Wirtschaftsmathematik

Mathematik-Training zum Studienstart

von

Dr. Stefan Clermont
General Reinsurance AG, Köln

Prof. Dr. Erhard Cramer
RWTH Aachen

Dr. Birgit Jochems
Frankfurt School of Finance & Management

Prof. Dr. Udo Kamps
RWTH Aachen

4., überarbeitete und erweiterte Auflage

Oldenbourg Verlag München

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
www.oldenbourg-verlag.de

Lektorat: Dr. Stefan Giesen
Herstellung: Constanze Müller
Titelbild: thinkstockphotos.de
Einbandgestaltung: hauser lacour
Gesamtherstellung: Grafik & Druck GmbH, München

Dieses Papier ist alterungsbeständig nach DIN/ISO 9706.

ISBN 978-3-486-71506-4
eISBN 978-3-486-71507-1

Aus dem Vorwort zur dritten Auflage

Die vorliegende Aufgabensammlung in der dritten, ergänzten und vollständig überarbeiteten Auflage ist aus Übungs- und Klausuraufgaben entstanden, die an der RWTH Aachen und der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg zu den einführenden Mathematikvorlesungen für Studierende der Wirtschaftswissenschaften gestellt wurden.

Zur thematischen Gliederung sind die Aufgaben in achtzehn Kapitel eingeteilt, die aus Gründen der Übersichtlichkeit jeweils die zugehörigen Lösungen enthalten. Diese sind — im Vergleich zur bestehenden Literatur — durchgehend sehr ausführlich dargestellt mit den Zielen, Wünschen und Anregungen der Studierenden nachzukommen, auf bekannte Schwierigkeiten der Studienanfänger/innen einzugehen, den Vorlesungsstoff einzuüben und zu vertiefen sowie auch das isolierte Nachvollziehen von Lösungen zu ermöglichen. Dies wird in vielen Aufgaben durch die Vorstellung alternativer Lösungswege erleichtert.

Wir haben möglichst keine Aufgaben verwendet, die in derselben oder in ähnlicher Form in Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen zur Wirtschaftsmathematik zu finden sind. Die Aufnahme einiger Standardaufgaben ist jedoch unerlässlich, und Einflüsse auf die Formulierung unserer Aufgaben sind nicht auszuschließen.

Die Lösungen sind meist selbsterklärend gestaltet, so dass zum Verständnis weder eine spezielle Vorlesung noch ein bestimmtes Lehrbuch zugrunde gelegt werden muss. Damit ist dieses Arbeitsbuch unter Zuhilfenahme eines gängigen Lehrbuchs zur Wirtschaftsmathematik zum Selbststudium und als Klausurtraining sehr geeignet.

Vorwort zur vierten Auflage

Die dritte Auflage der Aufgabensammlung zur Wirtschaftsmathematik wurde gründlich durchgesehen, überarbeitet und in einigen Kapiteln um Aufgaben und Graphiken erweitert, wobei alle bisherigen Aufgaben und deren Nummerierung beibehalten wurden.

Das Buch richtet sich insbesondere an Studierende wirtschaftswissenschaftlicher Bachelor-Studiengänge, aber auch grundsätzlich an Studienanfängerinnen und Studienanfänger, die schulmathematische Kenntnisse auffrischen möchten.

Als ein Angebot zum Nachschlagen der theoretischen Grundlagen wird jeweils zu Beginn der Kapitel auf Abschnitte im folgenden Lehrbuch verwiesen:

> U. Kamps, E. Cramer, H. Oltmanns (2009) Wirtschaftsmathematik,
> Einführendes Lehr- und Arbeitsbuch. Oldenbourg Verlag, München.

Liebe Leserin, lieber Leser, Ihre Kritik und Ihre Anregungen sind uns wichtig: Teilen Sie uns diese bitte mit (Institut für Statistik und Wirtschaftsmathematik, RWTH Aachen). Wir wünschen Ihnen ein angenehmes und nutzbringendes Lernen und Arbeiten.

Aachen, Frankfurt, Köln im November 2011

Stefan Clermont, Erhard Cramer,
Birgit Jochems, Udo Kamps

Inhaltsverzeichnis

1 Summen- und Produktsymbol

Literaturhinweis: KCO, Kapitel 1, S. 41-44

Aufgaben

Aufgabe 1.1:

Für reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ werden das Symbol $\sum_{i=1}^{n} a_i$ als Abkürzung für die Summe $a_1 + \cdots + a_n$ und das Symbol $\prod_{i=1}^{n} a_i$ als Abkürzung für das Produkt $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ verwendet.

a) Begründen Sie die Gültigkeit der folgenden Rechenregeln (für Zahlen $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n, c \in \mathbb{R}$):

i) $$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i, \quad \sum_{i=1}^{n}(a_i + c) = nc + \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad \sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i,$$

ii) $$\prod_{i=1}^{n}(a_i \cdot b_i) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right), \quad \prod_{i=1}^{n}(c \cdot a_i) = c^n \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

b) Die folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen nicht. Geben Sie Gegenbeispiele an:

i) $$\sum_{i=1}^{n}(a_i \cdot b_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right),$$

ii) $$\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) + \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right).$$

Aufgabe 1.2:

Stellen Sie die folgenden Summen mit Hilfe des Summenzeichens dar:

a) $4+8+12+16+20$

b) $2+4+6+8+10+12$

c) $6+9+12+15+18+21$

d) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{8}{7}+\frac{16}{9}$

e) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}$

f) $5+9+13+17+21+25+29$

g) $-8+10-12+14-16$

h) $1+2^2+3^3+4^4+5^5$

Aufgabe 1.3:

Schreiben Sie folgende Summen unter Verwendung des Summenzeichens:

a) $25+20c+15c^2+10c^3+5c^4, c\in\mathbb{R}$

b) $16+8a+4a^2+2a^3+a^4,\ a\in\mathbb{R}$

c) $(n_1+n_2)^k+(n_3+n_4)^k+\ldots+(n_m+n_{m+1})^k$, $m\in\mathbb{N}$ ungerade, $k\in\mathbb{R}$, $n_i\in\mathbb{R}$ $(i=1,\ldots,m+1)$

d) $a_{11}^1+\ldots+a_{55}^5$, $a_{ii}\in\mathbb{R}$ $(i=1,\ldots,5)$

e) $-a_{52}+a_{62}-a_{72}+a_{82}-a_{92}\pm\ldots$ mit $a_{i2}\in\mathbb{R}$ $(i=5,6,\ldots)$

Aufgabe 1.4:

