Thomas Wassong
Daniel Frischemeier
Pascal R. Fischer
Reinhard Hochmuth
Peter Bender *Hrsg.*

Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen

Using Tools for Learning Mathematics and Statistics

Springer Spektrum

Thomas Wassong
Daniel Frischemeier
Pascal R. Fischer
Reinhard Hochmuth
Peter Bender *Hrsg.*

Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen

Using Tools for Learning Mathematics and Statistics

Springer Spektrum

Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen – Using Tools for Learning Mathematics and Statistics

Thomas Wassong · Daniel Frischemeier ·
Pascal R. Fischer · Reinhard Hochmuth ·
Peter Bender
Herausgeber

Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen – Using Tools for Learning Mathematics and Statistics

Springer Spektrum

Herausgeber

Thomas Wassong
Universität Paderborn, Deutschland
wassong@math.upb.de

Prof. Dr. Reinhard Hochmuth
Leuphana Universität Lüneburg, Deutschland
reinhard.hochmuth@leuphana.de

Daniel Frischemeier
Universität Paderborn, Deutschland
dafr@math.upb.de

Prof. Dr. Peter Bender
Universität Paderborn, Deutschland
bender@math.upb.de

Dr. Pascal R. Fischer
Universität Kassel, Deutschland
fischer@uni-kassel.de

ISBN 978-3-658-03103-9 ISBN 978-3-658-03104-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-03104-6

Primary 97-02
Secondary 97U70, 97K70, 97U50, 97K60, 97U30, 97C70, 97D70, 97D20, 97D40, 97D50, 97D60, 97K80, 97M10

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum
© Springer Fachmedien Wiesbaden 2014
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Planung und Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Barbara Gerlach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Vorwort

„Der beste Weg, die Zukunft vorauszusagen, ist, sie zu gestalten." Dieser Satz, der Willy Brandt zugeschrieben wird, ist mir durch den Kopf gegangen, als ich von meinem Kollegen und Freund Rolf Biehler das erste Mal das Wort „pro-aktiv" hörte. In vielfältigen Zusammenhängen habe ich in den zurückliegenden sieben Jahren eine Ahnung davon bekommen, was Rolf Biehler damit meinen könnte: einmal erkannte Probleme sach- und zielorientiert anzugehen, mit langem Atem und, da dies die Lösung eines Problems nicht selten verlangt, nach Möglichkeit in Kooperation. Die Beiträge im vorliegenden Band belegen, dass Rolf Biehler damit bemerkenswert erfolgreich war: In der Regel bereits zu einem frühen Zeitpunkt, dann, wenn sich neue Perspektiven und Möglichkeiten oder eben auch Problemlagen erst anzudeuten begannen, wurde (und wird) Rolf Biehler aktiv und gestaltete (und gestaltet) Entwicklungen entscheidend mit.

Dies trifft seit den 80er Jahren insbesondere auf Fragen zur Verwendung von Computerwerkzeugen beim Lernen der Stochastik in der Schule, der universitären Ausbildung und insbesondere auch in der Lehrerbildung zu. Dabei ist der Fokus in erster Linie nicht auf ein reines Anwenden von Werkzeugen gerichtet. Im Kern geht es in aller Regel um die klassische mathematikdidaktische Frage nach dem Lernen grundlegender mathematischer Konzepte und Ideen. Wie können die neuen Möglichkeiten genutzt werden, um das Verständnis von Lernenden im Hinblick darauf zu fördern und Lernbemühungen zu unterstützen? Wie kann man erreichen, dass sich die Lernenden Mathematik so aneignen, dass sie darüber im Sinne ihrer Lebensinteressen, und das umschließt nicht nur materielle, verfügen können? Dabei geht es (auch) um konkrete Fragen der Visualisierung komplexer mathematischer Konzepte sowie insbesondere des Experimentierens mit stochastischen Methoden und des Explorierens von Daten. So hat Rolf Biehler in diesem Bereich wesentlich dazu beigetragen, didaktische Potenziale neuer technischer Möglichkeiten zu heben, diese auszuloten und für das Handeln Lehrender zugänglich zu machen. Makar und Confrey weisen in ihrem Beitrag darauf hin, dass es dafür nicht ausreichte, neue Aufgaben zu erfinden, sondern dass dies auch eine neue Art und Weise statistischen Denkens und eines Denkens über Statistik erforderte. Mit anderen Worten: In der Analyse und Bewältigung der „concept-tool gaps" geht es nicht nur um die Bewertung und Ausgestaltung der „tools", sondern eben auch um die „concepts".

