

 150 Jahre  
*Wissen für die Zukunft*  
Oldenbourg Verlag



---

# Signalverarbeitung

---

Zeit-Frequenz-Analyse und Schätzverfahren

---

von

Prof. Dr. Uwe Kiencke,

Dipl.-Ing. Michael Schwarz,

Dipl.-Ing. Thomas Weickert

---

Oldenbourg Verlag München

---

---

**Prof. Dr. Uwe Kiencke** lehrt seit 1992 an der Universität Karlsruhe (TH) am Institut für Industrielle Informationstechnik (IIT). Nach Studium und Promotion war er von 1972-1987 bei der Robert Bosch GmbH, Schwieberdingen und von 1988-1992 bei Siemens Automotive, Regensburg. 1987 wurde er mit dem Arch T. Colwell Merit Award der Society of Automotive Engineers (USA) ausgezeichnet.

**Dipl.-Ing. Michael Schwarz** ist Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Industrielle Informationstechnik der Universität Karlsruhe (TH).

**Dipl.-Ing. Thomas Weickert** ist Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Industrielle Informationstechnik der Universität Karlsruhe (TH).

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© 2008 Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH  
Rosenheimer Straße 145, D-81671 München  
Telefon: (089) 45051-0  
oldenbourg.de

Das Werk einschließlich aller Abbildungen ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen.

Lektorat: Anton Schmid  
Herstellung: Dr. Rolf Jäger  
Coverentwurf: Kochan & Partner, München  
Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier  
Druck: Grafik + Druck, München  
Bindung: Thomas Buchbinderei GmbH, Augsburg

ISBN 978-3-486-58668-8

# Vorwort

In den letzten Jahren hat sich die Zeit-Frequenz-Analyse zu einer wichtigen Teildisziplin der Signalverarbeitung entwickelt, mit der auch Signale mit zeitvarianten Spektren behandelt werden können. Diese ist Teil einer Vorlesung, die ich an der Universität Karlsruhe halte.

Als mein Vorgänger Prof. Heinz Kronmüller im Jahre 1992 seine Abschiedsvorlesung hielt, machte er die Aussage, in der Signalverarbeitung seien nun alle wesentlichen Probleme gelöst. Gott sei Dank hat er sich in diesem Punkte geirrt. Bereits im Jahre 1996 musste ich die von ihm übernommene Vorlesung Signalverarbeitung wesentlich erweitern. So kommt es, dass ca.  $\frac{2}{3}$  des heutigen Stoffumfangs erst in den letzten Jahren neu hinzukam, wobei die vorherigen Themen stark gekürzt wurden.

Die im Wesentlichen hinzugekommene Zeit-Frequenz-Analyse umfasst die Signaldarstellung in Frames, die Kurzzeit-Fourier-Transformation, die Wavelet-Transformation und die Wigner-Ville-Verteilung. Als die Idee geboren wurde, aus dem Skriptum ein Buch zu entwickeln, war mir mein Mitarbeiter Dipl.-Ing. Michael Schwarz eine wichtige Stütze. Mit ihm konnte ich z. B. Beweise über Monate hinweg solange diskutieren, bis sie endlich mathematisch exakt waren. Mein Mitarbeiter Dipl.-Ing. Thomas Weickert steuerte aus seiner Forschungsarbeit die Abschnitte über die Wavelet Packets bei, die neue interessante Anwendungen für die Wavelet-Transformation eröffnen. Beiden Koautoren gilt mein Dank. Außerdem danke ich Herrn cand. el. Konrad Christ für die Erstellung des Skriptums und dem Oldenbourg Verlag für die Bereitschaft, das entstandene Buch zu vertreiben.

Das vorliegende Buch wendet sich an Studenten eines Master-Studiengangs und an Ingenieure, die auf dem Gebiet der Signalverarbeitung arbeiten. Den Leser mögen beim ersten Kennenlernen des Buches die vielen Formeln und die langen mathematischen Beweise abschrecken. Bei näherem Hinsehen wird er aber den Vorteil erkennen, dass alle Ableitungen Zeile für Zeile nachvollziehbar sind und dass nur die gängige Ingenieurmathematik verwendet wird. Als Eingangskenntnisse werden lediglich die Grundlagen der Signalverarbeitung vorausgesetzt, wie sie z. B. in [20], [23] und [35] zu finden sind. Eine Vielzahl von Beispielen aus aktuellen Projekten soll dazu beitragen, den Anwendungsbezug herzustellen. Damit werden die Leser in die Lage versetzt, sich den Stoff selbst anzueignen, und sich die weiterführende Literatur zu erschließen.

Mein Dank gilt neben den beiden Koautoren auch meiner Frau Margarete, die mich ermutigt hat, dieses Buch fertigzustellen, obwohl ich viele Wochenenden und immer wieder Teile unseres Urlaubs dafür verwendet habe.

Karlsruhe, März 2008

U. Kiencke



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Signaldarstellung in Funktionenräumen</b>	<b>1</b>
1.1	Energie- und Leistungssignale .....	1
1.1.1	Energiesignale .....	1
1.1.2	Leistungssignale .....	5
1.1.3	Korrelation bei Leistungs- und Energiesignalen .....	6
1.1.4	Zeitdiskrete Signale .....	7
1.2	Integraltransformationen .....	9
1.3	Zeitdauer und Bandbreite von Energiesignalen .....	11
1.3.1	Mittlere Zeit, mittlere Frequenz, Zeitdauer, Bandbreite .....	11
1.3.2	Mittlere Frequenz und Bandbreite im Zeitbereich .....	12
1.3.3	Mittlere Zeit und Zeitdauer im Frequenzbereich .....	18
1.4	Fensterfunktionen .....	22
1.4.1	Verschiebungs-Invarianz .....	22
1.4.2	Leckeffekt .....	25
1.4.3	Unschärferelation .....	25
1.4.4	Gauß-Impuls .....	26
1.4.5	Effektive Zeitdauer und Bandbreite .....	28
1.5	Skalierung .....	32
1.5.1	Skalierung im Zeit- und Frequenzbereich .....	32
1.5.2	Skalierungs-Invarianz .....	35
1.6	Hilbert-Räume .....	35
1.6.1	Basisfunktionen .....	35
1.6.2	Orthonormalität und Biorthonormalität .....	44
1.6.3	Frames .....	48
1.6.4	Tight Frames .....	54
1.6.5	Frames mit verschobenen Fensterfunktionen .....	61
<b>2</b>	<b>Kurzzeit-Fourier-Transformation</b>	<b>69</b>
2.1	Kontinuierliche Signale und Systeme .....	69
2.1.1	Verschiedene Interpretationen .....	69
2.1.2	Spektrogramm .....	75
2.1.3	Verschiebungs-Invarianz .....	76
2.1.4	Rekonstruktion des Signals im Zeitbereich .....	77
2.1.5	Beispiele zur Kurzzeit-Fourier-Transformation .....	78