Berechnen Sie für die Zahlen $x_1,\ldots,x_6$ und $y_1,\ldots,y_6$ aus der Tabelle

i	1	2	3	4	5	6
x_i	1	0	6	2	2	3
y_i	2	5	1	7	2	9

die Ausdrücke

a) $\sum_{i=1}^{6} x_i$

b) $\sum_{i=1}^{6}(x_i+y_i)$

c) $\sum_{i=1}^{6} x_i y_i$

d) $\left(\sum_{i=1}^{6} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{6} y_i\right)$

e) $\sum_{i=1}^{6} x_i(y_i-1)$

f) $\left(\sum_{i=1}^{6}(x_i+1)\right)\left(\sum_{i=1}^{6}(y_i-1)\right)$

Aufgabe 1.5:

Schreiben Sie die folgenden Produkte unter Verwendung des Produktzeichens:

a) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11$

b) $5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14 \cdot 17 \cdot 20$

c) $4 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 19 \cdot 28$

d) $\frac{2}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{2}{9}$

e) $\frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{12}{17} \cdot \frac{15}{26}$

Aufgabe 1.6:

Berechnen Sie für die Zahlen $x_1, \dots, x_6$ und $y_1, \dots, y_6$ aus der Tabelle

i	1	2	3	4	5	6
x_i	2	0	7	3	3	4
y_i	1	4	1	6	1	8

die Produkte:

a) $\prod_{i=1}^{4} y_i$ b) $\prod_{i=1}^{6} x_i y_i$ c) $\prod_{j=0}^{4} \left(\prod_{i=1}^{3} (x_i y_i + 1) \right)$

Aufgabe 1.7:

Berechnen Sie die Produkte:

a) $\prod_{i=1}^{5} (i+3)$ b) $\prod_{i=1}^{5} (i-3)$ c) $\left(\prod_{i=1}^{5} i \right) \left(\prod_{j=1}^{5} j \right)$ d) $\prod_{i=1}^{5} (i^2 - 9)$

Bemerkung: Die nächsten drei Aufgaben behandeln (im Vorgriff) statistische Fragestellungen.

Aufgabe 1.8:

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n$ reelle Zahlen. Dann heißen

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \text{ das arithmetische Mittel und } s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \text{ die empirische Varianz}$$

der Zahlen $x_1, \dots, x_n$.

a) Zeigen Sie:

i) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $y_i = a + bx_i, 1 \leq i \leq n$, gelten

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = a + b\overline{x} \quad \text{und} \quad s_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = b^2 s_x^2.$$

ii) $s_x^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2.$

b) Die Bearbeitungszeiten eines Zulieferers (jeweils Zeit zwischen Auftragseingang und Lieferung) werden bei den letzten 15 Bestellungen notiert (in Tagen):

5, 3,5, 7,5, 6, 5, 9, 8,5, 4,5, 4, 7,5, 7, 6, 4,5, 5, 7.

Bestimmen Sie das arithmetische Mittel und die empirische Varianz dieser Daten.

Aufgabe 1.9:

Die mit dem Verkauf von Werkzeugmaschinen verbundenen Nebenkosten sollen analysiert werden. Dazu werden für zehn Geschäftsabschlüsse dem jeweiligen Lieferumfang (in Mio. €) die zugehörigen Nebenkosten y_i (in Tsd. €) gegenübergestellt $(1 \leq i \leq 10)$:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2,1	2,3	1,6	1,0	3,2	1,5	2,7	2,4	1,8	1,4
y_i	5,3	6,1	4,2	3,2	7,8	3,8	7,3	4,9	4,0	3,4

Bestimmen Sie

a) das arithmetische Mittel $\overline{x}$ und die empirische Varianz s_x^2 der Daten $x_1, \ldots, x_{10}$.

b) das arithmetische Mittel $\overline{y}$ und die empirische Varianz s_y^2 der Daten $y_1, \ldots, y_{10}$.

c) (als ein Maß für den linearen Zusammenhang der betrachteten Größen den sogenannten Korrelationskoeffizienten)

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{s_x^2}\sqrt{s_y^2}}.$$

Aufgabe 1.10:

Die Warenhausketten A und B betreiben in zehn verschiedenen Städten je eine Filiale. Die Umsätze $x_1, \ldots, x_{10}$ der Filialen von A betrugen im Jahr 2000 (in Mio. €)

$$5\,,8\,,11\,,7\,,4\,,2\,,15\,,6\,,10\,,2\,.$$

Als Umsätze $y_1, \ldots, y_{10}$ (in Mio. €) der Filialen von B wurden im Jahr 2000 in denselben zehn Städten ausgewiesen:

$$2\,,3\,,7\,,5\,,3\,,3\,,10\,,7\,,9\,,1\,.$$

a) Ermitteln Sie die Mittelwerte $\overline{x}$, $\overline{y}$ der Umsätze $x_1, \ldots, x_{10}$ bzw. $y_1, \ldots, y_{10}$ der Warenhausketten A und B in den zehn Städten sowie die zugehörigen empirischen Varianzen s_x^2 und s_y^2.

b) Bestimmen Sie (als Maß für den linearen Zusammenhang der entsprechenden Umsätze die sogenannte empirische Kovarianz)

$$s_{xy}^2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

und (den Korrelationskoeffizienten)

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}^2}{\sqrt{s_x^2}\sqrt{s_y^2}}$$

für die Jahresumsätze $x_1, \ldots, x_{10}$ und $y_1, \ldots, y_{10}$.

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1.1:

a) i) Aufgrund des Kommutativgesetzes und des Assoziativgesetzes der Addition gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) &= (a_1+b_1)+\ldots+(a_n+b_n)\\ &= a_1+b_1+\ldots+a_n+b_n\\ &= a_1+\ldots+a_n+b_1+\ldots+b_n\\ &= (a_1+\ldots+a_n)+(b_1+\ldots+b_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i.\end{aligned}$$

Mit der Setzung $b_1=\ldots=b_n=c$ ist

$$\sum_{i=1}^{n}b_i=\sum_{i=1}^{n}c=\underbrace{c+\ldots+c}_{n-\text{mal}}=n\cdot c.$$

Das Distributivgesetz der Addition liefert:

$$\sum_{i=1}^{n}ca_i=ca_1+\ldots+ca_n=c(a_1+\ldots+a_n)=c\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

ii) Aufgrund des Kommutativgesetzes und des Assoziativgesetzes der Multiplikation gilt:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}(a_i\cdot b_i) &= (a_1\cdot b_1)\cdot\ldots\cdot(a_n\cdot b_n)\\ &= a_1\cdot b_1\cdot\ldots\cdot a_n\cdot b_n\\ &= a_1\cdot\ldots\cdot a_n\cdot b_1\cdot\ldots\cdot b_n\\ &= (a_1\cdot\ldots\cdot a_n)\cdot(b_1\cdot\ldots\cdot b_n)=\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n}b_i\right).\end{aligned}$$