Ohne dieses wichtige Thema aus dem Auge zu verlieren, nahm Rolf Biehler in den letzten zehn Jahren Projekte, die im Bereich des Übergangs Schule-Hochschule angesiedelt sind, stärker in den Fokus. Bezogen auf diesen Übergang haben sich in dieser Zeit nicht nur in Deutschland eine Reihe von Randbedingungen stark verändert: In den Schulen geht es nun um andere mathematische Inhalte und Kompetenzen. Ein größerer Anteil eines Jahrgangs kommt an die Universitäten und möchte studieren. Viele Studierende treten ohne Abitur in die akademische Welt ein. Rolf Biehler hat früh erkannt, dass die Hochschulen hier aktiv werden müssen und dass Erstsemester mit den veränderten Bedingungen nicht alleine gelassen werden dürfen. Dabei geht es ihm nicht um ein schlichtes „Anpassen an“ oder „sich Fügen in“ Veränderungen an Schulen oder Hochschulen im Kontext des Bologna-Prozesses, die eigentlich teilweise kritisiert oder zumindest diskutiert werden müssten, sondern in erster Linie um deren Gestaltung sozusagen im „Hier und Jetzt“ im Interesse derjenigen, die mit Hoffnungen und Erwartungen an die Universitäten kommen und ein Recht darauf haben, in ihren Bemühungen so unterstützt zu werden, dass sie eine Chance haben, die Anforderungen zu erfüllen, sich zu entwickeln und professionelle Handlungsfähigkeit zu erlangen.

Auch diese Bemühungen erfolgten nicht im stillen akademischen „Kämmerchen“: Materialien und Maßnahmen zur Unterstützung der Studierenden wurden in enger Kooperation mit zahlreichen Beteiligten entwickelt, und von Beginn an wurden nahezu alle mathematikhaltigen Studiengänge in den Blick genommen. Mit relativ geringen Mitteln wurde so ein Prozess gestartet, der bis zum aktuellen bundesweit wahrgenommenen Projekt VEMINT und letztlich dann auch zum Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik (khdm) geführt hat. Zweifellos war zu Beginn im Jahr 2003 nicht abzusehen, dass es 2013 eine vom khdm organisierte bundesweite Tagung mit nahezu 300 Teilnehmern/innen zur Übergangsproblematik Schule/Hochschule geben würde.

In den letzten zwei Jahren ist noch ein weiterer bedeutender und großer Schwerpunkt von bundesweiter Bedeutung mit dem Fokus Lehrerfortbildung hinzugekommen: Der Auf- und Ausbau des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik (DZLM). Auch hier stehen konkrete Problemlagen im Fokus wie etwa die Erfordernis der Qualifizierung der zahlreichen Lehrkräfte, die fachfremd Mathematik unterrichten oder die Qualifizierung von Mathematikmoderator/innen.

Die Breite der in dem vorliegenden Band versammelten Beiträge zeigt, dass Rolf Biehler sowohl inhaltlich als auch personell in der gesamten Mathematikdidaktik zu Hause ist, und dies national wie international. Neben dem bereits erwähnten Charakter des Visionären betonen einige Beiträge die große Ernsthaftigkeit der Bemühungen, die immer wieder dazu führt, dass Problemlagen zunächst einmal genauer beschrieben und analysiert werden, statt schnelle und dann häufig nur einem ersten kritischen Blick standhaltende scheinbar endgültige Antworten zu produzieren.