2.2	Gabor-Reihe .....	87
2.2.1	Diskretisierung von Zeit- und Frequenzverschiebung .....	87
2.2.2	Abtasttheorem für die Zeit-Frequenz-Verteilung .....	89
2.2.3	Rekonstruktion des Signals im Zeitbereich .....	92
2.2.4	Gabor-Reihe als Frame .....	94
2.3	Diskrete Kurzzeit-Fourier-Transformation .....	99
2.3.1	Definition .....	99
2.3.2	Rekonstruktion des zeitdiskreten Signals .....	102
2.3.3	Berechnung der Synthesefunktionen .....	103
2.3.4	Filterbank-Interpretation .....	108
<b>3</b>	<b>Wavelet-Transformation</b> .....	<b>113</b>
3.1	Kontinuierliche Signale .....	113
3.1.1	Skalierung des Analysefensters .....	113
3.1.2	Definition der Wavelet-Transformation .....	115
3.1.3	Skalogramm .....	118
3.1.4	Zulässigkeitsbedingung .....	119
3.1.5	Als Wavelet zulässige Signale .....	120
3.2	Eigenschaften .....	124
3.2.1	Verschiebungs- und Affin-Invarianz .....	124
3.2.2	Verteilung der Signalenergie .....	126
3.2.3	Energieerhaltung .....	127
3.2.4	Rekonstruktion des Signals im Zeitbereich .....	129
3.2.5	Lokalisierungseigenschaft .....	130
3.2.6	Reproduzierender Kern .....	132
3.3	Wavelet-Funktionen .....	134
3.3.1	Gabor-Wavelet (Morlet-Wavelet) .....	134
3.3.2	Haar-Wavelet .....	140
3.3.3	Shannon-Wavelet .....	141
3.4	Semidiskrete, dyadische Wavelets .....	141
3.4.1	Dyadisch diskretisierter Skalierungsfaktor .....	142
3.4.2	Rekonstruktion des Signals im Zeitbereich .....	144
<b>4</b>	<b>Wavelet-Filterbänke</b> .....	<b>149</b>
4.1	Dyadische Wavelet-Reihen .....	149
4.1.1	Diskretisierung von Skalierung und Zeitverschiebung .....	149
4.1.2	Wavelet-Reihen zeitdiskreter Signale .....	151
4.2	Multiraten-Filterbank .....	152
4.2.1	Signalardarstellung in Unterräumen .....	153
4.2.2	Diskrete Wavelet-Transformation (Signalanalyse) .....	156
4.2.3	Inverse Diskrete Wavelet-Transformation (Signalsynthese) .....	160
4.2.4	Anwendungsbeispiele zur Multiraten-Filterbank .....	164
4.2.5	Praktische Anwendung der Multiraten-Filterbänke .....	170

4.3	Herleitung der Wavelet- und Skalierungsfunktionen .....	171
4.3.1	Konzept .....	171
4.3.2	Definition der Unterräume .....	172
4.3.3	Berechnung der Skalierungsfunktion .....	174
4.3.4	Berechnung der Wavelet-Funktion .....	177
4.3.5	Zusammenfassung der Vorgehensweise .....	181
4.4	Skalierungsfilter .....	183
4.4.1	Länge der Impulsantwort .....	184
4.4.2	Orthonormalität der Skalierungsfunktion .....	184
4.4.3	Teilsommen der Impulsantwort .....	185
4.4.4	Skalierungskoeffizienten .....	187
4.4.5	Daubechies-Filter .....	189
4.4.6	Verschwindende $k$ -te Momente des Wavelets .....	194
4.4.7	Berechnung von Skalierungsfunktion und Wavelet .....	195
4.5	Wavelet Packets .....	207
4.5.1	Erweiterung der Multiraten-Filterbänke .....	209
4.5.2	Redundanz des Wavelet-Packet-Baumes .....	212
4.5.3	Suchen einer Besten Basis .....	214
4.6	Analytische Wavelets und Wavelet Packets .....	217
4.6.1	Schwächen reeller Wavelets .....	218
4.6.2	Analytische Basisfunktionen .....	220
4.6.3	Dual-Tree Complex Wavelet Transform (DTCWT) .....	221
4.6.4	Analytische Wavelet Packets (AWP) .....	230
4.6.5	Stochastische Eigenschaften .....	234
<b>5</b>	<b>Wigner-Ville-Verteilung</b> .....	<b>241</b>
5.1	Definition .....	241
5.1.1	Ambiguitätsfunktion .....	241
5.1.2	Wigner-Ville-Verteilung .....	244
5.1.3	Kreuz-Wigner-Ville-Verteilung .....	245
5.2	Eigenschaften der Wigner-Ville-Verteilung .....	246
5.2.1	Allgemeine Eigenschaften .....	246
5.2.2	Momentanfrequenz und Gruppenlaufzeit .....	250
5.2.3	Produkt bzw. Faltung zweier Signale .....	254
5.2.4	Moyals Formel .....	256
5.2.5	Spektrogramm und Skalogramm .....	257
5.2.6	Rekonstruktion des Signals im Zeitbereich .....	259
5.2.7	Pseudo-Wigner-Ville-Verteilung .....	260
5.2.8	Smoothed Pseudo-Wigner-Ville-Verteilung .....	261
5.3	Kreuzterme bei der Wigner-Ville-Verteilung .....	261
5.3.1	Wigner-Ville-Verteilung einer Summe von Signalen .....	261
5.3.2	Wigner-Ville-Verteilung des analytischen Signals .....	267
5.3.3	Cohen-Klasse (Fensterung der Ambiguitätsfunktion) .....	268
5.3.4	Affine Klasse (Fensterung der Ambiguitätsfunktion) .....	280

5.3.5	Reassignment-Methode .....	281
5.3.6	Signalabhängige Filterung der Wigner-Ville-Verteilung .....	282
5.3.7	Zeit-Frequenz-Verteilungsreihe .....	284
5.4	Diskrete Wigner-Ville-Verteilung .....	286
<b>6</b>	<b>Eigenwert-Verfahren</b> .....	<b>289</b>
6.1	Karhunen-Loève-Transformation (KLT) .....	289
6.1.1	Definition und Eigenschaften .....	289
6.1.2	Zeitdiskrete Karhunen-Loève-Transformation .....	291
6.1.3	Approximation durch Cosinus-Transformation .....	296
6.2	Matched Filter .....	302
6.2.1	Maximierung des Signal-Störverhältnisses .....	302
6.2.2	Korrelations-Empfänger .....	304
6.2.3	Orthogonale Regression .....	306
<b>7</b>	<b>Begriffe der Schätztheorie</b> .....	<b>309</b>
7.1	Unterdrückung von Störgrößen .....	309
7.1.1	Störgrößen-Kompensation .....	310
7.1.2	Mittelwertbildung .....	311
7.1.3	Schätzung .....	311
7.2	Modellbildung .....	312
7.2.1	Fehlermodell .....	312
7.2.2	Lineares Signalmodell durch Zerlegung in Basisfunktionen .....	313
7.2.3	AR-Signalmodell .....	316
7.2.4	Markov-Prozess .....	317
7.3	Beurteilungskriterien von Schätzfiltern .....	320
7.3.1	Erwartungstreue .....	321
7.3.2	Konsistenz .....	322
7.3.3	Effizienz .....	324
<b>8</b>	<b>Parameterschätzung</b> .....	<b>325</b>
8.1	Least-Squares-Schätzer .....	325
8.1.1	Parameterschätzung für ein lineares Signalmodell .....	325
8.1.2	Filterbank-Methode .....	331
8.1.3	Identifikation von Systemfunktionen .....	339
8.2	Gauß-Markov-Schätzer (Minimum Mean Square Error, MMSE) .....	343
8.3	Möglichkeiten zur Verbesserung der Schätzung .....	347
8.3.1	Lineare Transformation der Messwerte vor der Schätzung .....	347
8.3.2	Erhöhung des Stichprobenumfangs .....	348
8.3.3	Vorabmittelung der Messwerte .....	349
8.4	Rekursiver Least-Squares-Schätzer (RLS) .....	350
8.4.1	Ableitung aus dem Least-Squares-Schätzer .....	351