Mit der Setzung $b_1=\ldots=b_n=c$ ist

$$\prod_{i=1}^{n}b_i=\prod_{i=1}^{n}c=\underbrace{c\cdot\ldots\cdot c}_{n-\text{mal}}=c^n.$$

b) i) Gegenbeispiel: $n = 2,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ b_1 = 1, b_2 = 3$:

$$\sum_{i=1}^{2}(a_i \cdot b_i) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 7 \neq 12 = (1+2)\cdot(1+3) = \left(\sum_{i=1}^{2} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{2} b_i\right).$$

ii) Gegenbeispiel: $n = 2, a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ b_1 = 1,\ b_2 = 2$:

$$\prod_{i=1}^{2}(a_i+b_i) = (1+1)\cdot(2+2) = 8 \neq 4 = (1\cdot 2)+(1\cdot 2) = \left(\prod_{i=1}^{2} a_i\right)+\left(\prod_{i=1}^{2} b_i\right).$$

Lösung zu Aufgabe 1.2:

a) $\sum_{i=1}^{5} 4i$ b) $\sum_{i=1}^{6} 2i$ c) $\sum_{i=2}^{7} 3i$ d) $\sum_{i=1}^{4} \frac{2^i}{2i+1}$

e) $\sum_{i=1}^{6} \frac{i}{i+1}$ f) $\sum_{i=1}^{7}(4i+1)$ g) $\sum_{i=4}^{8}(-1)^{i+1}2i$ h) $\sum_{i=1}^{5} i^i$

Lösung zu Aufgabe 1.3:

a) $\sum_{i=0}^{4}(5-i)\cdot 5c^i$ b) $\sum_{i=0}^{4} 2^{4-i}a^i = 2^4\cdot a^0 + 2^3a^1 + 2^2a^2 + 2^1a^3 + 2^0\cdot a^4$

c) $\sum_{i=1}^{(m+1)/2} (n_{2i-1}+n_{2i})^k$ d) $\sum_{i=1}^{5} a_{ii}^i$ e) $\sum_{i=5}^{\infty}(-1)^i a_{i2}$

Lösung zu Aufgabe 1.4:

a) 14 b) 40 c) 53 d) $14\cdot 26 = 364$

e) $\sum_{i=1}^{6}(x_iy_i - x_i) = \sum_{i=1}^{6} x_iy_i - \sum_{i=1}^{6} x_i \overset{c),a)}{=} 53 - 14 = 39$

f) $$\left(\sum_{i=1}^{6}(x_i+1)\right)\left(\sum_{i=1}^{6}(y_i-1)\right) = \left(\sum_{i=1}^{6} x_i + 6\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{6} y_i - 6\right)$$
$$= (14+6)(26-6) = 20\cdot 20 = 400$$

Lösung zu Aufgabe 1.5:

a) $\prod_{i=1}^{6}(2i-1)$ b) $\prod_{i=2}^{7}(3i-1)$ c) $\prod_{i=1}^{5}(i^2+3)$

d) $\prod_{i=4}^{9}\frac{2}{i} \quad \left(=\frac{2^6}{\prod_{i=4}^{9} i}\right)$ e) $\prod_{i=1}^{5}\frac{3i}{i^2+1}$

Lösung zu Aufgabe 1.6:

a) $1\cdot 4\cdot 1\cdot 6=24$

b) $(2\cdot 1)\cdot(0\cdot 4)\cdot(7\cdot 1)\cdot(3\cdot 6)\cdot(3\cdot 1)\cdot(4\cdot 8)=0$

c) $\prod_{j=0}^{4}[(2\cdot 1+1)\cdot(0\cdot 4+1)\cdot(7\cdot 1+1)]=\prod_{j=0}^{4}24=24^5=7\,962\,624$

Lösung zu Aufgabe 1.7:

a) $\prod_{i=1}^{5}(i+3)=4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8=6\,720$

b) $\prod_{i=1}^{5}(i-3)=(-2)\cdot(-1)\cdot 0\cdot 1\cdot 2=0$

c) $\left(\prod_{i=1}^{5} i\right)\left(\prod_{j=1}^{5} j\right)=\left(\prod_{i=1}^{5} i\right)^2=120^2=14\,400$

d) $\prod_{i=1}^{5}(i^2-9)=\prod_{i=1}^{5}(i-3)(i+3)=\left(\prod_{i=1}^{5}(i-3)\right)\left(\prod_{j=1}^{5}(j+3)\right)\overset{\text{b)}}{=}0$

Lösung zu Aufgabe 1.8:

a) i) $$\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a+bx_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a+b\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=a+b\overline{x},$$

$$s_y^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a+bx_i-a-b\overline{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b^2(x_i-\overline{x})^2=b^2s_x^2.$$

ii) $s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2)$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\overline{x}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i + \overline{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \overline{x}^2$$

b) Mit $x_1 = 5, x_2 = 3{,}5, \ldots, x_{15} = 7$ erhält man:

$$\overline{x} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}x_i = \frac{1}{15}(5 + 3{,}5 + \ldots + 7) = \frac{90}{15} = 6 \quad \text{sowie}$$

$$s_x^2 = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}(x_i - 6)^2 = \frac{1}{15}((-1)^2 + (-2{,}5)^2 + \ldots + 1^2) = \frac{39{,}5}{15} = 2{,}6\overline{3}$$

oder unter Verwendung von a) ii):

$$s_x^2 = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}x_i^2 - \overline{x}^2 = \frac{579{,}5}{15} - 36 = 2{,}6\overline{3}.$$

Lösung zu Aufgabe 1.9:

a) $\overline{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i = \frac{20}{10} = 2, \quad s_x^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i^2 - \overline{x}^2 = 4{,}4 - 4 = 0{,}4$

b) $\overline{y} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}y_i = \frac{50}{10} = 5, \quad s_y^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}y_i^2 - \overline{y}^2 = \frac{273{,}32}{10} - 25 = 2{,}332$

c) $\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \ldots = 0{,}917$

Damit hat die Korrelation den Wert $r_{xy} = \frac{0{,}917}{\sqrt{0{,}4}\cdot\sqrt{2{,}332}} \approx 0{,}949.$

Lösung zu Aufgabe 1.10:

a) $\overline{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i = \frac{70}{10} = 7, \quad s_x^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{154}{10} = 15{,}4$

$\overline{y} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}y_i = \frac{50}{10} = 5, \quad s_y^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(y_i - \overline{y})^2 = \frac{86}{10} = 8{,}6$

b) $s_{xy}^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i - 7)(y_i - 5) = \frac{98}{10} = 9{,}8$

