

Wieland Alexander Worthoff
Hans Georg Krojanski
Dieter Suter

Medizinphysik in Übungen und Beispielen

De Gruyter

Physics and Astronomy Classification 2010: 87.85.-d, 87.57.-s, 87.59.-e, 87.19.-j, 87.50.-a, 87.53.-j, 87.56.-v, 87.64.-t.

ISBN 978-3-11-026609-2
e-ISBN 978-3-11-026619-1

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data

A CIP catalog record for this book has been applied for at the Library of Congress.

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the internet at <http://dnb.dnb.de>.

© 2012 Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin/Boston

Typesetting: PTP-Berlin Protago- \TeX -Production GmbH, www.ptp-berlin.eu

Printing and Bindung: Hubert & Co. GmbH & Co. KG, Göttingen

⊗ Printed on acid-free paper

Printed in Germany

www.degruyter.com

Vorwort

Physikalische Methoden und Techniken werden in der Medizin immer wichtiger. Verschiedene Universitäten haben darauf reagiert und entsprechende Ausbildungsmöglichkeiten geschaffen, in der Form von Vertiefungsfächern oder eigenen Studiengängen. Das vorliegende Buch ist aus Unterrichtsmaterialien entstanden, welche im Rahmen der Vorlesung „Einführung in die Medizinphysik“ an der TU Dortmund seit 2006 regelmäßig stattfindet. Es wendet sich in erster Linie an Studierende aus naturwissenschaftlichen und technischen Studiengängen mit einer soliden Grundausbildung in Physik. Der erste Teil enthält Themen aus der Physik des Körpers, der zweite Teil diagnostische und therapeutische Methoden. Besonderer Wert wurde bei der Auswahl der Übungen und Beispiele auf den Bezug zur praktischen Anwendung gelegt. Die jedem Kapitel vorangestellte Übersicht soll dabei das Verständnis für den Lerninhalt vertiefen.

Januar 2012

*Wieland Alexander Worthoff
Hans Georg Krojanski
Dieter Suter*

Inhaltsverzeichnis

Teil I. Physik des Körpers

1	Atmung und Stoffwechsel	3
	Übersicht	3
1.1	Atmung	5
1.2	Höhengrenze des Menschen	7
1.3	Sauerstofftransfer im Hirn	8
1.4	Photosynthese	9
1.5	Erythrozyten: Sauerstofftransport im Körper	12
1.6	Netzwerktheorie des menschlichen Atmungsapparates	13
1.7	Transportphänomene an der Zellmembran	15
1.8	Dielektrische Messung von Exocytosevorgängen	19
1.9	Diffusion und Skaleneigenschaften	21
2	Biomechanik	23
	Übersicht	23
2.1	Achillessehne	26
2.2	Knochenformen von Ulna und Radius	27
2.3	Skibindung	31
2.4	Elastizität der Wirbelsäule	34
2.5	Patientenhebe	38
2.6	Proportionen der Lebewesen	43
2.7	Knochen gleicher Festigkeit	44
2.8	Gewichtheben	45
3	Strömungstheorie des Blutkreislaufs	47
	Übersicht	47
3.1	Von der Aorta zu den Kapillaren	50
3.2	Das Blut als Potenzfluid	50
3.3	Verzweigungen	53
3.4	Bypass	55
3.5	Hämorheometrie mit einem Kugel-Kugel-Viskosimeter	55
3.6	Strömungs-Kennzahlen	58
3.7	Verengung der Aorta	60
3.8	Stufenförmige Verengung der Aorta	64
3.9	Blutdruck in der Aorta	65
3.10	Pulsierende Blutströmung	66
3.11	Herzleistung	70
3.12	Öffnungsfläche Mitralis	71

4	Wahrnehmung	73
	Übersicht	73
4.1	Informationsverarbeitung	77
4.2	Die Brille	77
4.3	Geometrie der Brillengläser	79
4.4	Optische Täuschung	81
4.5	Retina Implantation	82
4.6	Sehschwelle des menschlichen Auges	83
4.7	Sehwinkel und Auflösungsvermögen	84
4.8	Aphakes Auge	86
4.9	Hörschwelle und Brown'sche Bewegung im Vergleich	88
4.10	Schallausbreitung	89
4.11	Lautsprecher	89
4.12	Hörschwelle	90
4.13	Schallinterferenz bei punktförmigen Quellen	90
4.14	Echoortung	91
4.15	Impedanzanpassung	92
4.16	Akustische Schmerzschwelle	95
5	Elektrische Ströme, Felder und Spannungen	97
	Übersicht	97
5.1	Nervenleitung bei Riesenaxonen von Tintenfischen	100
5.2	Nervenerregung	101
5.3	Elektrisches Modell einer Zellmembran	101
5.4	Messung von Zellmembranspannungen	102
5.5	EKG und Herzdipol	103
5.6	Stromschlag	105
6	Wärme	107
	Übersicht	107
6.1	Skikleidung	109
6.2	Wärmeverlust	110

Teil II. Physik in der Diagnostik und Therapie

7	Röntgendiagnostik und Computer Tomographie	115
	Übersicht	115
7.1	Bouguer-Lambert'sches Gesetz	119
7.2	Röntgenröhre	122
7.3	Spektrum einer Röntgenstrahlröhre	123
7.4	Intensitätsabschwächung	123
7.5	Kontrast	124
7.6	Streustrahlung	127
7.7	Quantenrauschen eines Röntgenbildverstärkers	128
7.8	Fourier-Rekonstruktion eines Bildes	130
7.9	Radon-Transformation eines kreisförmigen Objekts	132