8.4.2	Rekursiver LS-Schätzer für zeitvariante Signale .....	355
8.4.3	Discrete Root Filter Method in Covariance Form .....	357
8.5	AR-Schätzung .....	359
8.5.1	Yule-Walker-Gleichung .....	360
8.5.2	Prädiktionsfilter .....	361
8.5.3	Prädiktionsfehlerleistung .....	362
8.5.4	Minimalphasigkeit des AR-Prädiktorfilters .....	365
8.6	Bayes-Schätzung .....	365
8.6.1	Maximum-a-posteriori-Schätzer .....	365
8.6.2	Maximum-Likelihood-Schätzer .....	369
8.6.3	Boltzmannsche $H$ -Funktion .....	373
8.6.4	Cramér-Rao-Ungleichung .....	375
<b>9</b>	<b>Zustandsschätzung</b> .....	<b>381</b>
9.1	Kalman-Filter .....	381
9.1.1	Systemmodell .....	381
9.1.2	Herleitung der Kalman-Gleichungen .....	382
9.1.3	Interpretation .....	387
9.1.4	Bestimmung der Varianz von Fehlersignalen .....	390
9.1.5	Farbiges System- und Messrauschen .....	390
9.2	Extended Kalman-Filter .....	391
<b>A</b>	<b>Sätze und Definitionen</b> .....	<b>401</b>
A.1	Fourier-Transformation .....	401
A.1.1	Verschiebungssatz .....	401
A.2	Der Satz von Parseval .....	401
A.3	Ergodizität .....	402
A.4	Schwarzsche Ungleichung .....	402
A.5	Matrix-Inversions-Lemma .....	402
<b>B</b>	<b>Beweise</b> .....	<b>403</b>
B.1	Zeitdiskrete Poissonsche Summenformel .....	403
B.2	Innenprodukt von Gabor-Wavelets .....	405
B.3	Half-Sample-Delay-Bedingung .....	406
<b>C</b>	<b>Symbole</b> .....	<b>411</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b> .....	<b>413</b>
	<b>Index</b> .....	<b>415</b>



# 1 Signaldarstellung in Funktionenräumen

Signale werden vorteilhafterweise als Elemente in einem Funktionenraum dargestellt. Dabei unterscheiden wir zwischen Energie-, Leistungs- und Zufallssignalen. Funktionensysteme, welche den Funktionenraum aufspannen, müssen die Eigenschaft der Vollständigkeit aufweisen (Hilbert-Raum). Neben Basisfunktionen werden Frames eingeführt, mit denen sich leichter eine redundante Signaldarstellung erreichen lässt.

Mit Hilfe von Integraltransformationen (z. B. Fourier-Transformation) werden zeitabhängige Signale in eine andere Darstellung überführt, z. B. in Abhängigkeit von der Frequenz. In der neuen Darstellung lassen sich manche Signaleigenschaften besser erkennen. Zur einfacheren Charakterisierung, wo die wesentlichen Signalanteile im Zeit- und Frequenzbereich lokalisiert sind, werden die mittlere Zeit, die mittlere Frequenz, die Zeitdauer und die Bandbreite eingeführt. Letztere können nicht beliebig gewählt werden, sondern verändern sich gegenläufig zueinander. Bei Vergrößerung der Zeitdauer wird die Bandbreite kleiner und umgekehrt. Das Zeitdauer-Bandbreite-Produkt ist damit eine wichtige Signal-Eigenschaft, die insbesondere für Fensterfunktionen und den von diesen verursachten Leckeffekt von Bedeutung ist. Ein weiterer wichtiger Begriff ist die Kompaktheit von Fensterfunktionen, weil von ihm abhängt, wie geeignet aus Fenstern abgeleitete zeit- oder frequenzverschobene Funktionensysteme sind, den Funktionenraum aufzuspannen. Dazu wird eine formelle Bedingung für die Kompaktheit formuliert. Aus solchen kompakten Funktionen werden in den folgenden Kapiteln Fenster für die Kurzzeit-Fourier-Transformation (Kapitel 2) und Mother-Wavelets für die Wavelet-Transformation erzeugt (Kapitel 3).

## 1.1 Energie- und Leistungssignale

Im Folgenden sollen einige Grundlagen der Signalverarbeitung kurz wiederholt werden, die als bekannt vorausgesetzt werden, und die z. B. in [20], [23] und [35] dargestellt sind.

### 1.1.1 Energiesignale

#### **Definition 1.1** *Energiesignale*

Energiesignale haben über einem unendlich großen Definitionsintervall  $t \in [-\infty, \infty]$  eine endliche Signalenergie.

Die quadratische Norm von Energiesignalen ist gleich der Signalenergie.

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (1.1)$$

$$E_x = \|x(t)\|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle_t \quad (1.2)$$

Dabei ist

$$s_{xx}^E(t) = |x(t)|^2 \quad (1.3)$$

die Energiedichte über der Zeit. Sie gibt an, welche Energieanteile des Signals zu welchen Zeiten auftreten. Der Quotient

$$\frac{s_{xx}^E(t)}{\|x(t)\|^2} \quad (1.4)$$

ist die normierte Energiedichte, wobei die normierte Signalfunktion die Energie  $E_x = 1$  hat. Nach dem Satz von Parseval (siehe Anhang A.2) ändert sich die Signalenergie bei der Fourier-Transformation nicht, da diese ein unitärer Operator ist.

$$E_x = \|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s_{xx}^E(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1.5)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}^E(f) df = \|X(f)\|^2 \quad (1.6)$$

$S_{xx}^E(f)$  ist das Energiedichtespektrum über der Frequenz. Es gibt an, welche Energieanteile des Signals bei welchen Frequenzen auftreten.

Ein Beispiel für Energiesignale sind die Impulsantworten stabiler linearer zeitinvarianter Systeme (engl.: linear time-invariant system, LTI-System). Sie haben bei stabilen LTI-Systemen eine endliche Signalenergie. Weiterhin haben alle Signale endliche Signalenergie, wenn sie in einem endlichen Zeitfenster definiert sind, außerhalb dessen die Amplitudenwerte zu Null gesetzt werden (Abschnitt 1.4).

Die folgende Beziehung wird in Abschnitt 1.6.4 benötigt.

