, der Sie hoffentlich stets zum Weiterlesen motiviert. Alle Autoren greifen auf langjährige Erfahrung als Lehrende an Universitäten und Fachhochschulen zurück und gleichzeitig auf umfassende Kenntnisse der beruflichen Praxis, in der sie als Manager, Berater oder Anwälte tätig waren oder noch sind.

Das Layout der Werke ermöglicht Ihnen eine besonders komfortable Lektüre. So finden Sie relevante Begriffe nicht nur in einem Stichwortverzeichnis am Ende des Buches, sondern auch in der großzügigen Randspalte direkt neben dem jeweiligen Absatz. Gleichzeitig können Sie diese Randspalte für Ihre Notizen und Anmerkungen nutzen, um Ihre Gedanken direkt zu notieren. „Merke“-Symbole und „QV“ (Querverweis) weisen auf besonders wichtige Informationen und Zusammenhänge hin, die Ihnen nicht entgehen sollten.

Die Reihe „Kiehl Wirtschaftsstudium“ bietet Ihnen mehr als nur Lehrbücher! Zu jedem Band gehört ein passgenauer Online-Bereich, in dem Sie Aufgaben in verschiedenen Schwierigkeitsstufen und die dazugehörigen Lösungen finden. Damit können Sie die Lerninhalte noch weiter verinnerlichen und sich optimal auf Ihre Prüfungen vorbereiten.

Wir wünschen Ihnen eine motivierende Lektüre und freuen uns über Ihr Feedback zur Verbesserung und Weiterentwicklung der Reihe unter **feedback@kiehl.de**.

Mit allerbesten Grüßen

Die Herausgeber

*Prof. Dr. Kristian Foit
Daniel Lorberg LL.M., M.A.
Prof. Dr. Bernard Vogl*



Dozentenservice

Als besonderer Service für Dozenten steht zu diesem Titel ein kompletter **Foliensatz als Gratis-Download** in meinkiehl zur Verfügung. Lösen Sie hierfür auf **www.kiehl.de** den Freischaltcode für das Online-Buch ein. Nutzen Sie dazu einfach ihr bestehendes Benutzerkonto oder registrieren Sie sich neu und lassen Sie sich als Dozent/in von unserem Dozentenservice freischalten. Das Dozentenmaterial ist auf der Startseite des Online-Buches über den Button „Dozentenmaterial“ abrufbar.

Vorwort zur zweiten Auflage

Die erste Auflage des Lehrbuches zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler wurde von den Lesern sehr gut aufgenommen. Es diente vielen Studenten als begleitendes Text- und Übungsbuch zur Vorbereitung auf die Modulprüfungen in den quantitativen Methoden. Die hohe Akzeptanz des Buches hat eine aktualisierte Neuauflage bewirkt. Da sich das didaktische Konzept bewährt hat, wurden nur kleinere Änderungen vorgenommen. Ich wünsche Ihnen viel Spaß bei der Lektüre!

Marc Kastner
Köln, im Oktober 2021

Vorwort zur ersten Auflage

Dieses Buch soll Ihnen helfen, ökonomische Problemstellungen mathematisch zu lösen. Es behandelt die für angehende Wirtschaftswissenschaftler relevanten Methoden, Verfahren und Modelle, die üblicherweise in den ersten Semestern eines Bachelorstudiums an Universitäten und Fachhochschulen gelehrt werden und ist deshalb als vorlesungsbegleitendes Textbuch konzipiert. Mir ist es aus didaktischen Gründen sehr wichtig, dass meine Hörer den in der Vorlesung behandelten Lehr- und Lernstoff noch einmal „expressis verbis“ nachlesen und aufarbeiten können. Eine gründliche Methodenkompetenz ist zu Beginn eines wirtschaftswissenschaftlichen Studiums besonders notwendig, da viele Fragestellungen im weiteren Studienverlauf sowie im Berufsleben mathematisch formuliert, modelliert und gelöst werden. Zweifellos sind viele Themen dieses Buches dem Schulstoff der gymnasialen Oberstufe sehr nahe, sodass sich gewisse (beabsichtigte) Überschneidungen zum propädeutischen Vorwissen ergeben. Ein wichtiges Ziel ist es ja gerade, die heterogene mathematische Vorbildung der Studierenden zum Studienbeginn zu nivellieren. Dem Leser bleibt es selbst überlassen, sich einzelne Teilgebiete, die aus der Schule eigentlich bekannt sein müssten, im Selbststudium zu erarbeiten. Das Lehrbuch bietet mit der begleitenden Online-Lernumgebung ausreichend Gelegenheit hierzu. Auf die Darstellung mathematischer Beweise wird zugunsten von anwendungsorientierten Beispielen aus der Betriebs- und Volkswirtschaftslehre verzichtet. Dadurch bleiben die Ausführungen übersichtlich und auf das Wesentliche konzentriert.