7.10	Strahlaufhärtungs- und Partialvolumenartefake in der CT	132
7.11	Modulationsübertragungsfunktion eines CT-Scanners	134
8	Ultraschall	137
	Übersicht	137
8.1	Dopplerultraschall	140
8.2	Impedanz-Anpassung für Schallwellen	141
8.3	Fledermaus	144
8.4	Ultraschall Transducer-Array	144
8.5	Material einer Ultraschalllinse	146
8.6	Augenlinsenmessung mit Ultraschall-Impuls-Echo-Verfahren	147
8.7	Ultraschallwandler	148
9	Kernspinresonanz	149
	Übersicht	149
9.1	Zeemaneffekt und Kernspinresonanz	155
9.2	Magnetisierung und deren Relaxation	155
9.3	NMR Pulse und das rotierende Koordinatensystem	157
9.4	Fettsignalunterdrückung durch Inversion Recovery	159
9.5	Gradienten-Echo	161
9.6	Kontrast in MRI Aufnahmen	162
9.7	BOLD	165
9.8	FOV und Auflösung	166
9.9	Slice Selection	166
9.10	Longitudinale Relaxationszeit	168
9.11	Frequenz- und Phasenkodierung	169
9.12	Gradientenstärke und Field of View (FOV)	170
9.13	Muskelstimulierung durch gepulste Gradienten	170
9.14	Mehrschichttechnik bei Spin-Echo-Verfahren	171
9.15	Turbo-Spin-Echo Sequenz	171
9.16	Strahlenschutz in der MRI (HF-Absorption)	173
10	Nuklearmedizin und Positronen Emissions Tomographie	175
	Übersicht	175
10.1	Zerfallsreaktion	178
10.2	Mumienalter	179
10.3	Jod	179
10.4	Photomultiplier	180
10.5	Radionuklidgenerator	182
10.6	Positronen Emissions Tomographie	183
11	Rekonstruktionsverfahren	185
	Übersicht	185
11.1	Diskrete Fouriertransformation	188
11.2	Transferfunktion	189
11.3	Gefilterte Rückprojektion	192

12 Strahlenmedizin und Strahlenschutz	197
Übersicht	197
12.1 Wechselwirkungen eines hochenergetischen, primären Photons	201
12.2 Paarbildung in der Strahlentherapie	201
12.3 Comptonstreuung	202
12.4 Strahlenbelastung durch Kalium	203
12.5 Lethale Energiedosis	203
12.6 Tödliches Dosisäquivalent	204
12.7 Dosisbelastung durch Milchkonsum	206
13 Lasertherapie	209
Übersicht	209
13.1 Laser in der Augenheilkunde	211
13.2 Optische Größenbestimmung von Bakterien	212
13.3 Kleine Teilchen in der Laserpinzette	213
A Konstanten, Stoffgrößen und Werte	219
A.1 Wertetabellen	219
B Relevante Literatur	221
B.1 Physik	221
B.2 Medizinphysik	221
B.3 Mathematik	222
B.4 Medizin, Biologie und Chemie	222
B.5 Manuskripte und Sonstiges	223

Teil I
Physik des Körpers

1 Atmung und Stoffwechsel

Lebensprozesse basieren auf chemischen bzw. biochemischen Reaktionen und benötigen Energie. Während die meisten Pflanzen diese über die Photosynthese erhalten und energiereiche Verbindungen selbst synthetisieren können, müssen tierische Organismen diese mit der Nahrung aufnehmen. Die in den Verbindungen enthaltene Energie kann aber erst durch eine ausreichende Sauerstoffzufuhr freigesetzt werden. Die Sauerstoffaufnahme geschieht durch die Atmung. Hierbei gelangt der Sauerstoff (O_2) in die Lunge und von dort durch Diffusion in die roten Blutkörperchen, die ihn im ganzen Körper verteilen. Diffusion erledigt ebenso die Sauerstoffübertragung von den Blutkörperchen durch verschiedene Membranen in die Körperzellen, wo in biochemischen Reaktionen Energie freigesetzt wird. Ein Maß für die Sauerstoffkonzentration ist der Partialdruck. Er beträgt im arteriellen Blut ca. 20 kPa und sinkt entlang des Atemwegs bis auf etwa 13 kPa ab. Im Gewebe beträgt er ≈ 6 kPa. Mit der eingeatmeten Luft gelangt nicht nur Sauerstoff in die Lunge, sondern auch Luftbestandteile, die für den Körper unbrauchbar bzw. schädlich sind. Diese und das über den Stoffaustausch aus dem Blut abgegebene Kohlendioxid (CO_2) werden von der Lunge über die Ausatmung ausgeschieden.

Der Vorgang der Ein- und Ausatmung entsteht durch eine Brustraumveränderung, die diejenigen Muskeln leisten, die den Brustraum umgeben: Zwerchfell und Zwischenrippenmuskulatur. Pro Atemzug werden von einem erwachsenen Menschen ca. 0,5 l Luft bewegt. Beide Lungenflügel enthalten zwischen 300 bis 400 Millionen Lungenbläschen (Alveolen), die eine Oberfläche von bis zu 100 m^2 bilden. Auf dieser Oberfläche befindet sich ein Netz von Kapillaren. Der Austausch von Sauerstoff zwischen der Atemluft und dem Blut bzw. von Kohlendioxid zwischen Blut und Atemluft ist diffusionskontrolliert, d. h. auf Grund von Sauerstoff- bzw. Kohlendioxid-Partialdruckgradienten in der Grenzschicht zwischen Alveolen und Kapillaren entsteht hier ein molekularer O_2 -Strom bzw. CO_2 -Strom. Beide Ströme sind entgegengesetzt gerichtet. Außerhalb der Grenzschicht läuft der Transport in der Regel konvektiv ab. Der gleiche Übertragungsmechanismus findet an Zellwänden statt.