### Satz 1.1 *Polarisationsgleichung*

Für das Innenprodukt quadratisch integrierbarer Signale  $x(t)$  und  $y(t)$  gilt die Polarisationsgleichung [39]

$$\begin{aligned} \langle x(t), y(t) \rangle = \frac{1}{4} & \left[ \|x(t) + y(t)\|^2 - \|x(t) - y(t)\|^2 \right. \\ & \left. + j \|x(t) + jy(t)\|^2 - j \|x(t) - jy(t)\|^2 \right] \end{aligned} \quad (1.7)$$

**Beweis 1.1**

Die verschiedenen Normen werden ausmultipliziert.

$$\|x(t) + y(t)\|^2 = \|x(t)\|^2 + \langle x(t), y(t) \rangle + \langle y(t), x(t) \rangle + \|y(t)\|^2 \quad (1.8)$$

$$\|x(t) - y(t)\|^2 = \|x(t)\|^2 - \langle x(t), y(t) \rangle - \langle y(t), x(t) \rangle + \|y(t)\|^2 \quad (1.9)$$

$$\|x(t) + jy(t)\|^2 = \|x(t)\|^2 - j\langle x(t), y(t) \rangle + j\langle y(t), x(t) \rangle + \|y(t)\|^2 \quad (1.10)$$

$$\|x(t) - jy(t)\|^2 = \|x(t)\|^2 + j\langle x(t), y(t) \rangle - j\langle y(t), x(t) \rangle + \|y(t)\|^2 \quad (1.11)$$

Die einzelnen Terme werden in die Polarisationsgleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} \langle x(t), y(t) \rangle &= \frac{1}{4} ( \|x(t)\|^2 + \langle x(t), y(t) \rangle + \langle y(t), x(t) \rangle + \|y(t)\|^2 \\ &\quad - \|x(t)\|^2 + \langle x(t), y(t) \rangle + \langle y(t), x(t) \rangle - \|y(t)\|^2 \\ &\quad + j\|x(t)\|^2 + \langle x(t), y(t) \rangle - \langle y(t), x(t) \rangle + j\|y(t)\|^2 \\ &\quad - j\|x(t)\|^2 + \langle x(t), y(t) \rangle - \langle y(t), x(t) \rangle - j\|y(t)\|^2 ) \\ &= \langle x(t), y(t) \rangle \end{aligned} \quad (1.12)$$

Damit ist die Polarisationsgleichung bewiesen.

**Satz 1.2** Absolute Integrierbarkeit kompakter Energiesignale

Das Signal  $x(t)$  erfülle die beiden Voraussetzungen

1. Endliche Signalenergie

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty, \quad (1.13)$$

2. Kompaktheit des Signalverlaufs

$$\int_{-\infty}^{\infty} |tx(t)| dt < \infty. \quad (1.14)$$

Dann ist das Signal  $x(t)$  absolut integrierbar, d. h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (1.15)$$

Die Kompaktheits-Bedingung bedeutet, dass die Amplitude  $|x(t)|$  für  $|t| \rightarrow \infty$  so stark gegen Null konvergiert, dass die Gewichtung mit dem divergierenden Faktor  $t$  mehr als kompensiert wird. Die Bedingung ist wenig restriktiv. Eine wesentlich stärker einschränkende Definition für kompakte Signale findet sich in Abschnitt 1.6.5.

**Beweis 1.2**

Zu Beginn wird die unabhängige Variable  $t$  durch entsprechende Normierung in eine dimensionslose Größe überführt. Danach können wir das absolute Integral in die beiden Teilintegrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = \int_{|t|<1} |x(t)| dt + \int_{|t|\geq 1} |x(t)| dt \quad (1.16)$$

aufteilen. Auf das erste Teilintegral wird die Schwarzsche Ungleichung (Gl. (1.22)) angewendet.

$$\int_{|t|<1} |x(t)| \cdot |1| dt \leq \underbrace{\sqrt{\int_{|t|<1} |x(t)|^2 dt}}_{<\infty, \text{ nach Vorr. 1}} \cdot \underbrace{\sqrt{\int_{|t|<1} |1|^2 dt}}_{<\infty} < \infty \quad (1.17)$$

Das erste Teilintegral ist endlich. Beim zweiten Teilintegral gilt mit den Integrationsgrenzen  $|t| \geq 1$  für den Kehrwert

$$\frac{1}{|t|} \leq 1. \quad (1.18)$$

Damit wird das zweite Teilintegral entsprechend

$$\int_{|t|\geq 1} |x(t)| dt = \int_{|t|\geq 1} \left| t \cdot x(t) \cdot \frac{1}{t} \right| dt \leq \underbrace{\int_{|t|\geq 1} |t \cdot x(t)| dt}_{<\infty, \text{ nach Vorr. 2}} < \infty \quad (1.19)$$

abgeschätzt. Es ist ebenfalls endlich. Das Signal  $x(t)$  ist damit insgesamt absolut integrierbar.

**Beispiel 1.1** *Kompaktheit des Hanning-Fensters*

Das auf die Signalenergie  $E_g = 1$  normierte Hanning-Fenster lautet

$$g(t) = \sqrt{\frac{2}{3T}} \left( 1 + \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \right) \cdot r_T(t).$$

Das Hanning-Fenster ist kompakt, weil das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t \cdot g(t)| dt = \sqrt{\frac{2}{3T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left| t \cdot \left( 1 + \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \right) \right| dt = 0,1214 \cdot T^{\frac{3}{2}} < \infty$$

konvergiert. Das absolute Integral des Hanning-Fensters

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt = 2\sqrt{\frac{2}{3T}} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(1 + \cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right) dt = 0,8165\sqrt{T} < \infty$$

konvergiert dann ebenfalls.

## 1.1.2 Leistungssignale

### **Definition 1.2** *Leistungssignale*

Leistungssignale haben eine endlich große Signalleistung über dem unendlich großen Definitionsintervall  $t \in [-\infty, \infty]$ . Die Signalenergie ist unendlich groß.

Als quadratische Norm wird daher bei Leistungssignalen die Signalleistung herangezogen. Die momentane Signalleistung im Intervall  $[t - T/2, t + T/2]$  ist

$$P_x(t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt. \quad (1.20)$$

Über dem unendlich großen Intervall entspricht dies der Leistung

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \|x(t)\|^2 < \infty. \quad (1.21)$$

Ein Beispiel für Leistungssignale sind alle periodischen Funktionen. Bei ihnen ist die Leistung gleich der Momentanleistung in einer Periode  $T$ . Denkt man sich zeitlich begrenzte Signale außerhalb ihres Beobachtungszeitraums periodisch fortgesetzt, so erhält man Leistungssignale.

Nach der Schwarzschen Ungleichung existiert das Innenprodukt zweier Signale, wenn deren Norm endlich ist.

$$|\langle x(t), y(t) \rangle|^2 \leq \|x(t)\|^2 \cdot \|y(t)\|^2 \quad (1.22)$$

Dies gilt für Energie- und Leistungssignale. Die Schwarzsche Ungleichung wird im Folgenden bei den Beweisen der Unschärferelation (Gl. (1.153)), der Einhaltung der Frame-Grenzen durch die Gabor-Reihe (Gl. (2.80)) sowie der Cramér-Rao-Ungleichung (Gl. (8.291)) verwendet.