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}^2}{\sqrt{s_x^2}\sqrt{s_y^2}} = \frac{9{,}8}{\sqrt{15{,}4} \cdot \sqrt{8{,}6}} \approx 0{,}852$$

2 Vollständige Induktion

Literaturhinweis: KCO, Kapitel 1, S. 45-48

Aufgaben

Aufgabe 2.1:

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

a) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

d) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} a^{i-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$ für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}, a \neq 1$ (geometrische Reihe)

Aufgabe 2.2:

Leiten Sie mit Hilfe von Aufgabe 2.1 geschlossene Ausdrücke für die folgenden Summen her, und beweisen Sie die so erhaltenen Formeln (zusätzlich) durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

a) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$ b) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2$

Aufgabe 2.3:

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

a) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

b) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

c) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} i^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$

d) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$

Aufgabe 2.4:

Zeigen Sie die Gültigkeit von

a) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k}$ für alle $k,\ n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$ durch direkte Rechnung, wobei $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $\binom{n}{0} = 1$, $k \in \{0, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

b) $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion (Binomische Formel).

c) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Aufgabe 2.5:

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

a) Für alle $n \geq 4$ gilt: $2^{n-1} > n + 1$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x > -1$ gilt: $(1+x)^n \geq 1 + nx$ (Bernoullische Ungleichung).

Aufgabe 2.6:

Zeigen Sie durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

a) $\forall\, n \in \mathbb{N} : (1 - x^2) \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 + x^{2^i}) = 1 - x^{2^{n+1}}$ für $x \in \mathbb{R}$.

b) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \prod_{i=1}^{n} i^i \leq n^{n(n+1)/2}$.

Aufgabe 2.7:

Seien $f(x) = \ln x$, $x > 0$, und $f^{(n)}$ die n-te Ableitung der Funktion f (s. Kapitel 9). Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

Aufgabe 2.8:

Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

Die Potenzmenge einer Menge mit n Elementen besitzt 2^n Elemente, $n \in \mathbb{N}$.
(Die Potenzmenge einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M.)

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 2.1:

a) Induktionsanfang $n = 1$: $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$

Induktionsvoraussetzung: Es sei $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss $n \to n+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i &= \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

b) Induktionsanfang $n = 1$: $\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$

Induktionsvoraussetzung: Es sei $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss $n \to n+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} i^2 \right) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

c) Induktionsanfang $n = 1$: $\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4}$

Induktionsvoraussetzung: Es sei $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss $n \to n+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= \left(\sum_{i=1}^{n} i^3 \right) + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2 + 4(n+1)) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

d) Induktionsanfang $n = 1$: $\sum_{i=1}^{1} a^{i-1} = a^0 = 1 = \frac{a^1 - 1}{a - 1}$

Induktionsvoraussetzung: Es sei $\sum_{i=1}^{n} a^{i-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss $n \to n + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} a^{i-1} &= \left(\sum_{i=1}^{n} a^{i-1}\right) + a^n = \frac{a^n - 1}{a - 1} + a^n \\ &= \frac{a^n - 1 + a^n(a-1)}{a - 1} = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.2:

a) $\sum_{i=1}^{n}(2i - 1) = 2\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) - n \overset{\text{A2.1}}{=} 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang $n = 1$: $\sum_{i=1}^{1}(2i - 1) = 2 - 1 = 1 = 1^2$

Induktionsvoraussetzung: Es sei $\sum_{i=1}^{n}(2i - 1) = n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss $n \to n + 1$:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i - 1) = \sum_{i=1}^{n}(2i - 1) + 2(n + 1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

b) $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(2i - 1)^2 &= 4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &\overset{\text{A2.1}}{=} 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= \frac{2}{3}n(n+1)(2n + 1 - 3) + n \\ &= \frac{n}{3}(2(n+1)2(n-1) + 3) = \frac{n}{3}(4(n^2 - 1) + 3) \\ &= \frac{n(4n^2 - 1)}{3} \left(= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}\right)\end{aligned}$$

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang $n = 1$: $\sum_{i=1}^{1}(2i-1)^2 = 1^2 = \frac{1 \cdot 3}{3}$

Induktionsvoraussetzung: Es sei $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 + (2(n+1)-1)^2 \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + (2(n+1)-1)^2 \\
&= \frac{n(2n-1)(2(n+1)-1)}{3} + (2(n+1)-1)^2 \\
&= \frac{2(n+1)-1}{3}(2n^2-n+6(n+1)-3) \\
&= \frac{2(n+1)-1}{3}(n+1)(2n+3) \\
&= \frac{(n+1)(4(n+1)^2-1)}{3}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.3:

a) Induktionsanfang $n = 1$: $\sum_{i=1}^{1}\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1}$

Induktionsvoraussetzung: Es sei $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i(i+1)} &= \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \left(= \frac{n+1}{(n+1)+1}\right)
\end{aligned}$$

Alternative Lösung ohne vollständige Induktion:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

b) Induktionsanfang $n = 1$: $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2+1}$

Induktionsvoraussetzung:

Es sei $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss $n \to n+1$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} \right) + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$
$$= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}$$
$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$$

c) Induktionsanfang $n = 1$: $\sum_{i=1}^{1} (-1)^{i-1} i^2 = (-1)^0 1^2 = (-1)^0 \frac{1 \cdot 2}{2}$

Induktionsvoraussetzung:

Es sei $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} i^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss $n \to n+1$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} i^2 \right) + (-1)^n (n+1)^2$$
$$= (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^n (n+1)^2$$
$$= (-1)^n \frac{n+1}{2} (-n + 2(n+1)) = (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

d) Induktionsanfang $n=1$: $\sum_{i=1}^{1} i \cdot i! = 1 \cdot 1! = 2! - 1$

Induktionsvoraussetzung: Es sei $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss $n \to n+1$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot i! = \left(\sum_{i=1}^{n} i \cdot i!\right) + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)!$$

$$= (n+1)!(1+n+1) - 1 = (n+2)! - 1 = ((n+1)+1)! - 1$$

Lösung zu Aufgabe 2.4:

a) $$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\left(\frac{k}{n+1} + \frac{n+1-k}{n+1}\right) = \binom{n+1}{k}$$

b) Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang $n=1$: $(x+y)^1 = \binom{1}{0}x^1y^0 + \binom{1}{1}x^0y^1$

Induktionsvoraussetzung: Es sei $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss $n \to n+1$:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^{n+1-k}y^k$$

$$= \binom{n}{0}x^{n+1-0}y^0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right)x^{n+1-k}y^k + \binom{n}{n}x^0y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k$$

mit a) und $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$, $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$.

c) Die Gültigkeit der Gleichung kann mit vollständiger Induktion unter Verwendung von a) gezeigt werden oder direkt unter Verwendung von b) und der Setzung $x = y = 1$.