Zellwände trennen die in der Zelle enthaltenen Stoffe vom Äußeren der Zelle, dem Extrazellularraum, also z. B. von der Luft oder dem Blut. Im Allgemeinen weist der Intrazellularraum eine negative elektrische Ladung auf, der extrazelluläre dagegen eine positive. Die Differenz wird als das Membranpotenzial bezeichnet. Das Membranpotenzial wird durch aktiven und passiven Austausch von Ionen kontrolliert, vor allem Natriumionen (Na^+), Kaliumionen (K^+) und Chlorionen (Cl^-). In Analogie zu den Atmungsprozessen in der Lunge bezeichnet man diese zellulären Prozesse als Zellatmung. Die Berechnung des Stoffdurchgangs durch eine Membran, d. h. die Bestimmung der pro Zeiteinheit transportierten Stoffmengen ist sehr komplex und setzt die Kenntnis des Stoffübergangs an beiden Seiten der Membran voraus. Konzentrationsprofile, Stoffübergangs- und Diffusionskoeffizienten, fluid- und thermodynamische Parameter, sowie anatomische Geometrie Größen müssen bekannt sein. Je nach Konstitution und Alter eines Menschen

streuen die Werte erheblich, sodass Berechnungen oft nur näherungsweise durchgeführt werden können.

Bei Erkrankungen kann die Stoffwechselfunktion bestimmter Organe, z. B. der Niere, erheblich gestört sein. Ist bei einer Niere das funktionsfähige Gewebe bis zu 70% zerstört, kommt es zur Urämie. Die Urämie beschreibt einen Zustand, der durch zunehmende Anhäufung toxischer Substanzen im Blut infolge Nierenversagens gekennzeichnet ist. Durch die Überkonzentration der Giftstoffe im Blut werden auch die Stoffwechselprozesse in anderen Körperorganen gestört oder sogar unmöglich. Ein Weg der Behandlung ist der Einsatz einer „künstlichen Niere“. Dabei hat sich die Hämodialyse als außerkorporales Blutreinigungsverfahren bewährt. Die Aufgaben, die eine Dialyseapparatur zuverlässig erfüllen muss, um das Leben eines Patienten zu erhalten, sind im wesentlichen die Entfernung von Harnstoff und anderen stickstoffhaltigen Produkten, sowie die Regelung der Elektrolytkonzentrationen von Na^+ , K^+ und Cl^- im Blut. Während moderne Dialysegeräte diese Forderungen zur Reinigung des Blutes heute nahezu ideal erfüllen, sind sie jedoch nicht in der Lage, eine weitere Aufgabe der natürlichen Niere zu übernehmen. Dies ist die Produktion von Hormonen zur Bildung der roten Blutkörperchen. Dieser Mangel hat zur Folge, dass eine Dialysebehandlung mit einer Hormontherapie Hand in Hand gehen muss.

1.1 Atmung

Der mittlere Atemluftstrom für Ein-/Ausatmung beim Menschen beträgt $V^* = 10$ l/min.

- (a) Wie groß ist die mittlere Luftgeschwindigkeit in der Luftröhre (Durchmesser der Luftröhre $d_{LR} = 1,5$ cm) und bei Mundatmung zwischen den Lippen bei einer Mundöffnungsfläche von $A_M = 9$ cm² bei 0 °C in Meereshöhe?
- (b) Wie sieht der Luftdruck und die Dichte in Abhängigkeit von der Höhe z aus, und welche Atmungsprobleme resultieren dadurch beim Bergsteigen? Man bestimme anhand einer Abschätzung, auf welchen Wert der Atemstrom steigen muss, wenn sich ein Mensch in einer Höhe von 8.000 m befindet.

Modellmäßig soll die Atmungsphysik in Form einer Rechteckschwingung angenommen werden.

[Luftwerte: Molmasse $M_L = 28,96$ g/mol; Dichte bei 0 °C in Meereshöhe $\rho_{L0} = 1,29$ kg/m³ allgemeine Gaskonstante $R = 8,314$ J/mol K; Lufttemperatur $T = 0$ °C]

Die Atmung ist ein periodischer Vorgang, d. h. es herrschen nicht-stationäre Verhältnisse. Da hier aber mittlere Werte über die halbe Zykluszeit gegeben und gesucht sind, kann die Kontinuitätsgleichung in stationärer Form $V^* = wA$ genutzt werden. Daraus folgt für die mittlere Strömungsgeschwindigkeit

$$w = \frac{V^*}{A} = \frac{4V^*}{\pi d^2}.$$

- (a) Damit gilt für die Luftröhre

$$w_{LR} = \frac{4V_L^*}{\pi d_{LR}} = \frac{4 \cdot 101/\text{min}}{\pi (1,5 \text{ cm}^2)} = 0,94 \text{ m/s}$$

und für den Mund

$$w_M = \frac{V_M^*}{A_M} = \frac{101/\text{min}}{9 \text{ cm}^2} = 0,185 \text{ m/s}.$$