### 1.1.3 Korrelation bei Leistungs- und Energiesignalen

Zufällige Signale werden in der Kategorie der Leistungssignale bearbeitet. Dabei beschränkt man sich in technischen Anwendungen auf stationäre, ergodische Prozesse. Stationäre Prozesse ändern ihre statistischen Kennwerte, die Momente, nicht über der Zeit.

Das zweite Moment für Leistungssignale

$$E \{x(t)x^*(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t) dt \quad (1.23)$$

ist bei Ergodizität für eine Musterfunktion des stochastischen Prozesses über dem unendlichen Zeitintervall definiert. Das zweite Moment für Energiesignale kann für zufällige Signale dagegen nicht verwendet werden, da es unendlich groß ist. Ansonsten müsste das erste Moment für Energiesignale für große  $|t|$  gegen Null gehen, im Widerspruch zur geforderten Stationarität.

Die Korrelationsfunktion ist bei *Leistungssignalen* gegeben durch das Innenprodukt für Leistungssignale zwischen dem um  $\tau$  verschobenen und dem nicht verschobenen Signal

$$r_{xx}(\tau) = E \{x(t+\tau)x^*(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)x^*(t) dt. \quad (1.24)$$

Die Fourier-Transformierte davon ist gerade das Leistungsdichtespektrum.

$$S_{xx}(f) = \mathcal{F} \{r_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau \quad (1.25)$$

Entsprechend sind die Kreuzkorrelation  $r_{xy}(\tau)$  und die Kreuzleistungsdichte  $S_{xy}(f)$  definiert.

$$r_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)y^*(t) dt \quad (1.26)$$

$$S_{xy}(f) = \mathcal{F} \{r_{xy}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xy}(\tau) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau \quad (1.27)$$

Zufällige Signale können gefiltert werden, indem man anstelle des analytisch nicht definierten Eingangssignals dessen Korrelationsfunktion verwendet [22]. Die Korrelation kann formell auch für *Energiesignale* definiert werden. Dazu verwendet man das Innenprodukt für Energiesignale.

$$r_{xx}^E(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x^*(t) dt \quad (1.28)$$

Deren Fourier-Transformierte ist die Energiedichte.

$$S_{xx}^E(f) = \mathcal{F} \{ r_{xx}^E(\tau) \} = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}^E(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (1.29)$$

$$= X(f) \cdot X^*(f) \quad (1.30)$$

Die Energiedichte kann unmittelbar aus den Fourier-Transformierten ohne Umweg über die Korrelationsfunktion berechnet werden.

### 1.1.4 Zeitdiskrete Signale

Durch die Abtastung eines zeitkontinuierlichen Signals  $x(t)$  mit der Abtastfrequenz  $f_A = \frac{1}{t_A}$  erhält man das zeitdiskrete Signal  $x(n)$ , das nur in den Abtastzeitpunkten  $n \cdot t_A$  definiert ist. Dabei muss das Abtasttheorem eingehalten werden, um das zeitkontinuierliche aus dem zeitdiskreten Signal rekonstruieren zu können (siehe die Bedingung in Gl. (1.32)).

Zeitdiskrete Signale haben ein periodisch wiederholtes Spektrum.

$$X_*(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \exp(-j2\pi f t_A n). \quad (1.31)$$

Der Index “\*” steht für die Abtastung im Zeitbereich. Bei exakter Einhaltung des Abtasttheorems kann das Spektrum des kontinuierlichen Signals  $X(f)$  aus dem des zeitdiskreten Signals  $X_*(f)$  mit Hilfe eines Rechtecktieffpasses der Fläche 1 (nicht Signalenergie 1) rekonstruiert werden [23].

$$X(f) = \frac{1}{f_A} \cdot R_{f_A}(f) \cdot X_*(f), \quad X(f) \begin{cases} \neq 0 & \text{für } |f| < f_A/2 \\ = 0 & \text{für } |f| \geq f_A/2 \end{cases} \quad (1.32)$$

Die Signalenergie kann nach dem Satz von Parseval im Zeit- und Frequenzbereich berechnet werden.

$$E_x = \|x(t)\|^2 = \|X(f)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (1.33)$$

Wenn  $x(t)$  das Abtasttheorem exakt einhält, kann die Signalenergie aus dem Spektrum des zeitdiskreten Signals durch Einsetzen von Gl. (1.32) in Gl. (1.33) als

$$E_x = \frac{1}{f_A^2} \int_{-f_A/2}^{f_A/2} |X_*(f)|^2 df \quad (1.34)$$

berechnet werden. Dies soll im Folgenden überprüft werden.

Durch Einsetzen der Fourier-Transformation des zeitdiskreten Signals (Gl. (1.31)) erhält man

$$E_x = \frac{1}{f_A^2} \int_{-f_A/2}^{f_A/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(m) \exp(j2\pi f t_A(m-n)) df \quad (1.35)$$

$$= \frac{1}{f_A^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(m) \underbrace{\int_{-f_A/2}^{f_A/2} \exp(j2\pi f t_A(m-n)) df}_{f_A \delta(m-n)} \quad (1.36)$$

$$= \frac{1}{f_A} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1.37)$$

$$= \frac{1}{f_A} E_{x_*} \quad (1.38)$$

Die über das zeitdiskrete Innenprodukt berechnete Signalenergie  $E_{x_*}$  des zeitdiskreten Signals  $x(n)$

$$E_{x_*} = \langle x(n), x(n) \rangle_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = f_A \cdot E_x \quad (1.39)$$

weicht bei exakter Einhaltung des Abtasttheorems um den Faktor  $f_A$  von der Signalenergie  $E_x$  des zeitkontinuierlichen Signals  $x(t)$  ab. Bei steigender Abtastfrequenz  $f_A$  steigt die Zahl der Abtastwerte  $x(n)$  und damit die Quadratsumme der Abtastwerte in  $E_{x_*}$  an. Wird dies mittels Division durch  $f_A$  kompensiert, so bleibt die Signalenergie  $E_x$  unabhängig von der Abtastfrequenz erhalten.

Die Autokorrelationsfunktion (AKF) des zeitdiskreten Energiesignals ist als das zeitdiskrete Innenprodukt

$$r_{x_*x_*}^E(k) = \langle x(n+k), x(n) \rangle_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+k)x^*(n) \quad (1.40)$$

definiert. Der Wert für  $k = 0$  ist die Signalenergie des zeitdiskreten Signals.

$$E_{x_*} = r_{x_*x_*}^E(0) \quad (1.41)$$

$$E_x = \frac{1}{f_A} r_{x_*x_*}^E(0) \quad (1.42)$$

Für zeitdiskrete, stationäre, ergodische stochastische Prozesse ist die Autokorrelation durch das zeitdiskrete Innenprodukt für Leistungssignale

$$r_{x_*x_*}(k) = \langle x(n+k), x(n) \rangle_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n+k)x^*(n) \quad (1.43)$$

gegeben.

Der Wert für  $k = 0$  ist die Signalleistung des zeitdiskreten Signals.

$$P_{x_*} = r_{x_*x_*}(0) \quad (1.44)$$

Praktisch kann man nur eine endliche Zahl von Abtastwerten heranziehen. Man erhält dann als Näherung eine mit einem Dreieckfenster gefensterte Korrelationsfunktion.