Lösung zu Aufgabe 2.5:

a) Induktionsanfang $n = 4$: $2^{4-1} = 8 > 5 = 4 + 1$

Induktionsvoraussetzung: Es sei $2^{n-1} > n + 1$ für ein $n \geq 4$.

Induktionsschluss $n \to n + 1$:

$$2^n = 2 \cdot 2^{n-1} > 2(n+1) = 2n + 2 > n + 2 \quad (= (n+1) + 1)$$

b) Induktionsanfang $n = 1$: $(1 + x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$

Induktionsvoraussetzung: Es sei $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss $n \to n + 1$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.6:

a) Induktionsanfang $n = 1$:

$$(1 - x^2) \cdot \prod_{i=1}^{1}(1 + x^{2^i}) = (1 - x^2)(1 + x^2) = 1 - x^4 = 1 - x^{2^{1+1}}$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\text{Es sei } (1 - x^2) \prod_{i=1}^{n}(1 + x^{2^i}) = 1 - x^{2^{n+1}} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}.$$

Induktionsschluss $n \to n + 1$:

$$\begin{aligned}(1 - x^2) \prod_{i=1}^{n+1}(1 + x^{2^i}) &= (1 - x^2)(1 + x^{2^{n+1}}) \prod_{i=1}^{n}(1 + x^{2^i}) \\ &= (1 + x^{2^{n+1}})(1 - x^{2^{n+1}}) = 1 - (x^{2^{n+1}})^2 = 1 - x^{2^{n+2}}\end{aligned}$$

b) Induktionsanfang $n = 1$: $\prod_{i=1}^{1} i^i = 1 \leq 1^{1 \cdot 2/2}$

Induktionsvoraussetzung: Es sei $\prod_{i=1}^{n} i^i \leq n^{n(n+1)/2}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss $n \to n+1$:

$$\prod_{i=1}^{n+1} i^i = \left(\prod_{i=1}^{n} i^i\right) \cdot (n+1)^{n+1} \leq n^{n(n+1)/2} \cdot (n+1)^{n+1}$$
$$\leq (n+1)^{n(n+1)/2}(n+1)$$
$$= (n+1)^{(n(n+1)/2)+(n+1)} = (n+1)^{(n+1)(n+2)/2}$$

Lösung zu Aufgabe 2.7:

Induktionsanfang $n = 1$:

$$f^{(1)}(x)\ (= f'(x)) = (-1)^{1-1}\frac{0!}{x^1} = 1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} = (\ln x)'$$

Induktionsvoraussetzung: Es sei $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss $n \to n+1$:

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = \left[(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}\right]' = (-1)^{n-1}(n-1)!(x^{-n})'$$
$$= (-1)^{n-1}(n-1)!(-n)x^{-n-1} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Lösung zu Aufgabe 2.8:

Die Menge M_n habe n Elemente: Diese werden ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) als die ersten n natürlichen Zahlen aufgefasst, d.h. $M_n = \{1, \ldots, n\}$.

Bezeichnung: $\mathfrak{P}(M_n)$ sei die Potenzmenge von M_n.

Induktionsanfang $n = 1$: $M_1 = \{1\}$, $\mathfrak{P}(M_1) = \{\emptyset, \{1\}\}$, d. h. $\mathfrak{P}(M_1)$ hat $2 = 2^1$ Elemente.

Induktionsvoraussetzung: $\mathfrak{P}(M_n)$ hat 2^n Elemente für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss $n \to n+1$:

$$M_{n+1} = \{1, \ldots, n+1\} = M_n \cup \{n+1\}$$
$$\Longrightarrow \quad \mathfrak{P}(M_{n+1}) = \mathfrak{P}(M_n) \cup \{A \cup \{n+1\} \mid A \in \mathfrak{P}(M_n)\}$$
$$\Longrightarrow \quad \mathfrak{P}(M_{n+1}) \text{ hat doppelt so viele Elemente wie } \mathfrak{P}(M_n)$$
$$\Longrightarrow \quad \mathfrak{P}(M_{n+1}) \text{ hat } 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}\text{Elemente}$$

3 Mengen und deren graphische Darstellungen

Literaturhinweis: KCO, Kapitel 1, S. 1-4, 12-23

Aufgaben

Aufgabe 3.1:

Gegeben sei die Menge $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 < x < 10\}$, d. h. die Menge aller Zahlen x aus $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $1 < x < 10$ gilt. Prüfen Sie, welche der folgenden Mengen in der Menge A als Teilmenge enthalten sind:

$$B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 < x \leq 10\},$$

$$C = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 = 4\right\},$$

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 5x + 6 = 0\right\},$$

$$E = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 1 < x < 11 \text{ und } x \text{ ist eine Primzahl}\},$$

$$F = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \text{ ist Teiler von } 18\}.$$

Bestimmen Sie weiterhin folgende Mengen:

$$E \cap F, \quad (E \cap F) \cup (C \cap D), \quad E \backslash (C \cap F), \quad (E \backslash D) \cap (F \cup C).$$

Aufgabe 3.2:

Gegeben seien die Mengen A,B,C. Stellen Sie folgende Mengen durch Venn-Diagramme graphisch dar:

$$A \cup B, A \cap B, B \backslash A, A \cap B \cap C, A \backslash (B \cap C), A \cap (B \cup C).$$

Aufgabe 3.3:

Zeigen Sie für beliebige Mengen A,B,C (mittels der Aussagenlogik):

a) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,

b) $A \cap (A \cup B) = A$,

c) $C \backslash (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B)$,

und zeichnen Sie die zugehörigen Venn-Diagramme.