Überhaupt: Müsste man die Frage beantworten, welche kurze Formulierung Rolf Biehlers Bemühungen geeignet zusammenfassen würde, so könnte dies der Ausbau der „Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline“ sein. Aus den wenigen Bemerkungen ist sicher schon deutlich geworden, dass damit kein Rückzug in den sog. universitären Elfenbeinturm angesprochen ist, sondern gewissermaßen im Gegenteil die feste Überzeugung, dass sich „Wissenschaftlichkeit“ und das Anliegen, das Lernen von Schülern/innen, Studierenden und Lehrkräften konkret zu unterstützen, nicht nur vertragen, sondern insbesondere in der heutigen Zeit wechselseitig voraussetzen und erst in einem Miteinander wirklich produktiv werden können. Es entspricht dem Naturell von Rolf Biehler, dabei den unvermeidlich auftretenden Unsicherheiten und Widersprüchen nicht aus dem Weg zu gehen, sondern in der Arbeit mit anderen fruchtbar werden zu lassen. Vielleicht ist dies „das“ oder zumindest „ein“ Geheimnis des großen Erfolges von Rolf Biehler.

Es war für uns eine große Freude zu erleben, wie viele nationale und internationale Kollegen/innen sich spontan bereit erklärt haben, einen wissenschaftlichen Beitrag zu diesem Band zu liefern. Dabei entstand folgende breite Palette von Themen:

I. Didaktik der Mathematik – Didactics of Mathematics
II. Modellieren mit Funktionen – Modeling with Functions
III. Didaktik der Stochastik – Didactics of Statistics
IV. Stochastik in der schulischen Ausbildung – Statistics in School
V. Stochastik in der Lehrerbildung – Statistics in Teacher Education
VI. Stochastik in der universitären Ausbildung – Statistics in Higher Education
VII. Hochschuldidaktik der Mathematik – University mathematics education

Wir meinen, dass eine interessante und lesenswerte Mischung aus Beiträgen von international renommierten Experten/innen und im engeren Sinne „jungen“ Schülern/innen von Rolf Biehler entstanden ist, so dass dieser Band über den konkreten Anlass hinaus einen guten Überblick zu ausgewählten aktuellen Entwicklungs- und Forschungsfragen der Mathematikdidaktik liefert und damit einen Gewinn für die mathematikdidaktische Community darstellt. Das wäre unseres Erachtens zumindest ganz im Sinne von Rolf Biehler.

Reinhard Hochmuth im Namen der Herausgeber

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1
Abstrakte Mathematik und Computer

Willi Dörfler

Universität Klagenfurt

Abstract Jede Philosophie der Mathematik muss sich mit dem Phänomen befassen, dass es sehr erfolgreich und effizient möglich ist am beziehungsweise mit dem Computer, ausgestattet mit geeigneter Software, mathematische Tätigkeiten durchzuführen. Diese Problematik betrifft vor allem den ontologischen und auch epistemologischen Status der mathematischen Objekte. Werden diese als abstrakte (Platonismus) oder mentale (Intuitionismus) Objekte interpretiert, so entsteht eine schwer auflösbare Spannung zur Materialisierung der Mathematik am Computer. Ein semiotischer Fokus auf die Zeichenebene und das regelgeleitete Operieren mit Zeichen und Symbolen wie bei Peirce und Wittgenstein scheint demgegenüber eine rationale Erklärung einer Mathematik am Computer zu ermöglichen. Die Auflösung des Spannungsverhältnisses zwischen Abstraktheit und Computer erfolgt damit dadurch, dass die artifizielle Trennung zwischen mathematischer Tätigkeit und ihren Gegenständen und deren fehlende Vermittlung in einem integrativen und holistischen Ansatz überwunden werden.