## 1.2 Integraltransformationen

Mit Hilfe von Integraltransformationen lassen sich zeitabhängige Signale in eine andere Darstellung überführen, z. B. in die Abhängigkeit von einer unabhängigen Variablen  $s$ . Dabei ändert sich die im Signal enthaltene Information nicht.

Eine allgemeine Integraltransformation ist gegeben durch

$$X(s) = \int_T x(t) \Theta(s, t) dt \quad t \in T, s \in S. \quad (1.45)$$

Die Funktion  $\Theta(s, t)$  heißt Kern der Integraltransformation. Mit dem reziproken Kern  $\varphi(t, s)$  lässt sich die Rücktransformation in die ursprüngliche Darstellung durchführen.

$$x(t) = \int_S X(s) \varphi(t, s) ds \quad t \in T, s \in S \quad (1.46)$$

Durch Einsetzen von Gl. (1.45) in Gl. (1.46) ergibt sich die Reziprozitätsbedingung für die Rücktransformation.

$$x(t) = \int_S \int_T x(t') \Theta(s, t') \varphi(t, s) dt' ds \quad (1.47)$$

$$= \int_T x(t') \underbrace{\int_S \Theta(s, t') \varphi(t, s) ds}_{\stackrel{!}{=} \delta(t-t')} dt' \quad (1.48)$$

Damit Signale mit Hilfe von Integraltransformationen hin- und wieder zurücktransformiert werden können, müssen die Integrationskerne die Bedingung

$$\int_S \Theta(s, t') \varphi(t, s) ds \stackrel{!}{=} \delta(t - t') \quad (1.49)$$

erfüllen. *Selbstreziproke Kerne* erfüllen die Bedingung

$$\varphi(t, s) = \Theta^*(s, t). \quad (1.50)$$

Integraltransformationen, die einen selbstreziproken Kern enthalten, werden als unitäre Transformationen bezeichnet. Ein Beispiel dafür ist die Fourier-Transformation.

$$\varphi(t, f) = \exp(j2\pi ft) \quad , T = (-\infty, \infty) \quad (1.51)$$

$$\Theta(f, t) = \exp(-j2\pi ft) = \varphi^*(t, f) \quad , S = (-\infty, \infty) \quad (1.52)$$

Die Reziprozitätsbedingung ist somit für die Fourier-Transformation erfüllt.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(f, t') \varphi(t, f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi f(t-t')) df = \delta(t-t') \quad (1.53)$$

*Faltungskerne* hängen lediglich von der Differenz der unabhängigen Variablen  $(t-s)$  bzw.  $(s-t)$  ab.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \theta(s-t) dt = x(t) * \theta(t) , \quad (1.54)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(s) \varphi(t-s) ds = X(s) * \varphi(s) . \quad (1.55)$$

Die beiden Faltungsintegrale ergeben durch Fourier-Transformation:

$$X_t(f) = \mathcal{F}_t \{x(t)\} = X_s(f) \cdot \Phi(f) , \quad (1.56)$$

$$X_s(f) = \mathcal{F}_s \{X(s)\} = X_t(f) \cdot \Theta(f) . \quad (1.57)$$

Interpretiert man  $\Theta(f)$  als Übertragungsfunktion eines linearen, zeitinvarianten Systems, so ist  $\Phi(f)$  die Übertragungsfunktion des dazu inversen Systems.

$$\Phi(f) = \frac{1}{\Theta(f)} \quad (1.58)$$

Ein Beispiel für eine Integraltransformation mit Faltungskern ist die Hilbert-Transformation. Die Kernfunktionen sind hier

$$\varphi(t-s) = -\frac{1}{\pi(t-s)} , \quad (1.59)$$

$$\theta(s-t) = \frac{1}{\pi(s-t)} = \varphi(s-t) \quad (1.60)$$

und dementsprechend

$$\Phi(f) = j \operatorname{sign}(f) , \quad (1.61)$$

$$\Theta(f) = -j \operatorname{sign}(f) = \Phi^*(f) . \quad (1.62)$$

## 1.3 Zeitdauer und Bandbreite von Energiesignalen

### 1.3.1 Mittlere Zeit, mittlere Frequenz, Zeitdauer, Bandbreite

Es soll nun betrachtet werden, in welchem Zeit- bzw. Frequenzbereich die endliche Signalenergie konzentriert ist. In Analogie zur Wahrscheinlichkeitsrechnung werden die mittlere Zeit (Gl. (1.63)) und die mittlere Frequenz (Gl. (1.64)) als erste Momente der normierten Energiedichten berechnet.

$$t_x = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2} dt = \frac{1}{\|x(t)\|^2} \langle t \cdot x(t), x(t) \rangle \quad (1.63)$$

$$f_x = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot \frac{|X(f)|^2}{\|X(f)\|^2} df = \frac{1}{\|X(f)\|^2} \langle f \cdot X(f), X(f) \rangle \quad (1.64)$$

Bei geraden Energiedichten  $|x(t)|^2$  bzw.  $|X(f)|^2$  machen die Definitionen Gl. (1.63) und Gl. (1.64) eventuell keinen Sinn. Die mittlere Zeit  $t_x$  sollte dann vom kausalen Signal berechnet werden, das nur für  $t \geq 0$  von Null abweichende Amplitudenwerte aufweist. Entsprechend sollte die mittlere Frequenz  $f_x$  eventuell vom analytischen Signal (Hilbert-Transformation) berechnet werden, dessen Spektrum nur für  $f \geq 0$  von Null abweichende Amplitudenwerte aufweist.

Entsprechend der Varianz in der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden die Zeitdauer (Gl. (1.65)) und die Bandbreite (Gl. (1.66)) als zentrierte zweite Momente der normierten Energiedichten berechnet. Die Zeitdauer  $\Delta_t$  ist ein Maß für den Zeitbereich, in dem die wesentliche Energie des Signals lokalisiert ist.

$$\Delta_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_x)^2 \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2} dt = \frac{1}{\|x(t)\|^2} \langle (t - t_x)x(t), (t - t_x)x(t) \rangle \quad (1.65)$$

Die Bandbreite  $\Delta_f$  ist ein Maß für den Frequenzbereich, in dem die wesentliche Energie des Signals lokalisiert ist.

$$\Delta_f^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (f - f_x)^2 \frac{|X(f)|^2}{\|X(f)\|^2} df = \frac{1}{\|X(f)\|^2} \langle (f - f_x)X(f), (f - f_x)X(f) \rangle \quad (1.66)$$

Es gilt für die Zeitdauer

$$\Delta_T^2 = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_x)^2 |x(t)|^2 dt \quad (1.67)$$

$$= \frac{1}{E_x} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt - 2t_x \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} t |x(t)|^2 dt}_{t_x \cdot E_x} + t_x^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}_{E_x} \right] \quad (1.68)$$

$$= \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt - t_x^2. \quad (1.69)$$

Entsprechend gilt für die Bandbreite

$$\Delta_f^2 = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} f^2 |X(f)|^2 df - f_x^2. \quad (1.70)$$

### 1.3.2 Mittlere Frequenz und Bandbreite im Zeitbereich

Im Folgenden soll die *mittlere Frequenz*  $f_x$  des Fourier-Spektrums im Zeitbereich interpretiert werden. Dazu wird zunächst die *Momentanfrequenz*  $f_x(t)$  definiert:

**Definition 1.3** *Momentanfrequenz*

Die Momentanfrequenz eines Signals

$$x(t) = A(t) \exp(j\varphi(t)) \quad (1.71)$$

ist die Ableitung seiner Phase nach der Zeit

$$f_x(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}. \quad (1.72)$$

Mit Hilfe des folgenden Satzes kann die mittlere Frequenz ausschließlich im Zeitbereich berechnet werden, ohne die Notwendigkeit zu einer Fourier-Transformation.