Das Buch behandelt in sieben Kapiteln die wichtigsten Teilgebiete der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Da zur Beantwortung ökonomischer Fragestellungen häufig Schlüsse aus bestimmten Sachverhalten gezogen werden müssen, werden im ersten Kapitel zunächst die Logik und die Mengenlehre dargestellt. Das zweite Kapitel widmet sich der Arithmetik und Kombinatorik. Hierzu gehören neben den elementaren Rechenoperationen auch die Behandlung von Gleichungen und Ungleichungen sowie die grundlegenden kombinatorischen Zählvorgänge. Im dritten Kapitel steht die lineare Algebra im Vordergrund. Es wird gezeigt, wie mithilfe der Matrizen- und Vektorrechnung lineare Gleichungssysteme und lineare Planungsmodelle gelöst werden können. Die Darstellung und die Anwendung reeller Funktionen bestimmen die Ausführungen des vierten Kapitels. Neben der Beschreibung der elementaren Funktionen und deren Eigenschaften wird auf Folgen und Reihen sowie deren Bedeutung für die Finanzmathematik eingegangen. Die funktionalen Zusammenhänge werden im fünften Kapitel wieder aufgegriffen und mittels

der Differentialrechnung mathematisch näher untersucht. Das sechste Kapitel behandelt die Integralrechnung, mit der sich u. a. Marktsituationen ökonomisch bewerten und interpretieren lassen. Das Buch schließt im siebten Kapitel mit der linearen Optimierung, dem wohl bedeutendsten Verfahren des Operation Research.

Die erste Auflage eines Lehrbuchs soll sich weiterentwickeln. Dazu bin ich auf die Rückmeldungen der Lehrenden und Lernenden angewiesen. Ich wünsche Ihnen viel Spaß bei der Lektüre und freue mich über jedwede Kritik und Anregung!

Marc Kastner

Köln, im November 2017

Zur Reihe „Kiehl Wirtschaftsstudium“	5
Vorwort	7

Kapitel 1

1. Logik und Mengenlehre	14
1.1 Aussagenlogik	14
1.1.1 Aussagen	14
1.1.2 Verknüpfung von Aussagen	16
1.2 Mengenlehre	19
1.2.1 Mengenbeziehungen	19
1.2.2 Mengenoperationen	22
1.2.3 Produktmengen	28
1.2.4 Zahlenmengen	31

Kapitel 2

2. Arithmetik und Kombinatorik	34
2.1 Elementare Rechenoperationen	34
2.1.1 Grundrechenarten	34
2.1.2 Rechnen mit Brüchen	38
2.1.3 Rechnen mit Potenzen	39
2.1.4 Rechnen mit Logarithmen	41
2.2 Gleichungen und Ungleichungen	43
2.2.1 Terme und Äquivalenzumformungen	43
2.2.2 Lösung von Gleichungen	45
2.2.3 Lösung von Ungleichungen	50
2.3 Indizes, Summen und Produkte	52
2.3.1 Indizierte Variablen	52
2.3.2 Summen- und Produktzeichen	53
2.3.3 Fakultät und Binomialkoeffizient	56
2.3.4 Binomischer Lehrsatz	58
2.4 Kombinatorik	59
2.4.1 Grundlegendes Zählprinzip	59
2.4.2 Permutationen	60
2.4.3 Variationen	61
2.4.4 Kombinationen	62
2.4.5 Übersicht über die Anzahl kombinatorischer Ergebnisse	63

Kapitel 3

3. Lineare Algebra	66
3.1 Elementare Vektoralgebra	66
3.1.1 Matrizen und Vektoren	66
3.1.2 Spezielle Matrizen	69

3.1.3	Rechnen mit Matrizen und Vektoren	71
3.1.4	Determinanten	78
3.2	Lineare Gleichungssysteme	80
3.2.1	Formulierung eines linearen Gleichungssystems	80
3.2.2	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme	83
3.3	Lösung von linearen Gleichungssystemen	85
3.3.1	Einsetzungs-, Gleichsetzungs- und Additionsverfahren	85
3.3.2	Gaußsches Eliminationsverfahren	88
3.3.3	Cramersche Regel	94

Kapitel 4

4.	Reelle Funktionen	100
4.1	Funktionen als spezielle Relationen	100
4.1.1	Funktionsbegriff	100
4.1.2	Darstellungsformen	102
4.2	Elementare Funktionen	105
4.2.1	Konstante Funktion	105
4.2.2	Lineare Funktion	106
4.2.3	Polynom n -ten Grades	110
4.2.4	Potenz- und Wurzelfunktion	114
4.2.5	Rationale Funktion	117
4.2.6	Exponential- und Logarithmusfunktion	119
4.3	Eigenschaften von Funktionen	122
4.3.1	Symmetrie, Monotonie und Beschränktheit	122
4.3.2	Nullstellen und Ordinatenabschnitt	128
4.3.3	Umkehrbarkeit und Verknüpfung	130
4.4	Folgen und Reihen	135
4.4.1	Begriff der Folge	135
4.4.2	Konvergenz von Folgen	137
4.4.3	Reihen	140
4.4.4	Prozentrechnung	144
4.4.5	Zinsrechnung	146
4.4.6	Rentenrechnung	149
4.4.7	Tilgungsrechnung	153
4.5	Grenzwert und Stetigkeit	156

Kapitel 5

5.	Differentialrechnung	164
5.1	Differentiation von Funktionen mit einer Variablen	164
5.1.1	Begriff der Ableitung	164
5.1.2	Analyse des Änderungsverhaltens von funktionalen Zusammenhängen	166
5.1.3	Ableitungen elementarer Funktionen	170