Zugang zum Abstrakten

Im allgemeinen Verständnis gilt Mathematik als die abstrakteste Wissenschaft. Wenn auch die Bedeutung des Begriffes „abstrakt“ eher vage ist, so ist damit jedenfalls verbunden, dass Abstraktes den Sinnen nicht oder nicht direkt zugänglich ist. Vielleicht auch aus diesem Grund hat „abstrakt“ jedenfalls für die Mathematik die Konnotation „schwierig“. Die Mathematik handelt ja von vielen abstrakten Objekten wie da sind: Mengen, Zahlen, Funktionen, geometrische Figuren, diverse Räume, etc. Damit die Mathematik etwas über diese abstrakten, den Sinnen nicht zugänglichen Objekte aussagen kann, bedienen sich die Mathematiker sogenannter Darstellungen oder Repräsentationen der mathematischen Objekte. Diese spielen dann insbesondere in der Didaktik und Methodik des Mathematikunterrichts eine große Rolle: mit ihrer Hilfe sollen die Lernenden Wissen über die anders ja nicht zugänglichen mathematischen Gegenstände erwerben oder entwickeln. Diese Darstellungen sind klarerweise sinnlich wahrnehmbar und am Papier oder am Bildschirm als Graphen, Diagramme, Formeln oder Zeichnungen auch manipulierbar durch Rechnen, Konstruieren, Umformen u.a. Interessanterweise wird durch diese „Versinnlichung“ oder Materialisierung die Sichtweise des abs-

T. Wassong et al. (Hrsg.), *Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen – Using Tools for Learning Mathematics and Statistics*,
DOI 10.1007/978-3-658-03104-6_1, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

trakten Charakters der Mathematik nicht beeinträchtigt, wahrscheinlich vor allem deswegen, weil die Darstellungen weiterhin bloß als Verweis, als eine Art von (relationalen) Bildern, auf die eigentlichen mathematischen Objekte und Gegenstände aufgefasst werden. Die Darstellungen sind in diesem Sinne nur ein Hilfsmittel, ein sinnlicher Weg ins (vorgegebene) Abstrakte. Bei dieser epistemologischen und didaktischen Sicht bleibt es meines Erachtens aber vollkommen unklar, wie die Darstellungen die ihnen zugeschriebene Rolle erfüllen können, also wie sie den kategorialen Unterschied zum Abstrakten überbrücken können. Insbesondere stellt sich die Frage, woher die Mathematiker oder Didaktiker wissen, dass sie die „richtige" Darstellung für ein mathematisches, also abstraktes Objekt gewählt haben. Andererseits ist es ein eher mystischer Prozess, in dem Lernende abstrakte Objekte erfassen, begreifen und verstehen sollen, besonders wenn man noch meint, dass diesen eine mentale oder sogenannte interne Repräsentation entsprechen soll. In der kognitivistisch orientierten Didaktik ist aber genau dies eine grundlegende These oder Annahme.