Aufgabe 3.4:

Gegeben sei die Menge $M = \{5,\{1,2\},\emptyset\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

a) $2 \in M$	b) $5 \in M$	c) $\{1,2\} \subset M$	d) $\{5\} \in M$	e) $\{5\} \subset M$
f) $\{2\} \subset M$	g) $\emptyset \subset M$	h) $\{\emptyset\} \subset M$	i) $\emptyset \in M$	j) $\{\emptyset\} \in M$

Aufgabe 3.5:

Gegeben sei die Menge $M = \{-1,\emptyset,\{2,\sqrt{2}\}\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

a) $\sqrt{2} \in M$	b) $\{\sqrt{2}\} \in M$	c) $\{\sqrt{2}\} \in \mathbb{R}$	d) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
e) $-1 \in \mathbb{Q}$	f) $-1 \in M$	g) $\emptyset \subseteq M$	h) $\emptyset \notin M$
i) $\{\emptyset\} \notin M$	j) $\{2,\sqrt{2}\} \subseteq M$	k) $\{-1,\emptyset\} \subseteq M$	l) $M \subseteq \mathbb{R}$

Aufgabe 3.6:

Es sei α eine reelle Zahl. Unter $|\alpha|$ versteht man den Abstand des der Zahl α entsprechenden Punkts $(\alpha,0)$ auf der Zahlengeraden vom Ursprung, also gilt:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{falls } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{falls } \alpha < 0 \end{cases}.$$

Stellen Sie die folgenden Mengen auf der Zahlengeraden dar:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} | \ |x| \geq 1\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} | \ |x-3| < 2\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} | \ |2x+7| \geq 4x-2\}$

d) $A \cap B \cap C$

Aufgabe 3.7:

Schraffieren Sie die in der $x,y-$Ebene durch die Ungleichungen

a) $2x + y < 20$ b) $2x - y \geq 15$ c) $10x + 5y > 50$ d) $-x + 4y \leq 32$

gegebenen Gebiete.

Aufgabe 3.8:

Stellen Sie die durch die folgenden Gleichungen bzw. (Systeme von) Ungleichungen definierten Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ graphisch dar:

a) $3x + y = 3$

b) $x = 5$

c) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x} = c \quad (c \neq 0, x \neq 0)$

d) $\frac{2}{y-1} + \frac{3}{5y-5} = \frac{4}{y+0{,}1} \quad (y \neq 1, y \neq -0{,}1)$

e) $(x-2)^2 > x^2 + y$

f) $2y \leq 2x + 16$

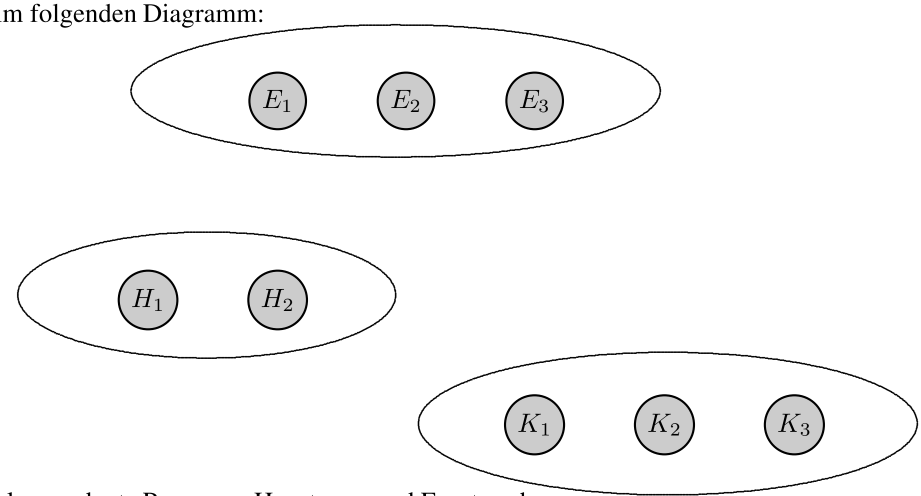
g) $x \geq -1, y < 2$

h) $x + 2y \geq 10, x - y \geq 2$

Aufgabe 3.9:

Eine Wohnungsbaugesellschaft errichtet drei verschiedene Typen von Einfamilienhäusern (zusammengefasst zur Menge $E = \{E_1, E_2, E_3\}$), die sich noch im Rohbau befinden. Die Käufer können bei den Fensterrahmen zwischen zwei Typen von Holzrahmen (Menge $H = \{H_1, H_2\}$) und drei Typen von Kunststoffrahmen (Menge $K = \{K_1, K_2, K_3\}$) auswählen. Jeder Haustyp kann mit jeder Art von Fensterrahmen ausgestattet werden. Stellen Sie die möglichen Einfamilienhausmodelle der Wohnungsbaugesellschaft dar

a) im folgenden Diagramm:



b) als geordnete Paare von Haustypen und Fensterrahmen,

c) als kartesisches Produkt zweier geeigneter Mengen.

Aufgabe 3.10:

Bestimmen Sie für die Mengen $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{1\}$, $D = \{a\}$ die folgenden Mengen („×“ bezeichnet ein kartesisches Produkt):

a) $A \times (B \cap C)$ b) $A \times (B \cup C)$ c) $(A \times B) \cap (A \times C)$

d) $(A \times B) \cup (A \times C)$ e) $A \times B \times C$ f) $(A \cap D) \times (B \cap C)$

Aufgabe 3.11:

In einem Produktionsbetrieb werden die Konsumgüter A und B hergestellt. In jedem Monat werden x Einheiten von A und y Einheiten von B produziert. Dabei entstehen variable Kosten von 10 € und 20 € pro Einheit von A bzw. B.

a) Welche gesamten variablen Kosten entstehen pro Monat?

b) Stellen Sie graphisch dar, auf welche Weise gesamte variable Kosten in der Höhe von $K = 100$, $K = 300$ und $K = 500$ entstehen können. (Zeichnen Sie die entsprechenden Kostengleichungen.)

Aufgabe 3.12:

Ein Fabrikant fertigt Scheren mit monatlichen Fixkosten von 15 000 € und anfallenden Produktionskosten von 6 € pro Stück. Der Verkaufspreis einer Schere beträgt 11 €.

a) Geben Sie die folgenden Größen als Funktion der Monatsproduktion, d. h. der Anzahl x der pro Monat produzierten Scheren an, und stellen Sie diese graphisch dar:

   i) die Gesamtkosten pro Monat,

   ii) den monatlichen Umsatz, der durch den Verkauf des Produkts entsteht.

b) Wie viele Scheren muss der Fabrikant monatlich mindestens verkaufen, um in die Gewinnzone zu kommen?

Aufgabe 3.13:

a) Stellen Sie die Menge

$$M = \left\{ (x, y) \,|\, x \geq 0, y \geq 2, y \leq -\frac{2}{3}x + 6, \frac{x}{6} + \frac{y}{8} \leq 1 \right\}$$

graphisch dar.

b) Bei einem Schmelzvorgang werden drei Zusatzstoffe Z_1,Z_2 und Z_3 in der jeweiligen Mindestmenge von 1,2 kg Z_1, 0,6 kg Z_2 und 1,6 kg Z_3 benötigt. Die Zusatzstoffe werden in gemischter Form als Rohstoff A bzw. Rohstoff B eingekauft. Jede Mengeneinheit von Rohstoff A enthält 0,1 kg Z_1, 0,3 kg Z_2 und 0,2 kg Z_3. In jeder Mengeneinheit von Rohstoff B sind 0,6 kg Z_1, 0,05 kg Z_2 und 0,4 kg Z_3 enthalten. Der Rest jeder Rohstoffsorte besteht aus Stoffen, die als Schlacke ausfallen.