5.1.4	Ableitungen verknüpfter Funktionen	170
5.1.5	Höhere Ableitungen und Regel von de l'Hôpital	172
5.2	Kurvendiskussion	174
5.2.1	Monotonie und Krümmungsverhalten	174
5.2.2	Bestimmung von Nullstellen mithilfe des Newton-Verfahrens	176
5.2.3	Extrempunkte	180
5.2.4	Wendepunkte	186
5.2.5	Elastizitäten	189
5.2.6	Marginalanalyse	193
5.3	Differentiation von Funktionen mit mehreren Variablen	200
5.3.1	Partielle Ableitungen	200
5.3.2	Partielles und totales Differential	202
5.3.3	Extrempunkte	204

Kapitel 6

6. Integralrechnung	210
6.1 Die Technik des Integrierens	210
6.1.1 Stammfunktion und unbestimmtes Integral	210
6.1.2 Grundintegrale	210
6.2 Das bestimmte Integral	211
6.2.1 Hauptsatz der Integralrechnung	211
6.2.2 Integral und Flächeninhalt	213
6.2.3 Integrationsregeln	221
6.3 Integralfunktionen	222

Kapitel 7

7. Lineare Optimierung	228
7.1 Formulierung eines linearen Modells	228
7.2 Bestimmung der Optimallösung	232
7.2.1 Graphische Lösung	232
7.2.2 Simplex-Algorithmus	237
7.3 Dualität	247
7.4 Optimierung unter Gleichheitsbedingungen	250
7.4.1 Einsetzmethode	251
7.4.2 Lagrange-Verfahren	252

Literaturverzeichnis	255
-----------------------------	-----

Stichwortverzeichnis	257
-----------------------------	-----

Kapitel 1

1. Logik und Mengenlehre

1.1 Aussagenlogik

1.1.1 Aussagen

1.1.2 Verknüpfung von Aussagen

1.2 Mengenlehre

1.2.1 Mengenbeziehungen

1.2.2 Mengenoperationen

1.2.3 Produktmengen

1.2.4 Zahlenmengen

1. Logik und Mengenlehre

1.1 Aussagenlogik

1.1.1 Aussagen

Logik Das mathematische Modellieren wirtschaftswissenschaftlicher Fragestellungen hat viel mit **Logik** zu tun. Logisches Denken bedeutet, vernünftige Schlüsse aus bestimmten Sachverhalten zu ziehen. Da vernünftiges Handeln situationsabhängig und subjektiv ist, ist die Logik traditionell ein Teilgebiet der Philosophie. In den für Wirtschaftswissenschaftler relevanten Teilgebieten der Mathematik spielt die **Aussagenlogik** eine besondere Rolle, z. B. bei der Zusammenfassung von Objekten (Mengenlehre), beim Auflösen von Gleichungen (Algebra), bei der Untersuchung von Funktionen (Analysis) oder beim Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten (Stochastik).

Aussage Wie der Name schon sagt, werden in dieser Denklehre Aussagen formuliert, die logisch überprüft und entweder verifiziert oder falsifiziert werden können. Eine **Aussage** A ist die Beschreibung eines Sachverhalts, dessen Wahrheitsgehalt eindeutig bestimmbar ist. A kann wahr (w) oder falsch (f) sein. Der Sachverhalt wird meist verbal in Form eines Satzes beschrieben, kann aber auch rein mathematisch durch Gleichungen oder Ungleichungen angegeben werden. Eine Aussage kann nicht gleichzeitig wahr oder falsch sein. Keine Aussagen im Sinne der Definition sind Ausdrücke, deren Wahrheitsgehalt nicht eindeutig feststellbar ist, oder Fragen. Eine Aussage, deren Wahrheitsgehalt (noch) nicht bekannt ist, heißt Vermutung.

Beispiel

Es werden die Aussagen A , B , C , D betrachtet.

A : Fixkosten entstehen unabhängig von der Ausbringungsmenge. (w)

B : Die Normalverteilung ist eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung. (f)

C : $1 + 1 = 2$ (w)

D : $3 < 2$ (f)

Variable A und B sind verbale, C und D mathematische Aussagen. Häufig werden mathematische Aussagen durch die Verwendung von Variablen allgemeingültiger formuliert (vgl. Wolik, 2015, S. 1). Eine **Variable** ist ein Platzhalter in einem logischen oder mathematischen Ausdruck. Früher dienten Wörter oder Symbole als Variablen, heute verwendet man hierfür in der Regel Buchstaben – insbesondere die Groß- und Kleinbuchstaben am Ende des Alphabets ($\dots$, x , y , z). Dagegen stehen

die Buchstaben am Anfang des Alphabets ($a, b, c, \dots$) meist für beliebige Zahlen und diejenigen in der Mitte ($\dots, i, j, k, \dots$) werden üblicherweise als natürliche Zahlen zum Abzählen und in Indizes verwendet. Eine **Aussageform** ist ein Sachverhalt, der mindestens eine Variable enthält und durch Einsetzen geeigneter Begriffe anstelle des Platzhalters zu einer Aussage führt.

Beispiel

Der Ausdruck „ $n < 10$ “ führt erst durch das Besetzen der Variable n mit konkreten Zahlenwerten zu einer Aussage. Dabei interessieren vor allem die Werte, die diesen Ausdruck zu einer wahren Aussage machen, beispielsweise die Zahl 5.

Jede Aussage A lässt sich durch das Wort „nicht“ verneinen, wodurch ihr Wahrheitswert umgekehrt wird. Eine verneinte Aussage heißt **Negation**. Die Schreibweise für eine Negation lautet $\neg A$ (lies: nicht A). Statt $\neg A$ wird in der Mengenlehre auch die Schreibweise $\bar{A}$ (Komplement zu A) verwendet.