- (b) Beim Bergsteigen ist der Luftdruck p eine Funktion der Höhe z . Zur Herleitung von $p(z)$ betrachtet man ein Volumenelement $dx dy dz$ der Luft über der Höhe dz . Damit sich dieses im Gleichgewicht befindet, muss die Gewichtskraft durch die Druckdifferenz zwischen der Ober- und Unterseite gerade kompensiert werden:

$$[p(z + dz) - p(z)] dx dy + \rho_L g dx dy dz = 0.$$

Mit

$$p(z + dz) = p(z) + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

wird daraus

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_L g = 0.$$

Betrachtet man die Luft als ideales Gas, folgt aus der allgemeinen Gasgleichung

$$\frac{p}{\rho_L} = \frac{p_0}{\rho_{L0}}.$$

Damit findet man zwischen p und z die Differentialgleichung

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_{L0}}{p_0} g dz.$$

Man integriert

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_{L0}}{p_0} g \int_0^z dz$$

und erhält

$$p(z) = p_0 e^{-\gamma z} \quad \text{mit} \quad \gamma = \left(\frac{\rho_{L0}}{p_0} \right) g.$$

Numerisch $\gamma = \frac{1,29 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{1 \cdot 10^5 \text{ Pa}} = 1,265 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$.

Damit wird der Druck in 8.000 m Höhe

$$\begin{aligned} p_{8.000} &= (1 \cdot 10^5 \text{ Pa}) \exp [(-1,265 \cdot 10^{-4}) \cdot 8.000] \\ &= 36.349 \text{ Pa} = 0,36 \text{ bar.} \end{aligned}$$

Die Dichteabhängigkeit ρ_L folgt aus der allgemeinen Gasgleichung

$$p v_L = \frac{1}{M_L} RT.$$

Hier ist $v_L = \frac{1}{\rho_L}$ das spezifische Volumen von Luft. Damit wird die Dichte

$$\rho_L(z) = \frac{p(z) M_L}{RT} = \frac{p_0 M_L}{RT} e^{-\gamma z}.$$

Die Dichte in 8.000 m Höhe $\rho_{L8.000}$ ist demnach

$$\rho_{L8.000} = \frac{p_{8.000} M_L}{RT} = \frac{36.349 \cdot 0,02896}{8,314 \cdot 273} \text{ kg/m}^3 = 0,4637 \text{ kg/m}^3.$$

Geht man davon aus, dass der Volumenstrom der Atmung in etwa gleich bleibt, wird aber der Massenstrom der Luft kleiner um

$$\begin{aligned} \Delta m_L^* &= V_L^* (\rho_{L0} - \rho_{L8.000}) \\ &= 101/\text{min} (1,29 - 0,4637) \text{ kg/m}^3 = 8,263 \text{ g/min.} \end{aligned}$$

Bei einem Sauerstoffanteil $\mu_{\text{O}_2} = 23,2\%$ (Massenprozent) ist damit der zeitliche Sauerstoffeintrag gemindert um

$$\Delta m_{\text{O}_2}^* = \mu_{\text{O}_2} \cdot \Delta m_L^* = 0,232 \cdot 8,263 \text{ g/min} = 1,917 \text{ g/min.}$$

Durch eine Erhöhung des Atemstroms auf

$$V_{L8.000}^* = \frac{\rho_{L0} V_L^*}{\rho_{L8.000}} = 27,821/\text{min.}$$

ist es möglich, die zugeführte Sauerstoffmenge auszugleichen. Das ist gegenüber dem Atemstrom bei Nullniveau fast das dreifache. In dieser Rechnung wurde nur der Sauerstoffausgleich durch eine Vergrößerung des Luftstroms berücksichtigt. Für die Sauerstoffübertragung von der Lunge ins Blut ist auch die Partialdruckdifferenz zwischen diesen Phasen zu beachten. Im Rahmen der hier durchgeführten Abschätzung ist dies vernachlässigt worden.

Maßnahmen zu Vergrößerung des Sauerstoffstroms:

- Training der Zwerchfellmuskulatur, um den Lungendruck zu verkleinern,
- Atmungsfrequenz erhöhen,
- Nutzung eines Sauerstoffgerätes.

1.2 Höhengrenze des Menschen

Wenn der Sauerstoff-Partialdruck in den Alveolen unter den kritischen Wert von ungefähr $p(\text{O}_2, \text{Alveolen}) = 50 \text{ mmHg}$ sinkt, dann kommt es zu Störungen der Gehirnfunktion. Dieser Wert ist erreicht, wenn der Sauerstoff-Partialdruck in der Luft auf $p(\text{O}_2) = 12,9 \text{ kPa}$ absinkt. Man benutze die barometrische Höhenformel, um die dazugehörige Höhe auszurechnen, wobei die Zusammensetzung der Luft als konstant angenommen werden soll (Stickstoff und Edelgase: 79,1 %, Sauerstoff: 20,9 %, Kohlendioxid: 0,03 %). Ist die Höhengrenze, die sich ergibt, realistisch? Können Menschen auch in größerer Höhe leben? Wodurch wird die „ultimative“ Höhengrenze gesetzt?
[Dichte von Luft $\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$, Luftdruck bei NN $p(0) = 101,3 \text{ kPa}$]

A

Barometrische Höhenformel

$$p(h) = p(0)e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}} \Leftrightarrow h = \frac{p(0)}{\rho_0 g} \cdot \ln\left(\frac{p(0)}{p(h)}\right).$$

Der Referenz-Luftdruck beträgt 101,3 kPa. Aus dem gegebenen Sauerstoff-Partialdruck $p(\text{O}_2)$ lässt sich der Luftdruck $p(h)$ berechnen

$$p(h) = \frac{p(\text{O}_2)}{20,9\%} = 61,7 \text{ kPa.}$$

Die Höhengrenze beträgt daher etwa 4.000 m

$$h = \frac{101,3 \cdot 10^3 \text{ Pa m}^3 \text{ s}^2}{1,29 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m}} \ln\left(\frac{101,3}{61,7}\right) = 3.968,8 \text{ m.}$$