Die beiden Rohstoffe A und B sollen für einen Schmelzvorgang so gemischt werden, dass die obigen Mindestmengen an Zusatzstoffen vorhanden sind. Beschreiben Sie die zulässigen Mengenkombinationen durch ein System von Ungleichungen, und stellen Sie die zugehörige Erfüllungsmenge graphisch dar.

Aufgabe 3.14:

Student S. möchte sich zur Bekämpfung seines Übergewichts an einem Wochenende maximal 8 Stunden Zeit nehmen, um Squash zu spielen und im Fitness-Studio zu trainieren. Er weiß, dass er pro Stunde Squash 15 € ausgeben muss und in dieser Zeit 1 300 kJ verbraucht, während der Eintritt ins Fitness-Studio pro Stunde nur 5 € kostet, aber auch nur 800 kJ verbraucht werden. Außerdem hat er zu berücksichtigen, dass seine finanzielle Situation nur eine Investition von höchstens 60 € erlaubt und dass sein Squash-Partner höchstens 3 Stunden zur Verfügung steht.

Bezeichnen x die Zeit [in Std.], in der er Squash spielen möchte, sowie y die Zeit [in Std.], in der er plant im Fitness-Studio zu trainieren, so ist er an dem Zahlenpaar $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ interessiert, das zum höchstmöglichen kJ-Verbrauch führt. Dieses Zahlenpaar hat er allerdings aus der Menge aller den obigen Einschränkungen genügenden Paare auszuwählen.

Schraffieren Sie diese Menge in einem $x,y-$Koordinatensystem!

Aufgabe 3.15:

Ein Landwirt möchte seine Ackerfläche von 200 Morgen mit Roggen und Weizen bebauen. Für die Erzeugung eines Doppelzentners Roggen benötigt er 0,12 Morgen, für die eines Doppelzentners Weizen 0,08 Morgen.

Der Anbau eines Doppelzentners Roggen kostet 8 €, der Anbau eines Doppelzentners Weizen 10 €. Der Landwirt hat ein Kapital von 20 000 € zur Verfügung.

Stellen Sie die zur Erzeugung von x Doppelzentnern Roggen und y Doppelzentnern Weizen möglichen Kombinationen (x, y) graphisch dar, wenn:

a) ein Teil der Fläche brach liegen darf.

b) die gesamte Fläche genutzt werden soll.

Lösungen

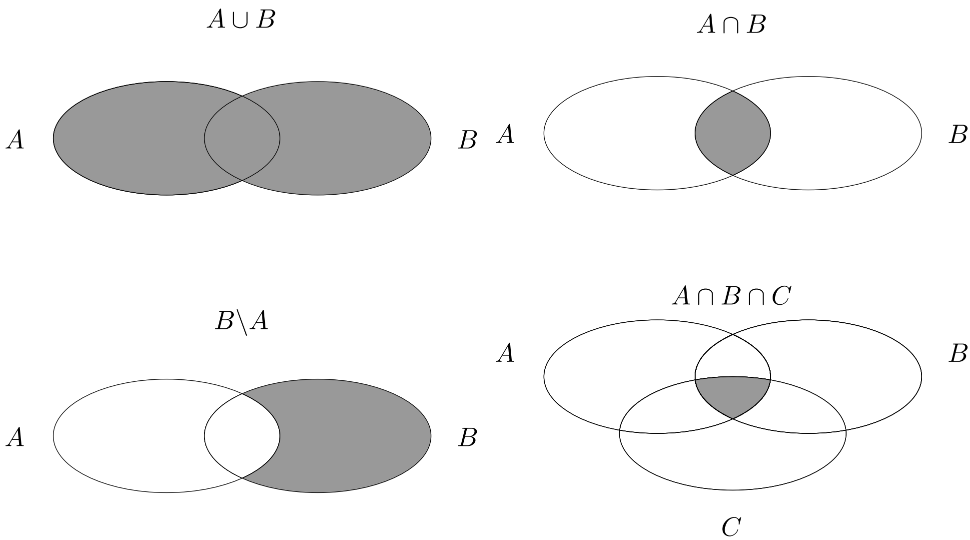
Lösung zu Aufgabe 3.1:

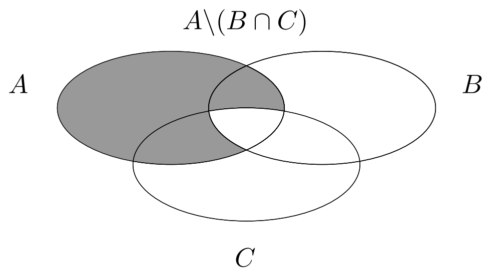
$A = \{x \in \mathbb{R} |\, 1 < x < 10\}$:

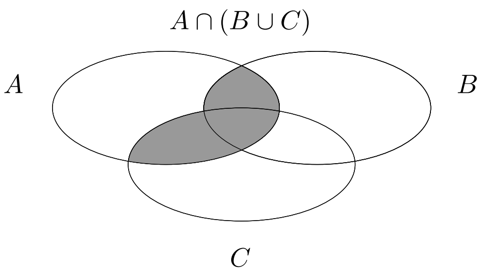
$B = \{x \in \mathbb{R} |\ 1 < x \leq 10\}$, B ist keine Teilmenge von A, aber $A \subseteq B$;
$C = \{x \in \mathbb{R} |\ x^2 = 4\} = \{-2, 2\}$, C ist keine Teilmenge von A;
$D = \{x \in \mathbb{R} |\ x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$, $D \subseteq A$ $(x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = 0)$;
$E = \{x \in \mathbb{N} |\ 1 < x < 11 \wedge x$ ist eine Primzahl$\} = \{2, 3, 5, 7\}$, $E \subseteq A$;
$F = \{x \in \mathbb{N} |$ ist Teiler von $18\} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, F ist keine Teilmenge von A;

$E \cap F = \{2, 3, 5, 7\} \cap \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} = \{2, 3\}$;
$(E \cap F) \cup (C \cap D) = \{2, 3\} \cup \{2\} = \{2, 3\}$; $\quad E \setminus (C \cap F) = E \setminus \{2\} = \{3, 5, 7\}$;
$(E \setminus D) \cap (F \cup C) = \{5, 7\} \cap \{-2, 1, 2, 3, 6, 9, 18\} = \emptyset = \{\}$.