Negation

Mit einer **Wahrheitstafel** wird festgelegt, in welcher Weise die Wahrheitswerte von logischen Aussagen bestimmt sind. Die Wahrheitstafel der Negation sieht wie folgt aus:

Wahrheitstafel

A	w	f
$\neg A$	f	w

Die Negation einer Aussage ist also immer dann wahr, wenn die Aussage falsch ist, und immer dann falsch, wenn die Aussage wahr ist.

Beispiel

Es werden die Aussagen A, B, C, D aus dem obigen Beispiel betrachtet.

$\neg A$: Fixkosten entstehen abhängig von der Ausbringungsmenge. (f)

$\neg B$: Die Normalverteilung ist keine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung. (w)

$\neg C$: $1 + 1 \neq 2$ (f)

$\neg D$: $3 \geq 2$ (w)

Die doppelte Negation einer Aussage führt wieder zur ursprünglichen Aussage.

1.1.2 Verknüpfung von Aussagen

Aussagen-
verbindung Durch eine Verknüpfung von mehreren Teilaussagen entstehen neue Aussagen, die mit Bindewörtern wie „und“, „oder“, „genau dann, wenn“ usw. zusammengesetzt sind. Diese sogenannten **Aussagenverbindungen** lassen sich wiederum auf ihren Wahrheitsgehalt überprüfen. Man unterscheidet die Verknüpfungen Konjunktion, Disjunktion, Implikation und Äquivalenz, die im Folgenden für zwei Aussagen A, B dargestellt werden.

Konjunktion
(Und-Verbindung) Eine Und-Aussagenverbindung heißt **Konjunktion**. Die Schreibweise für eine Konjunktion lautet $A \wedge B$ (lies: A und B). Die Konjunktion zweier Aussagen A, B ist streng, d. h. $A \wedge B$ ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind. Andernfalls ist $A \wedge B$ falsch, wie die Wahrheitstafel zeigt.

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \wedge B$	w	f	f	f

Beispiel

A : Produkt 1 ist defekt.
 B : Produkt 2 ist defekt.
 $A \wedge B$: Beide Produkte sind defekt.

Die Aussagen A und B können jeweils wahr oder falsch sein. Sind beide Aussagen wahr, ist auch die Konjunktion wahr und beide Produkte sind defekt. Ist mindestens eine der beiden Aussagen falsch, sind nicht beide Produkte defekt und $A \wedge B$ muss falsch sein.

Disjunktion
(Oder-Verbindung) Eine Oder-Aussagenverbindung heißt **Disjunktion**. Die Schreibweise für eine Disjunktion lautet $A \vee B$ (lies: A oder B). Die Disjunktion zweier Aussagen A, B ist nur dann falsch, wenn beide Aussagen falsch sind. Andernfalls ist $A \vee B$ wahr, wie die Wahrheitstafel der Disjunktion zeigt.

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \vee B$	w	w	w	f

Beispiel

A : Produkt 1 ist defekt.

B : Produkt 2 ist defekt.

$A \vee B$: Mindestens ein Produkt ist defekt.

Angenommen, mindestens eine der beiden Aussagen A , B ist wahr, dann ist auch $A \vee B$ wahr. Sind beide Produkte funktionstüchtig, ist nicht mindestens ein Produkt defekt, und die Disjunktion ist falsch.

Die logische Oder-Verbindung wird auch als nicht-ausschließende Disjunktion bzw. **Adjunktion** bezeichnet. Sie unterscheidet sich damit von der umgangssprachlichen Bedeutung, die häufig ausschließenden Charakter hat. Wenn Sie beispielsweise eine Urlaubsreise machen wollen, ist Ihre Wahl des Verkehrsmittels ausschließend gemeint: Entweder ich nehme das Auto oder die Bahn. Das adjunktive „Oder“ schließt dagegen das „Und“ ein: Entweder ich fahre mit dem Auto oder mit der Bahn oder nutze eine Kombination aus beiden Verkehrsmitteln.

Adjunktion

Eine Wenn-Dann-Aussagenverbindung heißt **Implikation**. Die Schreibweise für eine Implikation lautet $A \Rightarrow B$ (lies: wenn A , dann B). Für eine Implikation $A \Rightarrow B$ sagt man auch (vgl. *Arrenberg et al., 2021, S. 37*):

Implikation

- aus A folgt B ,
- A impliziert B ,
- A ist hinreichend für B oder
- B ist notwendig für A .

Die Aussage „ B ist notwendig für A “ bedeutet, dass aus A der Schluss B folgt. Gilt beispielsweise die Aussage A „Es regnet.“, dann ist notwendigerweise auch die Aussage B „Die Erde wird nass.“ richtig. Die Aussage A heißt dabei **Prämisse** (Voraussetzung) und die Aussage B **Konklusion** (Schlussfolgerung). Die Implikation zweier Aussagen A , B ist nur dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist. In allen anderen Fällen ist $A \Rightarrow B$ wahr. Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist also immer dann wahr, wenn der Fall „ A wahr und B falsch“ nicht auftreten kann, wie die Wahrheitstafel der Implikation zeigt.

Prämisse,
Konklusion

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Rightarrow B$	w	f	w	w

Beispiel

A: Ich bin über 18 Jahre alt.
B: Ich bin volljährig.