L

Durch sogenannte Mehratmung (auch O_2 -Mangelatmung genannt) kann der Sauerstoff-Partialdruck im Blut erhöht werden. Daher ist die Atmung ohne technische Hilfsmittel für Menschen bis etwa 7.000 m Höhe möglich. In der *Kompensationszone* von 3.000 m – 5.300 m kann der Körper sich anpassen. In der *Störungszone* (5.300 m – 7.000 m) ist die Leistungsfähigkeit der meisten Menschen stark eingeschränkt. Beispiele für die Gewöhnung an große Höhen sind z. B. das Lamakloster Rongbuk in Tibet (≈ 5.000 m) und die Bergarbeitersiedlung Auncanquilcha in Chile (≈ 5.300 m). In Höhen jenseits von 5.300 m ist für Menschen keine Akklimatisierung mehr möglich, daher ist ein Aufenthalt dort immer zeitlich limitiert.

Der Aufenthalt in größeren Höhen ist durch Sauerstoffatmung aus Druckflaschen möglich. ($p(O_2)$ fast so groß wie $p_{\text{Luft, außen}}$, daher steigt $p(O_2)$ in den Alveolen.) So sind Höhen bis etwa 12 km für Menschen erreichbar. Mit Mehratmung lässt sich dies bis 14 km steigern. Moderne Verkehrsflugzeuge fliegen daher, und wegen der Gefahr eines plötzlichen Druckabfalls, unterhalb von 14 km.

In Höhen von mehr als 14 km können sich Menschen nur noch mit Druckkabinen oder Druckanzügen (Raumanzügen) aufhalten. (Ohne Schutzvorrichtung würden z. B. ab etwa 20 km die Körperflüssigkeiten zu sieden beginnen, da $p_{\text{Luft}} < p_{\text{Dampfdruck}}(H_2O)$ ist bei 37°C).

1.3 Sauerstofftransfer im Hirn

A

Man kann sich die Sauerstoffversorgung in der Hirnrinde des Menschen aus Kapillaren durch Diffusion in einen, diese Kapillaren umgebenden, koaxialen Zylinder vorstellen (entsprechend Abbildung). In den Kapillaren fließt Blut, in den äußeren Zylindern befindet sich Hirngewebe. Solche Zylinder liegen gebündelt parallel nebeneinander. Die Zellwände sind für Sauerstoff durchlässige Membranen. Hier soll, ausgehend von der Diffusionsgleichung in Zylinderkoordinaten (siehe Gleichung (1.1)), die Partialdruckverteilung des Sauerstoffs $p(r)$ im äußeren Zylinder, also im Hirngewebe, bestimmt werden. Dabei soll am Kapillarrand $r = R$ ein Sättigungsdruck p_s herrschen und an der Oberfläche des Zylinders, bei $r = R_A$, der Sauerstoffpartialdruck minimal werden, sodass $\frac{dp}{dr}|_{r=R_A} = 0$. In die Größe K gehen Verbrauch und Stoffparameter der Diffusion ein, K sei bekannt. Es ist von stationären und axialsymmetrischen Verhältnissen auszugehen:

$$\frac{d^2p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} = K. \quad (1.1)$$

L

Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} = K$$

ist identisch mit

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dp}{dr} \right) = Kr.$$

Zweimalige Integration führt zu

$$p(r) = \frac{1}{4} K r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

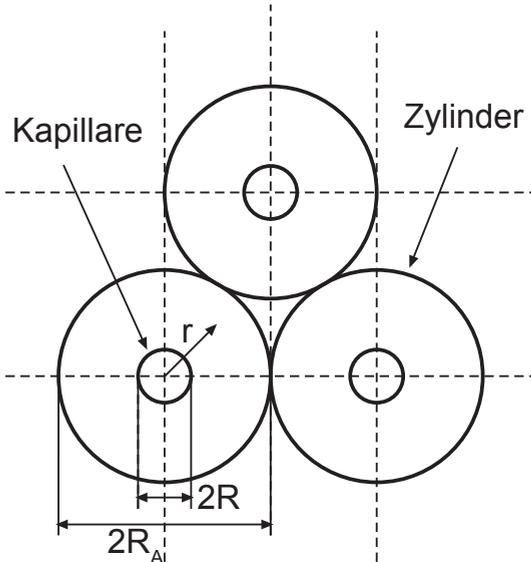


Abb. 1.1 Schema eines Querschnitts durch die Hirnrinde mit deren konzentrischen Zylindern.

mit den Integrationskonstanten C_1 und C_2 . Da an der Stelle $r = R_A$ der Sauerstoffpartialdruck minimal werden soll, muss hier $\frac{dp}{dr}|_{r=R_A} = 0$ sein. Dies und die Randbedingung, dass an der Stelle $r = R$ der Sättigungpartialdruck von Sauerstoff herrscht, also $p(R) = p_S$ ist, führt auf die Bestimmung von $C_1 = -\frac{1}{2} K R_A^2$ und $C_2 = p_S - \frac{1}{4} K R^2 + \frac{1}{2} K R_A^2 \ln R$. Damit wird

$$p(r) = p_S + K \left[\frac{1}{4} (r^2 - R^2) + \frac{1}{2} R_A^2 \ln \frac{R}{r} \right].$$