Computer als mathematisches Werkzeug

Ist wie skizziert die notorische Abstraktheit der Mathematik sowohl ein epistemologisches wie auch ein didaktisches Problem, so ergeben sich aus dieser Interpretation des Charakters der Mathematik auch Fragen und Spannungen im Verhältnis der Mathematik zum Computer. Es muss hier nicht weiter erläutert werden, dass mit den heute verfügbaren Programmen große Teile der Mathematik am Computer ausgeführt werden können. Das gilt für numerische und algebraische Rechnungen und viele andere Kalküle ebenso wie für die Geometrie. Computerprogramme werden eingesetzt in komplexen Beweisen („Vier Farben Satz" der Graphentheorie als prominentes Beispiel), zum Finden von Beweisen in axiomatisch-deduktiven Systemen und selbst zum Entdecken von neuen Sätzen oder Formeln (etwa in der Kombinatorik). Der Computereinsatz in der Katastrophentheorie und in der Theorie der Fraktale ist ebenso gut bekannt. In der Didaktik der Mathematik finden der Computer bzw. geeignete Programme vielfältige Verwendung oder es wird eine solche jedenfalls vorgeschlagen und auch konzipiert. Dabei ist eine Grundidee, dass die oben schon erwähnten Darstellungen am Computer implementiert werden und dadurch die Lernenden eine Lernumgebung angeboten bekommen, in der sie durch Exploration der jeweiligen Darstellungen den erwünschten Zugang zu den abstrakten Objekten und Konzepten der Mathematik erhalten. Am Grundkonzept des Erwerbs abstrakter Begriffe oder Objekte durch die Lernenden ändert sich also beim Computereinsatz eigentlich nichts. Der Computer und seine Software werden als viel leistungsfähigere Mittel zur Ermöglichung dieses Lernprozesses verstanden als dies die klassischen Mittel von Papier und Bleistift sein können. Ob diese Versprechungen auch eingelöst werden, soll trotz berechtigter Skepsis - auch auf Basis der bisherigen praktischen Erfahrungen - hier nicht weiter diskutiert werden. Die von Rolf Biehler für die Statistik entworfenen

Konzepte zur Nutzung des Computers im Lernprozess und auch im Prozess des mathematischen Tuns und Problemlösens (auch in den Anwendungen) stellen dagegen aus meiner Sicht sehr positive Beispiele dar. Beispielhaft seien erwähnt die Arbeiten Biehler (1991; 1993; 1997). Und sie sind dies aus meiner Sicht vor allem deswegen, weil sie nicht oder nicht vordringlich den Darstellungscharakter im Hinblick auf Abstraktes im Auge haben. Etwas oberflächlich ausgedrückt: Biehler verfolgt nicht ein vielleicht gar nicht erreichbares Ziel, sondern nutzt den diagrammatischen (im Sinne von Peirce) Charakter der verwendeten „Darstellungen", die erst in ihrer Verwendung in einer entsprechenden Praxis allgemeine und „abstrakte" Beziehungen und Relationen für die Lernenden quasi erzeugen (dies im Sinne von Krämers „symbolischer Konstitution" mathematischer Objekte, Krämer 1991 und auch 1988). Die epistemologische, kognitive und didaktische Richtung des Entwicklungsprozesses wird gleichsam umgedreht: von den Diagrammen (im Sinne von Peirce) oder traditionell gesprochen von den Darstellungen zu den Abstrakta (erstere als Vorlage und Modell, letztere als Ergebnis). Und zwar werden die Abstrakta als Verwendungsformen der Darstellungen angesehen, sie liegen damit nicht mehr außerhalb oder vor der mathematischen Tätigkeit und Praxis, sondern werden in ihr als deren allgemeine Form konstituiert. Abstrakta sind dann nicht mehr die nicht greifbare und nicht verstehbare Vorlage, das nichtsinnliche Vorbild für die Darstellungen, sondern eine Weise des Sprechens über letztere und ihre Verwendungen in der Mathematik.