$A \Rightarrow B$: Wenn ich über 18 Jahre alt bin, dann bin ich volljährig. Falls man noch nicht 18 Jahre alt ist, ist man nach deutschem Recht nicht volljährig, sodass der Fall „A wahr und B falsch“ hier gar nicht auftreten kann.

Verständnis-
probleme

Mitunter bereitet die Implikation Verständnisprobleme, falls A falsch ist. Man kann nämlich aus einer falschen Aussage alles Mögliche folgern. Folgendes Beispiel zeigt, dass $A \Rightarrow B$ auch wahr sein kann, wenn A falsch und B wahr ist (vgl. *Arrenberg et al., 2021, S. 36 f.*).

Beispiel

A: Die natürliche Zahl n lässt sich ohne Rest durch 4 teilen.
B: Die natürliche Zahl n lässt sich ohne Rest durch 2 teilen.

$A \Rightarrow B$: Wenn n ohne Rest durch 4 teilbar ist, dann lässt sich n auch ohne Rest durch 2 teilen.

n	4, 8, 12, ...	2, 6, 10, ...	1, 3, 5, ...
A	w	f	f
B	w	w	f
$A \Rightarrow B$	w	w	w

Da es keine natürliche Zahl gibt, die zwar durch 4, aber nicht durch 2 teilbar ist, existiert der Fall „A wahr und B falsch“ nicht. Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist immer wahr, auch wenn A falsch ist.

Äquivalenz

Eine wechselseitige Implikation heißt **Äquivalenz**. Die Schreibweise für eine Äquivalenz lautet $A \Leftrightarrow B$ (lies: A gleichwertig B). Die Äquivalenz ist erfüllt, wenn beide Aussagen identische Wahrheitswerte haben, also entweder A und B wahr oder beide falsch sind. Andernfalls ist $A \Leftrightarrow B$ falsch. Bei Äquivalenz ist B nicht nur notwendige, sondern

auch hinreichende Bedingung für A , und die Implikation gilt in beide Richtungen.

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Leftrightarrow B$	w	f	f	w

Beispiel

Der Deckungsbeitrag zur Begleichung der Fixkosten eines Unternehmens ist die Differenz zwischen den erzielten Umsatzerlösen und den variablen Kosten.

A : Der Deckungsbeitrag ist positiv.

B : Die Umsatzerlöse sind größer als die variablen Kosten.

Die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ ist wahr, weil entweder beide Aussagen wahr oder beide Aussagen falsch sind.

Die nachfolgende Tabelle zeigt mögliche Aussagenverbindungen und deren Wahrheitsgehalt im Überblick.

Aussagenverbindungen im Überblick

Aussagenverbindung		A	w	w	f	f
		B	w	f	w	f
Konjunktion	A und B	$A \wedge B$	w	f	f	f
Disjunktion	A oder B	$A \vee B$	w	w	w	f
Implikation	wenn A , dann B	$A \Rightarrow B$	w	f	w	w
Äquivalenz	A gleichwertig B	$A \Leftrightarrow B$	w	f	f	w

1.2 Mengenlehre

1.2.1 Mengenbeziehungen

Die **Mengenlehre** ist ein Teilgebiet der Mathematik, das von dem deutschen Mathematiker *Georg Cantor* (1845 - 1918) begründet wurde und sich mit der Zusammenfassung von Objekten beschäftigt. Da sich die meisten mathematischen Objekte, die in der Algebra, Analysis oder Stochastik behandelt werden, als Mengen definieren lassen, hat die Mengenlehre auch in der Wirtschaftsmathematik eine grundlegende Bedeutung. *Cantor* definierte den Mengenbegriff wie folgt (vgl. *Merz/Wüthrich, 2013, S. 32*):

Mengenbegriff

Eine **Menge** M ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterscheidbaren Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Elemente Die Objekte der Menge heißen **Elemente**, und man schreibt $a \in M$, falls a ein Element der Menge M ist und $a \notin M$, falls a kein Element der Menge M ist. Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dass ein und dasselbe Objekt nicht zweimal in derselben Menge vorkommen kann und eindeutig feststeht, ob ein Objekt zur Menge gehört oder nicht. Die Mengendefinition ist sehr allgemein gehalten und beschränkt sich nicht auf die Zusammenfassung von Dingen, sondern erlaubt auch die Bildung von Mengen abstrakter Konstrukte wie beispielsweise Zahlen. Bei der Zusammenfassung der Elemente kommt es nicht auf die Reihenfolge an, wohl aber auf deren Unterscheidbarkeit. Es ergibt keinen Sinn, identische Objekte zu einer Menge zusammenzufassen.

Arten von Mengen Die **Mächtigkeit** gibt die Anzahl der Elemente einer Menge an und wird mit $|M| = m$ bezeichnet. **Endliche Mengen** bestehen aus einer begrenzten Anzahl Objekten, was bei **unendlichen Mengen** nicht der Fall ist. So ist die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ eine unendliche Menge, da sie nach oben nicht begrenzt ist. Zur Beschreibung einer Menge werden geschweifte Mengenklammern genutzt. Für eine **leere Menge**, die kein Element enthält, wird das Zeichen $\emptyset$ oder einfach $\{ \}$ geschrieben. Häufig wird bei einer Anwendung der Mengenlehre auf eine konkrete Fragestellung eine **Grundmenge** angegeben, die definitionsgemäß alle in der Problemstellung vorkommenden Mengen enthält und mit dem griechischen Großbuchstaben Ω bezeichnet wird.