1.4 Photosynthese

- (a) Von der gesamten Strahlungsleistung der Sonne allen $P_S = 2 \cdot 10^{17} \text{ W}$ auf die Erde. Wieviel Prozent davon wird in der Photosynthese umgesetzt, wenn dabei $m_{\text{O}_2}^* = 2 \cdot 10^{12} \text{ t/a}$ frei werden? Die chemische Reaktionsgleichung der Photosynthese lautet $6\text{CO}_2 + 6\text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6 + 6\text{O}_2$. Dafür wird eine Gibbs'sche molare Enthalpie $\Delta G = +2.868 \text{ kJ/mol}$ benötigt.
- (b) Man schätze den jährlichen Verbrauch an Sauerstoff durch Atmung $N_{\text{O}_2, \text{total}}^*$ durch die Menschheit bei einer Weltbevölkerung von $n = 7$ Milliarden. Ein Mensch verbraucht pro Minute $N_{\text{O}_2}^* = 1,1 \cdot 10^{22}$ Sauerstoffmoleküle. Wie groß ist das Mengenverhältnis zwischen dem insgesamt von der Weltbevölkerung eingeatmeten und dem durch Photosynthese freigesetzten Sauerstoff auf der Welt?

A

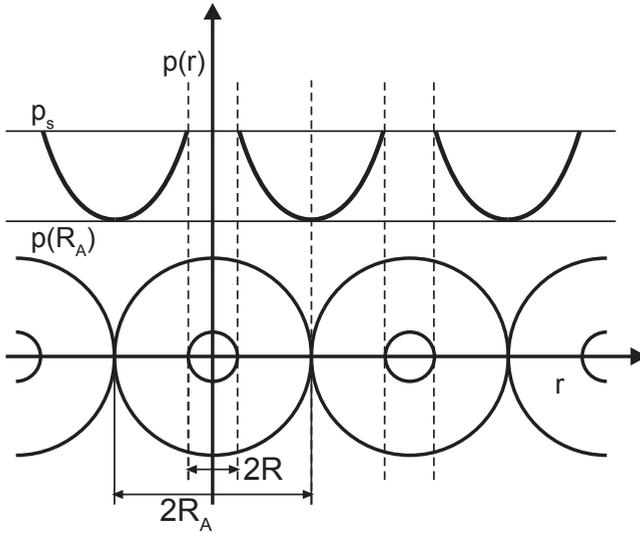


Abb. 1.2 Die Konzentration $p(r)$ bildet zwischen den Kapillaren Minima bei R_A .

- L** (a) Die Strahlungsleistung der Sonne ist $P_S = 2 \cdot 10^{17} \text{ W}$. Im Laufe eines Jahres wird die Energie somit

$$E_S = \tau P_S = (1 \text{ a}) \cdot (2 \cdot 10^{17} \text{ J/s}) = 6,32 \cdot 10^{24} \text{ J}.$$

Die chemische Reaktionsgleichung der Photosynthese



sagt aus, dass für einen Formelumsatz eine spezifische Enthalpie $\Delta G = 2.868 \text{ kJ/mol}$ verbraucht wird und dabei $N_{\text{O}_2\text{FU}} = 6$ Moleküle Sauerstoff entstehen (siehe Hinweis auf der gegenüberliegenden Seite). Damit wird die jährliche Molmenge an Sauerstoff durch die Photosynthese

$$N_{\text{O}_2\text{Ph}}^* = \frac{m_{\text{O}_2}^*}{M_{\text{O}_2}} = \frac{(2 \cdot 10^{12} \text{ t/a}) (10^6 \text{ g/t})}{32 \text{ g/mol}} = 6,25 \cdot 10^{16} \text{ mol/a}$$

mit M_{O_2} als Molmasse des Sauerstoffmoleküls.

Die gesamte dafür benötigte Energie E_{ph} pro Jahr ist somit

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\text{ph}} &= \frac{N_{\text{O}_2\text{Ph}}^* \tau \Delta G}{N_{\text{O}_2\text{FU}}} = \frac{(6,25 \cdot 10^{16} \text{ mol/a}) (1 \text{ a}) (2.868 \text{ kJ/mol})}{6} \\ &= 2,987 \cdot 10^{22} \text{ J}. \end{aligned}$$

Der Anteil Φ der zur Photosynthese genutzten Sonnenenergie wird dann

$$\Phi = \frac{E_{\text{ph}}}{E_S} \cdot 100\% = \frac{2,98 \cdot 10^{22} \text{ J}}{6,25 \cdot 10^{24} \text{ J}} \cdot 100\% = 0,473\%.$$

- (b) Ein Mensch verbraucht pro Minute $N_{O_2}^* = 1,1 \cdot 10^{22}$ 1/min Sauerstoffmoleküle. Dies entspricht

$$N_{O_2, \text{mol}}^* = \frac{N_{O_2}^*}{N_A}$$

mit N_A als Avogadrozahl. Numerisch

$$N_{O_2, \text{mol}}^* = \frac{1,1 \cdot 10^{22} \text{ 1/min}}{6,02 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}} = 1,81 \cdot 10^{-2} \text{ mol/min.}$$

Die totale Sauerstoffmenge $N_{O_2, \text{total}}^*$, die pro Jahr von der Weltbevölkerung von $n = 7 \cdot 10^9$ Menschen verbraucht wird, ist somit

$$N_{O_2, \text{total}}^* = n \cdot N_{O_2, \text{mol}}^*$$

Numerisch

$$\begin{aligned} N_{O_2, \text{total}}^* &= (7 \cdot 10^9) (0,01806 \text{ mol/min}) = 1,26 \cdot 10^8 \text{ mol/min} \\ &= (1,26 \cdot 10^8 \text{ mol/min}) (5,26 \cdot 10^5 \text{ min/a}) = 6,65 \cdot 10^{13} \text{ mol/a.} \end{aligned}$$