**Satz 1.3** *Mittlere Frequenz im Zeitbereich*

Die mittlere Frequenz  $f_x$  des Fourier-Spektrums ist das gewichtete Mittel der Momentanfrequenz

$$f_x = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(t) \cdot \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2} dt. \quad (1.73)$$

Die Gewichtungsfunktion ist dabei die normierte Energiedichte im Zeitbereich.

**Beweis 1.3**

Die mittlere Frequenz nach Gl. (1.64)

$$f_x = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot X(f) \cdot X^*(f) df \quad (1.74)$$

wird mit Hilfe der Korrespondenz

$$\frac{1}{j2\pi} \frac{dx(t)}{dt} \circ \bullet f \cdot X(f) \quad (1.75)$$

und mit dem Satz von Parseval (Anhang A.2) überführt in

$$f_x = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j2\pi} \cdot \frac{dx(t)}{dt} \cdot x^*(t) dt. \quad (1.76)$$

Das Energiesignal wird in Betrag und Phase aufgetrennt

$$x(t) = A(t) \cdot \exp(j\varphi(t)). \quad (1.77)$$

Die mittlere Frequenz ist damit

$$f_x = \frac{1}{E_x} \frac{1}{j2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\dot{A}(t) \exp(j\varphi(t)) + A(t) j\dot{\varphi}(t) \exp(j\varphi(t))] \cdot A(t) \exp(-j\varphi(t)) dt \quad (1.78)$$

$$= \frac{1}{E_x} \frac{1}{j2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\dot{A}(t) + A(t) j\dot{\varphi}(t)] A(t) dt \quad (1.79)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\dot{\varphi}(t)}{2\pi} \cdot \frac{A^2(t)}{E_x} dt - \frac{j}{2\pi E_x} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}(t) A(t) dt \quad (1.80)$$

$$= \frac{1}{2\pi E_x} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi}(t) \cdot A^2(t) dt - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}(t) \cdot A(t) dt}_{= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} (A^2(t)) dt = \frac{1}{2} (A^2(+\infty) - A^2(-\infty)) = 0} \right). \quad (1.81)$$

Der zweite Term ist Null, da die Amplitude des Energiesignals für  $t \rightarrow \pm\infty$  verschwindet.

Die Momentanfrequenz kann sich über der Zeit ändern (z. B. Sprachsignal). Sie enthält allgemein zu einem Zeitpunkt mehrere zeitvariante Frequenzkomponenten, ist also eigentlich eine *mittlere* Momentanfrequenz.

**Beispiel 1.2** *Cosinus-Schwingung fester Frequenz*

$$x(t) = A(t) \cdot \cos(\varphi(t)) = A(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

Die Momentanfrequenz berechnet sich damit zu

$$f_x(t) = \frac{1}{2\pi} \dot{\varphi}(t) = f_c.$$

Es wird eine konstante Amplitude  $A(t) = A_x$  angenommen. Dann ist die Fourier-Transformierte gegeben durch

$$X(f) = \frac{1}{2} A_x (\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)).$$

Die mittlere Frequenz berechnet sich nach Gl. (1.73) folgendermaßen:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi}(t) \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2} dt \\ &= f_c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2} dt = f_c. \end{aligned}$$

Das Beispiel stellt einen Grenzfall dar, da die Signalenergie  $E_x$  der Cosinus-Schwingung unendlich groß ist.

Als nächstes soll nun die *Bandbreite*  $\Delta_f$  des Fourier-Spektrums Gl. (1.65) im Zeitbereich interpretiert werden.

**Satz 1.4** *Bandbreite im Zeitbereich*

Die Bandbreite des Fourier-Spektrums wird durch das gewichtete Mittel der quadrierten Differenz der Momentanfrequenz  $f_x(t)$  gegenüber der mittleren Frequenz  $f_x$  und durch die Amplitudenänderung  $\dot{A}(t)$  bestimmt.

$$\Delta_f^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (f_x(t) - f_x)^2 \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2} dt + \frac{1}{4\pi^2 E_x} \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{A}(t))^2 dt \quad (1.82)$$

**Beweis 1.4**

Das zweite Moment wird als Energie  $E_y$  folgender Hilfsgröße

$$Y(f) = (f - f_x)X(f) \quad (1.83)$$

berechnet. In einer Zwischenbetrachtung ergibt sich nach dem Verschiebungssatz der Fourier-Transformation

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(f + f_x) \exp(j2\pi f t) df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi(f - f_x)t) df \quad (1.84)$$

$$= \exp(-j2\pi f_x t) \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi f t) df \quad (1.85)$$

$$= x(t) \cdot \exp(-j2\pi f_x t). \quad (1.86)$$

Die Ableitung beider Gleichungsseiten nach der Zeit  $t$  ergibt

$$\int_{-\infty}^{\infty} j2\pi(f - f_x)X(f) \exp(j2\pi(f - f_x)t) df = \frac{d}{dt} (x(t) \exp(-j2\pi f_x t)). \quad (1.87)$$

Die Bandbreite des Signals  $X(f)$  berechnet sich aus der oben eingeführten Hilfsgröße  $Y(f)$

$$\Delta_f^2 = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} (f - f_x)^2 |X(f)|^2 df \quad (1.88)$$

$$= \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) Y^*(f) df = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) y^*(t) dt = \frac{E_y}{E_x} \quad (1.89)$$

als Verhältnis der Energien. Die inverse Fourier-Transformierte  $y(t)$  der Hilfsgröße  $Y(f)$  ist

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) \exp(j2\pi f t) df = \int_{-\infty}^{\infty} (f - f_x) X(f) \exp(j2\pi f t) df \quad (1.90)$$

$$= \frac{1}{j2\pi} \exp(j2\pi f_x t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} j2\pi(f - f_x) X(f) \exp(j2\pi(f - f_x)t) df. \quad (1.91)$$

Die Hilfsgröße wird mit Hilfe der obigen Zwischenrechnung Gl. (1.87) in

$$y(t) = \frac{1}{j2\pi} \exp(j2\pi f_x t) \cdot \frac{d}{dt} (x(t) \exp(-j2\pi f_x t)) \quad (1.92)$$

umgewandelt. Das Signal  $x(t)$  wird nun in Betrag und Phase zerlegt.