Mengenangabe Eine Menge kann auf zwei Arten angegeben werden (vgl. *Walter, 2013, S. 11*):

- **Aufzählende Mengenangabe:** Sämtliche Elemente der Menge werden aufgezählt. Dazu schreibt man alle Elemente, durch Kommata getrennt, auf und schließt sie in geschweifte Klammern ein. Die Menge aller Vokalbuchstaben der deutschen Sprache wird z. B. mit $M := \{a, ä, e, i, o, ö, u, ü, y\}$ beschrieben. Das Symbol $:=$ bedeutet „ist definiert als“. Links neben der Definitionsgleichung steht die Bezeichnung für das, was rechts davon aufgezählt oder beschrieben ist. Eine Aufzählung bietet sich vor allem bei endlichen Mengen an. Unendliche Mengen können zwar auch aufzählend angegeben werden, indem man weitere Elemente durch drei Punkte andeutet. Dann muss aber klar sein, wie die weiteren Elemente der Menge heißen. So kann die Menge aller positiven Quadratzahlen mit $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$ notiert werden.
- **Beschreibende Mengenangabe:** Die Menge wird durch eine Eigenschaft beschrieben, die nur die Elemente dieser Menge haben sollen. Ist M eine derart beschriebene Menge, schreibt man kurz $M := \{x \mid x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$. In der Klammer steht links der

Senkrechten eine allgemein geforderte Eigenschaft, rechts davon eine Spezifizierung. Die möglichen Augenzahlen eines Würfels sind beispielsweise durch $M := \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6\}$ beschrieben. Die Augenzahl soll ein Element der natürlichen Zahlen und kleiner oder gleich Sechs sein.

Mengen können gleich oder verschieden sein. Zwei Mengen A, B sind in einem gegebenen Grundbereich **gleich**, kurz $A = B$, wenn jedes Element der Menge A auch Element der Menge B ist und umgekehrt. Die Schreibweise für zwei nicht gleiche Mengen A, B lautet $A \neq B$.

Gleichheit
von Mengen

Beispiel

$\Omega :=$ Augenzahl eines Würfels, $A := \{1, 3, 5\}$, $B :=$ ungerade Augenzahl, $C := \{1, 6\}$

$$A = B, A \neq C, B \neq C$$

Ein Vergleich zweier Mengen kann auch ergeben, dass eine dieser Mengen eine Untermenge der anderen ist. A ist eine **Teilmenge** von B , wenn jedes Element von A auch Element von B ist, kurz $A \subseteq B$ (lies: A ist Teilmenge von B). Dann ist gleichzeitig B eine **Obermenge** von A , kurz $B \supseteq A$ (lies: B ist Obermenge von A). In dieser Definition ist auch der Fall $A = B$ eingeschlossen. Wenn B Elemente einschließt, die nicht in A enthalten sind, so ist A eine **echte Teilmenge** von B . Dann schreibt man kurz $A \subset B$ bzw. $B \supset A$.

Teilmenge,
Obermenge

Die Menge aller Teilmengen einer Menge M heißt **Potenzmenge** und wird mit $\mathcal{P}(M)$ bezeichnet. Für eine endliche Menge mit der Mächtigkeit $|M| = m$ gilt:

Potenzmenge

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^m \quad (1.1)$$

Beispiel

$$A := \{1, 3, 5\}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, A\}$$

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^3 = 8$$

1.2.2 Mengenoperationen

Mengenoperationen verknüpfen Mengen zu neuen Mengen mit bestimmten Eigenschaften. Das Ergebnis einer Mengenoperation ist die logische Verknüpfung der Elemente der Ausgangsmengen. Im Folgenden werden die Operationen Komplement, Vereinigung, Durchschnitt und Differenz betrachtet.

Komplementärmenge Gegeben seien eine Grundmenge Ω und eine Teilmenge A von Ω mit $A \subseteq \Omega$. Die Menge aller Elemente, die in Ω , aber nicht in A enthalten sind, heißt **Komplementärmenge** von A bezüglich Ω und wird mit $\neg A$ bezeichnet (lies: nicht A). Das Komplement $\neg A$ ist das Ergebnis der logischen Negation der Mengenelemente von A . Es wird auch mit dem Symbol $\bar{A}$ bezeichnet. Man beachte, dass das Komplement einer Menge entscheidend von der Grundmenge Ω abhängt. Deshalb wird auch $\bar{A}^\Omega$ geschrieben.

Vereinigungsmenge Die **Vereinigung** zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die mindestens einer der beiden Mengen A oder B angehören. Man schreibt kurz: $A \cup B$ (lies: A oder B); $A \cup B$ ist das Ergebnis der logischen Adjunktion der Mengenelemente von A und B .

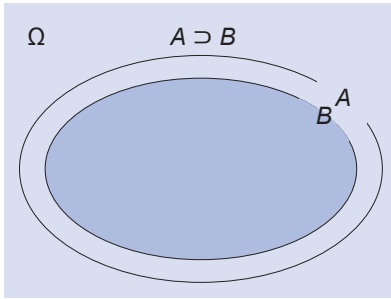
Schnittmenge Der **Durchschnitt** zweier Mengen A und B , kurz $A \cap B$ (lies: A und B), ist die Menge aller Elemente, die sowohl A als auch B angehören. $A \cap B$ ist das Ergebnis der logischen Konjunktion der Mengenelemente von A und B . Gilt $A \cap B = \emptyset$, ist die Schnittmenge leer. Dann heißen die Mengen A und B **disjunkt** (fremd zueinander).