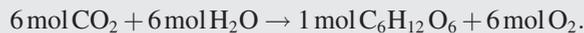
Das Mengenverhältnis Ψ von eingeatmeter zu freigesetzter Sauerstoffmenge ist dann

$$\Psi = \frac{N_{O_2, \text{total}}^*}{N_{O_2, \text{Ph}}^*} \cdot 100\% = \frac{6,65 \cdot 10^{13}}{6,25 \cdot 10^{16}} \cdot 100\% = 0,11\%.$$

Ergänzender Hinweis zur Reaktionsgleichung:



Man beachte die Angabe der molaren Gibb'schen Energie [kJ/mol], dies ist die molspezifische Energie, die chemischen Reaktionen pro Formelumsatz zugeführt werden muss, um diese zu ermöglichen (ist ΔG negativ, muss Wärme abgeführt werden). Zum leichteren Verständnis kann es hilfreich sein, die Gleichung mit der Einheit mol zu multiplizieren



Es entsteht also pro Formelumsatz 1 mol $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$. Da für einen Formelumsatz eine molare Wärmemenge von ΔG gebraucht wird, benötigt man demnach für 1 mol $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$

$$\Delta E_Z = \Delta G \cdot \frac{1}{1} \text{ mol} = 2.868 \text{ kJ}$$

und für die Erzeugung von 1 mol O_2

$$\Delta E_S = \Delta G \cdot \frac{1}{6} \text{ mol} = 478 \text{ kJ.}$$

1.5 Erythrozyten: Sauerstofftransport im Körper

A

- (a) Wieviele Sauerstoffmoleküle $N_{O_2}^*$ werden pro Minute im Blut transportiert, wenn das Atemminutenvolumen eines Menschen $V_{O_2}^* = 101/\text{min}$ beträgt? Die Sauerstoffkonzentrationen der ein- und ausgeatmeten Luft sei $c_{O_2a} = 21 \text{ Vol\%}$ bzw. $c_{O_2w} = 16,5 \text{ Vol\%}$ bei einem Druck von $p = 10^5 \text{ Pa}$ und einer Temperatur von $T = 300 \text{ K}$.
- (b) Im gesättigten Zustand transportiert ein Hämoglobinmolekül 4 Sauerstoffmoleküle. Wieviele Hämoglobinmoleküle N_{HG} befinden sich in einem Erythrozyten bei einer Blutmenge von $V_B = 6 \text{ l}$, einer mittleren Blutumlauzeit von $\tau = 50 \text{ s}$ und $N_{Ery} = 5 \cdot 10^6 \text{ l}/\mu\text{l}$ Erythrozyten im Blut?
- (c) Wie groß ist die mittlere Lebensdauer τ_L der Erythrozyten wenn $N_{Ery,a}^* = 3 \cdot 10^6$ Erythrozyten pro Sekunde im Körper neu gebildet werden?

L

- (a) Die Anzahl der Sauerstoffmoleküle pro Zeiteinheit $N_{O_2}^*$ kann aus der allgemeine Gasgleichung ermittelt werden. Sie lautet hier

$$pV_{O_2}^* = N_{O_2}^* kT$$

mit k als Boltzmann-Konstante. Auflösen nach $N_{O_2}^*$ ergibt

$$N_{O_2}^* = \frac{pV_{O_2}^*}{kT} = \frac{pV^* \Delta c_{O_2}}{kT}$$

mit $\Delta c_{O_2} = c_{O_2a} - c_{O_2w}$. Numerisch findet man

$$N_{O_2}^* = \frac{10^5 \text{ Pa } 101/\text{min} (0,21 - 0,165)}{1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K } 300 \text{ K}} = 1,09 \cdot 10^{22} \text{ min}^{-1}.$$

- (b) Da ein Hämoglobinmolekül 4 Sauerstoffmoleküle transportiert, ist der Hämoglobinstrom

$$N_{HG}^* = \frac{N_{O_2}^*}{4} = \frac{1,087}{4} \cdot 10^{22} \text{ min}^{-1} = 2,718 \cdot 10^{21} \text{ min}^{-1}.$$

Weil 6l Blut in der Umlaufzeit $\tau = 50 \text{ s}$ durch den ganzen Körper fließen, beträgt der Blutstrom

$$V_B^* = \frac{V_B}{\tau} = \frac{6 \text{ l}}{50 \text{ s}} = 0,12 \text{ l/s} = 0,12 \text{ l/s } 60 \text{ s/min} = 7,2 \text{ l/min}.$$

In einem Liter Blut befinden sich $N_{Ery} = 5 \cdot 10^{12}$ Erythrozyten, so dass der Erythrozytenstrom

$$N_{Ery}^* = 7,2 \text{ l/min } 5 \cdot 10^{12} \text{ l} = 3,6 \cdot 10^{13} \text{ min}^{-1}$$

wird. Hierbei geht man von der Voraussetzung aus, dass alle Erythrozyten in 50s den Körper durchlaufen; sie kommen ohne Sauerstoffbeladung in der Lunge an und werden dort mit O_2 gesättigt. Damit wird das Verhältnis

$$\frac{N_{HG}^*}{N_{Ery}^*} = \frac{N_{HG}}{N_{Ery}} = \frac{2,718 \cdot 10^{21}}{3,6 \cdot 10^{13}} = 7,55 \cdot 10^7.$$

In einem Erythrozyten befinden sich also $N_{HG} = 7,55 \cdot 10^7$ Hämoglobinmoleküle.¹

¹Vergleich mit Werten aus der Literatur; E. Buddecke gibt die Masse des Hämoglobins in einem Erythrozyten mit (30–32) pg und P. Karlson die Molmasse des Hämoglobins mit 6.7000 g/mol an. Daraus errechnet sich ein mittlerer Wert für N_{HG} zu $6,4 \cdot 10^7$.