Philosophische Fragen

Trotz aller großartigen Erfolge – oder vielleicht gerade wegen dieser - beim Einsatz von Computern und von Software im Bereich der Mathematik bleibt es eine philosophische Frage (oder auch: man kann begründet eine solche aufwerfen), wie es denn möglich ist, mit einem letztlich technisch-physikalischen Gerät abstrakte Objekte zu bearbeiten oder zu untersuchen. Natürlich stellt sich diese Frage auch beim Rechnen und Beweisen am Papier, aber Leistungsfähigkeit und Materialität des Computers verschärfen aus meiner Sicht die Brisanz dieser Frage. Im Computer jedenfalls kann es keine abstrakten Objekte geben, dort gibt es je nach Betrachtungsebene Bits oder Bytes oder Magnetisierungszustände oder Pixel, etc. Als Analogie kann man sagen, so wie man durch Anatomie keinen menschlichen Geist finden kann, findet man im Computer auch keine abstrakten Gegenstände, jedenfalls nicht durch Analyse der Abläufe dort. In einem gewissen Sinn bleibt es ein Mirakel, wie wir mit dem Computer Mathematisches entdecken, erfinden oder konstruieren können, jedenfalls wenn man dieses als genuin abstrakt auffasst. Denn mit dem Computer verlassen wir grundsätzlich nie die Ebene der sogenannten Darstellungen, der Computer kann nur diese manipulieren und untersuchen und uns dann das Ergebnis zeigen. Wir beobachten also den Computer beim Arbeiten mit Darstellungen (wovon allerdings?) oder besser mit Diagrammen im Sinne von Peirce. In traditioneller Manier könnte man hier nun einfach sagen, dass die Mathematiker dann aus diesen Beobachtungen ihre Schlüsse auf die abstrakten Objekte ziehen. Sie verstehen eben die Computerergebnisse und Produkte geeignet als Beschreibungen von abstrakten Objekten und deren Eigenschaften (vergleiche dazu etwa Brown 1998). Eine solche Sicht möchte ich aber im Folgenden mit zwei alternativen Sichtweisen auf die Mathematik kontrastieren, die eine weniger metaphysische Erläuterung der hier aufgezeigten philosophischen Fragen nahelegen. Vorwegnehmend sei gesagt, dass in beiden (hier nur grob skizzierbaren) Positionen, also bei Peirce und bei Wittgenstein, mathematische Tätigkeiten als Zeichentätigkeit beschrieben werden, wobei der Bezug, die Referenz dieser Zeichen auf von ihnen bezeichnete Objekte weitgehend als irrelevant angesehen wird. Dies gilt sowohl für die Referenz auf materielle Gegenstände und Situationen (wie etwa in den Anwendungen), wie auch für die Funktion der Zeichen als Darstellungen abstrakter Objekte. Priorität in jeder Hinsicht haben für beide Autoren die Zeichen selbst und die auf sie bezogene und durch sie erst ermöglichte Tätigkeit. Klarerweise gibt es markante Unterschiede, aber hier ist nicht der Platz für eine vergleichende Untersuchung der Philosophien der Mathematik bei Peirce und Wittgenstein. Trotz der Fokussierung auf die Zeichen, Symbole, Diagramme und der mit ihnen ausgeführten und ausführbaren mathematischen Handlungen ist für beide Philosophen andererseits deren Verwendung als Modell (Anwendungen) jedenfalls eine wichtige Legitimierung für Mathematik als menschliche Praxis überhaupt.

Peirce und Diagramme

Charles Sanders Peirce (1839-1914) war ein amerikanischer Mathematiker, Logiker und Philosoph, bekannt als einer der Begründer und Vertreter des Pragmatismus und der modernen Semiotik, etwa durch Begriffe wie Ikon, Index, Symbol. Als diesbezügliche Literatur sei besonders verwiesen auf Hoffmann (2005), für die Konzepte Diagramm und diagrammatisches Denken auch auf die Arbeiten von Dörfler (2006b; 2008; 2010). Wir konzentrieren uns hier auf diese beiden Konzepte von Peirce, weil sie besonders relevant erscheinen im Hinblick auf eine rationale Aufklärung des (scheinbar) antagonistischen Verhältnisses von Abstraktheit der Mathematik und von deren so effizienter Durchführung am und mit dem Computer. Als mögliches Ergebnis sei vorweggenommen: durch die weitgehende Identifizierung von mathematischer und diagrammatischer Tätigkeit wird es sehr plausibel, dass Mathematik verstanden als Zeichentätigkeit auf einer zeichenverarbeitenden Maschine ausgeführt werden kann. Am Beginn soll ein Originaltext von Peirce stehen (1976, S. 47f):

> By diagrammatic reasoning, I mean reasoning which constructs a diagram according to a precept expressed in general terms, performs experiments upon this diagram, notes their results, assures itself that similar experiments performed upon any diagram constructed according to the same precept would have the same results, and expresses this in general