Differenzmenge Die **Differenz** zweier Mengen A und B , kurz $A \setminus B$ (lies: A ohne B), ist die Menge aller Elemente von A , die nicht zu B gehören. $A \setminus B$ ist das Komplement von B in Bezug auf A , kurz $\neg B^A$. Sie ist nicht kommutativ, d. h. im Allgemeinen gilt $A \setminus B \neq B \setminus A$. Wenn $A \subset B$, dann gilt $B \setminus A = \neg A^B$.

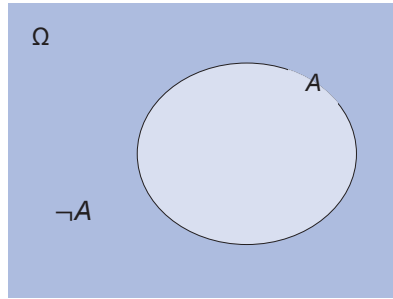
Symmetrische Differenz Die **symmetrische Differenz** zweier Mengen A und B , kurz $A \Delta B$ (lies: A symmetrisch zu B), ist die Menge aller Elemente, die in genau einer der Mengen A und B enthalten sind.

Venn-Diagramm Zur Veranschaulichung werden Mengen und deren Beziehungen zueinander häufig in einem **Venn-Diagramm** dargestellt (vgl. Abbildung 1-1). In dieser nach *John Venn* (1834 - 1923) benannten Graphik werden die Elemente in Kreisen oder Ellipsen einzeln aufgeschrieben, sodass alle möglichen Beziehungen der vertretenen Mengen abgebildet sind. Die Kreise oder Ellipsen befinden sich in einem Rechteck, das sinnbildlich für den Raum aller Mengen Ω steht. Venn-Diagramme werden allerdings mit zunehmender Anzahl Mengen oder Elemente rasch unübersichtlich, sodass sie üblicherweise für die Darstellung von höchstens drei Mengen verwendet werden.

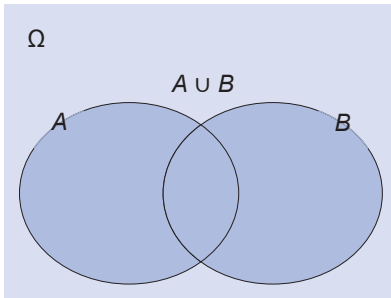
Echte Teilmenge



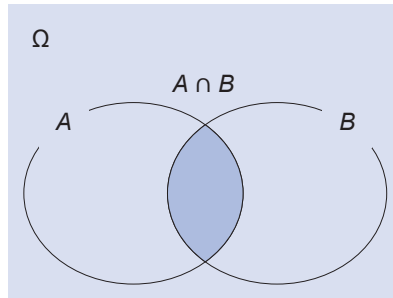
Komplementärmenge



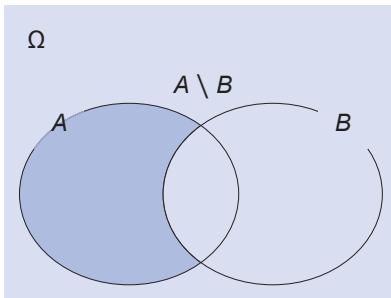
Vereinigungsmenge



Schnittmenge



Differenzmenge



Symmetrische Differenzmenge

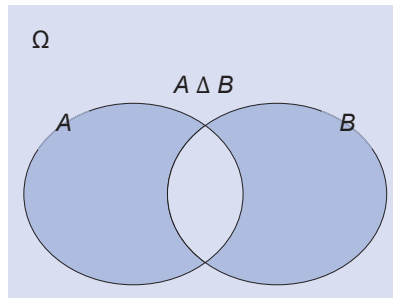
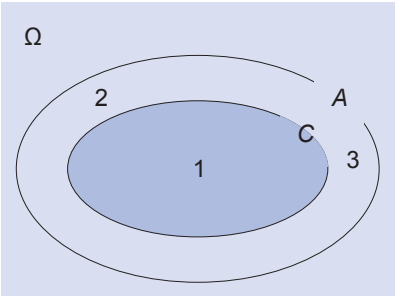


Abb. 1-1: Mengenbeziehungen im Venn-Diagramm

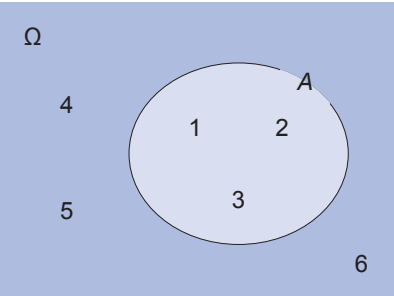
Beispiel

$\Omega :=$ Augenzahl eines Würfels, $A := \{1, 2, 3\}$, $B :=$ ungerade Augenzahl, $C := \{1\}$