- (c) Für die Erythrozyten lässt sich folgende Ratengleichung aufstellen. Diese besagt, dass die Rate mit der sich die Zahl der Erythrozyten im Körper ändert gleich ist der Differenz zwischen der Erzeugungsrate und der Zerfallsrate, welche proportional zur Anzahl der Erythrozyten und umgekehrt proportional zur Lebensdauer τ_L ist (τ_L sei konstant).

$$\frac{dN_{Ery}}{dt} = -\frac{N_{Ery}}{\tau_L} + N_{Ery,a}^*$$

Im Gleichgewicht ändert sich die Zahl der Erythrozyten nicht, also gilt für die Erythrozytenerzeugungsrate

$$N_{Ery,a}^* = \frac{N_{Ery}}{\tau_L}$$

Nach der mittleren Lebensdauer τ_L aufgelöst, ergibt sich

$$\tau_L = \frac{N_{Ery}}{N_{Ery,a}^*} = \frac{3 \cdot 10^{13}}{3 \cdot 10^6} \text{ s} = 10^7 \text{ s} = 116 \text{ d.}$$

1.6 Netzwerktheorie des menschlichen Atmungsapparates

Die Gesetze der Transportphänomene (Massenflüsse, elektrische Ströme, Wärmeströme und Impulsflüsse) sind gleichartig und zeigen viele Analogien. Sie lassen darum gegenseitige Modellierungen zu. Aufgrund der leichten Experimentiermöglichkeiten und der günstigen Messtechniken ist die Modellierung mechanischer Strömungsprobleme durch elektrische Analoggrößen besonders beliebt. Als Grundmodell dient dabei ein geladener Kondensator mit der Kapazität C , der über einen Stromkreis mit dem Ohm'schen Widerstand R während der Zeit t entladen wird. Mit einem solchen Modell kann auch die Atemströmung in der Lunge beschrieben werden. Der elektrische Widerstand R entspricht dem Strömungswiderstand der Lunge: $\frac{\Delta p}{V^*}$ mit V^* als Atemstrom; die elektrische Kapazität C entspricht der Dehnbarkeit der Lunge $\frac{\Delta V}{\Delta p}$.

- (a) Wie sieht die entsprechende Differentialgleichung für die zeitliche Abhängigkeit des elektrischen Entladungsstroms $I(t)$ in einem elektrischen System aus und wie lautet die Lösung für die Anfangsbedingung $I(t=0) = I_0$?
- (b) Wie lautet die zu (a) analoge Differentialgleichung für die Atemströmung der Lunge und deren Lösung unter Vorgabe des Atemzugvolumens V_0 ?
- (c) Ist die Zeit, die benötigt wird um 99% der eingatmeten Luft wieder auszuatmen, bei Neugeborenen mit steiferer Lunge länger als bei Erwachsenen?

[Erwachsene: $R_E = 0,15 \frac{\text{kPa} \cdot \text{s}}{\text{l}}$; $C_E = 2.000 \frac{\text{ml}}{\text{kPa}}$; Neugeborene: $R_N = 2,5 \frac{\text{kPa} \cdot \text{s}}{\text{l}}$; $C_N = 75 \frac{\text{ml}}{\text{kPa}}$]

L

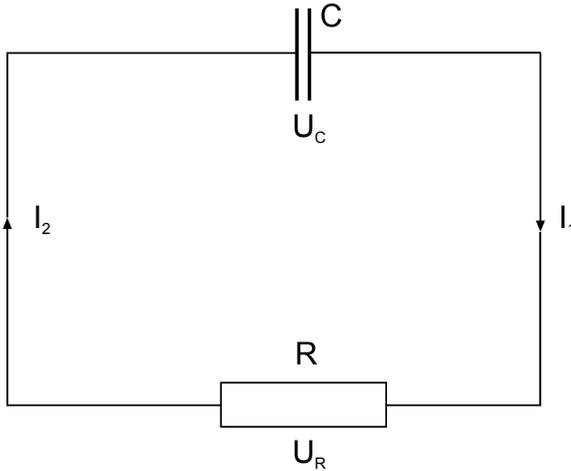


Abb. 1.3 Prinzipskizze des elektrischen Modells.

(a) Für die elektrische Stromstärke gilt

$$I_1 = I_2 = I \quad (1.2)$$

und für die elektrische Spannungen

$$U_C = -U_R. \quad (1.3)$$

Da $U_C = \frac{Q}{C}$ mit Q als Ladung des Kondensators und $U_R = IR$ ist, folgt

$$\frac{Q}{C} = -IR. \quad (1.4)$$

Ableiten ergibt die Differentialgleichung

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{I}{RC}. \quad (1.5)$$

Trennen der Variablen und Integration ergibt

$$\int_{I_0}^I \frac{1}{I} dI = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$$

und

$$I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{1}{RC}t\right). \quad (1.6)$$

(b) Folgende Analogien treten auf: der Atemstrom entspricht der elektrischen Stromstärke ($V^* \hat{=} I$); das Lungeneinzugsvolumen entspricht der elektrischen Ladungsmenge ($V \hat{=} Q$); der Lungendruck entspricht der elektrischen Spannung ($p \hat{=} U$). Die Dehn-