Lösung zu Aufgabe 3.2:







Lösung zu Aufgabe 3.3:

a) Zu zeigen: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (Distributivgesetz)

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cup C &\iff x \in A \cap B \vee x \in C \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C \\ &\iff (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\iff x \in A \cup C \wedge x \in B \cup C \\ &\iff x \in (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{aligned}$$

Da x beliebig gewählt ist, folgt die Behauptung.

b) Zu zeigen: $A \cap (A \cup B) = A$ (Absorptionsgesetz)

$$\begin{aligned} x \in A \cap (A \cup B) &\iff x \in A \cap A \vee x \in A \cap B \\ &\iff x \in A \vee x \in A \cap B \iff x \in A \end{aligned}$$

Direkt: $A \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cap B) = A \cup \underbrace{(A \cap B)}_{\subseteq A} = A$

c) Zu zeigen: $C\backslash(A \cup B) = (C\backslash A) \cap (C\backslash B)$ (Gesetz von De Morgan)

$$\begin{aligned} x \in C\backslash(A \cup B) &\iff x \in C \wedge x \notin A \cup B \iff x \in C \wedge x \notin A \wedge x \notin B \\ &\iff x \in C \wedge x \in C \wedge x \notin A \wedge x \notin B \\ &\iff (x \in C \wedge x \notin A) \wedge (x \in C \wedge x \notin B) \\ &\iff x \in C \setminus A \wedge x \in C \setminus B \\ &\iff x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B) \end{aligned}$$

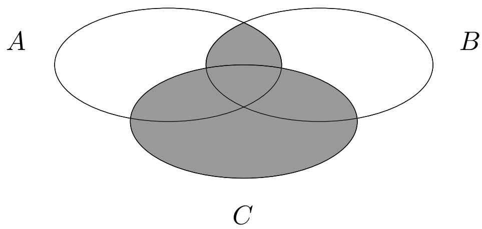
$$\text{Direkt: } C \setminus (A \cup B) = C \cap \overline{A \cup B} = C \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = C \cap \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$= C \cap C \cap \overline{A} \cap \overline{B} = (C \cap \overline{A}) \cap (C \cap \overline{B})$$

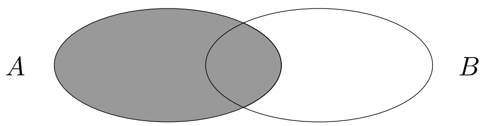
$$= (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

Venn-Diagramme

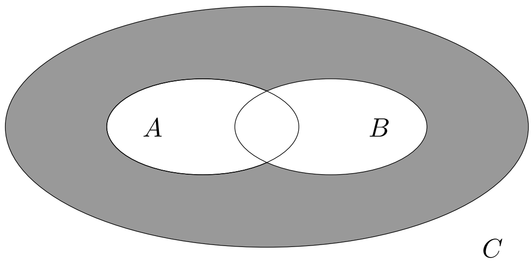
zu a)



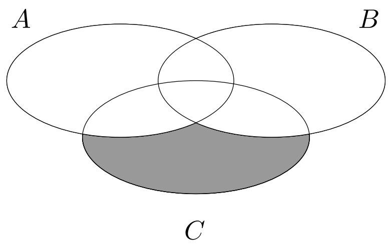
zu b)



zu c)



allgemeine Situation: $C \backslash (A \cup B)$



Lösung zu Aufgabe 3.4:

Elemente von M: $5, \{1,2\}, \emptyset$. Teilmengen von M: $\emptyset, \{5\}, \{\{1,2\}\}, \{\emptyset\}$ (einelementige), $\{5, \{1,2\}\}, \{5, \emptyset\}, \{\{1,2\}, \emptyset\}$ (zweielementige), $\{5, \{1,2\}, \emptyset\}$ (dreielementige).

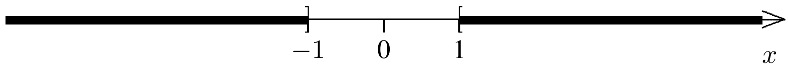
Falsche Aussagen sind a), c), d), f), j) (Bemerkung: g) ist per Definition wahr).

Lösung zu Aufgabe 3.5:

Wahre Aussagen sind: e), f), g) (per Definition), i), k).

Lösung zu Aufgabe 3.6:

a) $$A = \{x \in \mathbb{R} |\, |x| \geq 1\} = \{x|\, |x| \geq 1 \wedge (x \geq 0 \vee x < 0)\}$$
$$= \{x|\, (|x| \geq 1 \wedge x \geq 0) \vee (|x| \geq 1 \wedge x < 0)\}$$
$$= \{x|\, (x \geq 1 \wedge x \geq 0) \vee (-x \geq 1 \wedge x < 0)\}$$
$$= \{x|\, x \geq 1 \vee x \leq -1\} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$



b) $$B = \{x|\, |x-3| < 2\}$$
$$= \{x|\, (x-3 < 2 \wedge x-3 \geq 0) \vee (-x+3 < 2 \wedge x-3 < 0)\}$$
$$= \{x|\, (x < 5 \wedge x \geq 3) \vee (x > 1 \wedge x < 3)\} = \{x|\, 3 \leq x < 5 \vee 1 < x < 3\}$$
$$= \{x|\, 1 < x < 5\} = (1, 5)$$

c) $$C = \{x|\, |2x+7| \geq 4x-2\}$$
$$= \{x|\, (2x+7 \geq 4x-2 \wedge 2x+7 \geq 0) \vee (-2x-7 \geq 4x-2 \wedge 2x+7 < 0)\}$$
$$= \{x|\, (2x \leq 9 \wedge x \geq -\tfrac{7}{2}) \vee (6x \leq -5 \wedge x < -\tfrac{7}{2})\}$$
$$= \{x|\, (-\tfrac{7}{2} \leq x \leq \tfrac{9}{2}) \vee (x \leq -\tfrac{5}{6} \wedge x < -\tfrac{7}{2})\}$$
$$= \{x|\, -\tfrac{7}{2} \leq x \leq \tfrac{9}{2} \vee x < -\tfrac{7}{2}\}$$
$$= \{x|\, x \leq \tfrac{9}{2}\} = (-\infty, \tfrac{9}{2}]$$

d) $$A \cap B \cap C = \{x|\, x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C\}$$
$$= \{x|\, (x \geq 1 \vee x \leq -1) \wedge (1 < x < 5) \wedge (x \leq \tfrac{9}{2})\}$$
$$= \{x|\, 1 < x \leq \tfrac{9}{2}\} = \big(1, \tfrac{9}{2}\big]$$