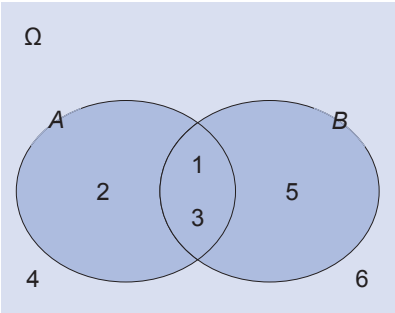
$A \supset C$



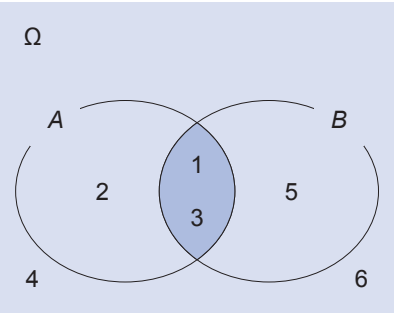
$\neg A := \{4, 5, 6\}$



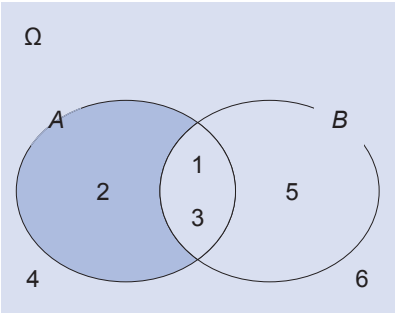
$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$



$A \cap B = \{1, 3\}$



$A \setminus B = \{2\}$



$A \Delta B = \{2, 5\}$

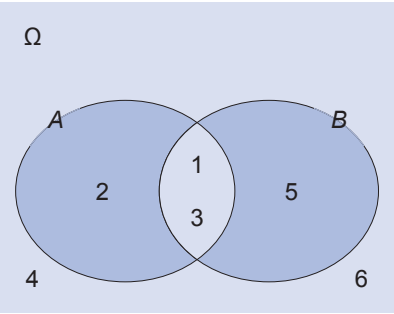


Abb. 1-2: Beispiele für Mengenbeziehungen

A, B, C seien beliebige Mengen. Dann gelten nachfolgende **Rechenregeln für Mengenoperationen**:

Idempotenzgesetz	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Kommutativgesetz	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Assoziativgesetz	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributivgesetz	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Regeln von De Morgan	$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$ $\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$

Rechenregeln für
Mengenoperationen

Die Mengenoperationen sollen abschließend an einem praktischen Beispiel mit drei Mengen erläutert werden.

Beispiel

Eine Umfrage unter den 120 Teilnehmern einer internationalen Konferenz, welche der Sprachen Deutsch, Französisch bzw. Englisch sie fließend beherrschen, ergab folgende Antworten:

- 60 Teilnehmer sprechen Deutsch
- 40 Teilnehmer sprechen Französisch
- 90 Teilnehmer sprechen Englisch
- 10 Teilnehmer sprechen alle drei Sprachen
- 30 Teilnehmer sprechen Französisch und Englisch
- 15 Teilnehmer sprechen Deutsch und Französisch
- 15 Teilnehmer sprechen nur Deutsch.

Der Veranstalter möchte für die Organisation der Konferenz wissen, wie viele Teilnehmer nur Englisch bzw. keine der drei Sprachen sprechen.

Abbildung 1-3 stellt die Situation im Venn-Diagramm dar:

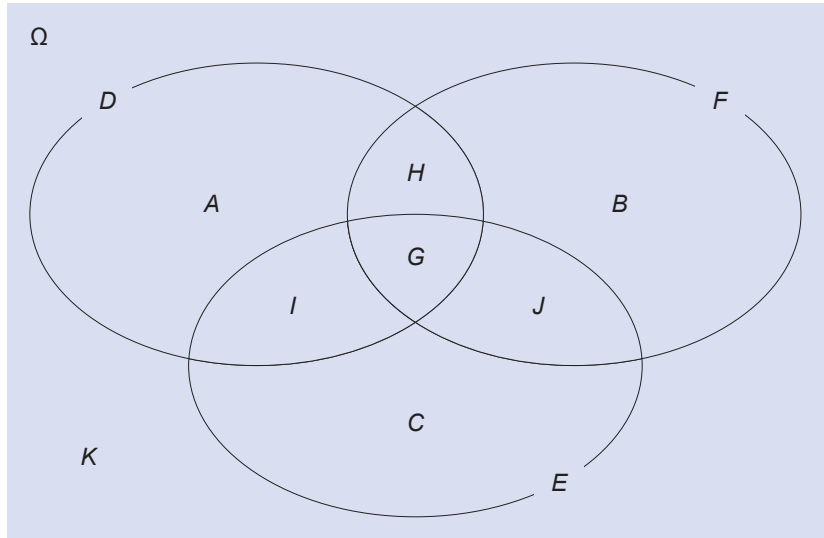


Abb. 1-3: Venn-Diagramm disjunkter Mengen A bis K

Dabei bezeichnet:

Ω := Grundmenge der 120 Konferenzteilnehmer

D := $\{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ spricht Deutsch}\}$

E := $\{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ spricht Englisch}\}$

F := $\{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ spricht Französisch}\}$

Die disjunkten Teilmengen seien A, B, C, G, H, I, J . Die Mächtigkeit der Mengen sei mit entsprechenden Kleinbuchstaben bezeichnet. Die Umfrageergebnisse ergeben folgende Zahlenwerte:

$$|D| = a + g + h + i = 60$$

$$|F| = b + g + h + j = 40$$

$$|E| = c + g + i + j = 90$$

$$|G| = g = 10$$

$$|F \cap E| = g + j = 30$$

$$|D \cap F| = g + h = 15$$

$$|A| = a = 15$$

$$|\Omega| = a + b + c + g + h + i + j + k = 120$$