$$x(t) = A(t) \exp(j\varphi(t)) \quad (1.93)$$

Damit berechnet sich die Hilfsgröße  $y(t)$  zu

$$y(t) = \frac{1}{j2\pi} \exp(j2\pi f_x t) \frac{d}{dt} (A(t) \exp(j\varphi(t) - j2\pi f_x t)) \quad (1.94)$$

$$= \frac{1}{j2\pi} \exp(j2\pi f_x t) [A(t) \exp(j\varphi(t) - j2\pi f_x t) \cdot (j\dot{\varphi}(t) - j2\pi f_x) + \dot{A}(t) \exp(j\varphi(t) - j2\pi f_x t)] \quad (1.95)$$

$$= \frac{1}{2\pi} [(\dot{\varphi}(t) - 2\pi f_x) \cdot A(t) - j\dot{A}(t)] \cdot \exp(j\varphi(t)). \quad (1.96)$$

Die Bandbreite von  $X(f)$  lässt sich durch Einsetzen der Hilfsgröße  $y(t)$  aus Gl. (1.96) in Gl. (1.89) bestimmen zu

$$\Delta_f^2 = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) y^*(t) dt \quad (1.97)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 E_x} \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{\varphi}(t) - 2\pi f_x)^2 A^2(t) dt + \frac{1}{4\pi^2 E_x} \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{A}(t))^2 dt \quad (1.98)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (f_x(t) - f_x)^2 \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2} dt + \frac{1}{4\pi^2 E_x} \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{A}(t))^2 dt. \quad (1.99)$$

Bei linear zeitabhängiger Phase und konstanter Amplitude

$$\varphi(t) = 2\pi f_x t \quad , \quad \frac{\dot{\varphi}(t)}{2\pi} = f_x \quad (1.100)$$

$$A(t) = A_0 \quad , \quad \dot{A}(t) = 0 \quad (1.101)$$

ist die Bandbreite  $\Delta_f = 0$ . Will man Signale geringer Bandbreite erzeugen, so muss man die Amplitude  $A(t)$  und die Phase  $\varphi(t)$  glätten.

### Beispiel 1.3 Cosinus-Schwingung

Bei der oben betrachteten Cosinus-Schwingung konstanter Amplitude  $A_x$  und der konstanten Momentanfrequenz

$$f_x(t) = \dot{\varphi}(t)/2\pi = f_c$$

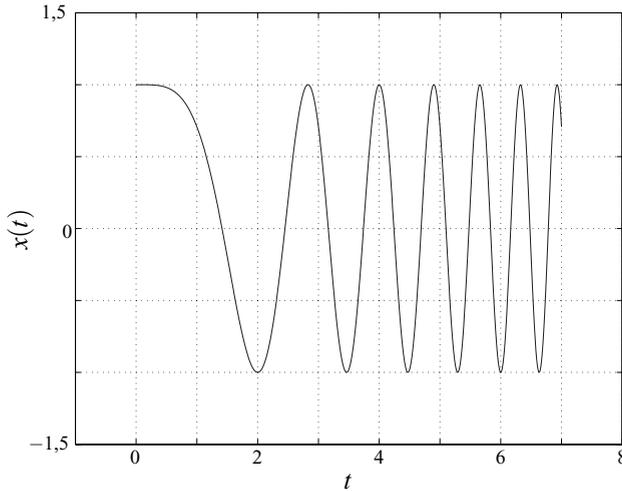
ist die Bandbreite  $\Delta_f = 0$ . Dies entspricht dem Linienspektrum der Cosinus-Schwingung.

**Beispiel 1.4** *Chirp-Signal*

Beim Chirp-Signal steigt die Frequenz proportional mit der Zeit an. Solche Signale senden z. B. Fledermäuse aus, um im Flug Beutetiere (Insekten) orten zu können. Die Amplitude  $A_x$  sei konstant.

$$x(t) = A_x \cdot \cos\left(\pi \frac{t^2}{T^2}\right) = A_x \cdot \cos(\varphi(t))$$

Die Momentanfrequenz des Chirp-Signals ist



**Abbildung 1.1:** Zeitlicher Verlauf des Chirp-Signals  $x(t) = \cos\left(\pi \frac{t^2}{T^2}\right)$  mit  $T = 2$

$$f_x(t) = \frac{1}{2\pi} \dot{\varphi}(t) = \frac{t}{T^2}.$$

Die mittlere Frequenz ist nach Gl. (1.73) gegeben durch

$$f_x = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(t) \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2} dt = \frac{1}{T^2} \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2} dt = \frac{t_x}{T^2}.$$

Die Energiedichte  $|x(t)|^2$  des Chirp-Signals ist eine gerade Funktion, die Zeit  $t$  eine ungerade Funktion.

$$|x(t)|^2 = A_x^2 \cos^2\left(\pi \frac{t^2}{T^2}\right)$$

Damit wird das Integral Null. Deswegen ist die mittlere Zeit  $t_x$  und auch die mittlere Frequenz  $f_x$  des Chirp-Signals Null.

$$t_x = 0, \quad f_x = 0$$

Da sich das Chirp-Signal von  $-\infty$  bis  $\infty$  erstreckt, ist seine Zeitdauer  $\Delta_t$  unendlich groß. Mit  $t_x = 0$  ist die Zeitdauer aufgrund der Symmetrie von  $t^2$  und  $\cos^2$

$$\Delta_t^2 = \frac{\int_0^{\infty} t^2 \cos^2\left(\pi \frac{t^2}{T^2}\right) dt}{\int_0^{\infty} \cos^2\left(\pi \frac{t^2}{T^2}\right) dt}.$$

Dies ist nach der Regel von *de l'Hospital*

$$\Delta_t^2 = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} \left( t^2 \cos^2\left(\pi \frac{t^2}{T^2}\right) \right)}{\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \cos^2\left(\pi \frac{t^2}{T^2}\right) \right)} = \infty.$$

Der Nenner ist ein Wert, der zwischen 0 und 1 schwankt, der Zähler geht mit  $t^2$  gegen  $\infty$ .

Die Bandbreite  $\Delta_f$  des Chirp-Signals ist nach Gleichung (1.82) gegeben durch

$$\begin{aligned} \Delta_f^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{t}{T^2} - f_x \right)^2 \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2} dt \\ &= \frac{1}{T^4} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2} dt = \frac{\Delta_t^2}{T^4}. \end{aligned}$$

Die Bandbreite des Chirp-Signals ist somit auch unendlich groß.

### 1.3.3 Mittlere Zeit und Zeitdauer im Frequenzbereich

Die Momentanfrequenz  $f_x(t)$  ist in Definition 1.3 als die Ableitung der Momentanphase  $\varphi(t)$  des Signals  $x(t)$  nach der Zeit eingeführt worden.

$$f_x(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (1.102)$$

Nach Gleichung (1.73) wird die mittlere Frequenz im Zeitbereich durch gewichtete Mittelung der Momentanfrequenz über den Zeitbereich berechnet.

$$f_x = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(t) \cdot \frac{|x(t)|^2}{\|x(t)\|^2} dt \quad (1.103)$$

Eine dazu symmetrische Definition kann man für die mittlere Zeit und die Zeitdauer im Frequenzbereich vornehmen.

**Definition 1.4** Gruppenlaufzeit

Die Gruppenlaufzeit  $t_x(f)$  ist die Ableitung der Phase  $\Psi(f)$  des Signals

$$X(f) = |X(f)| \cdot \exp(j\Psi(f)) \quad (1.104)$$

nach der Frequenz.

$$t_x(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\Psi(f)}{df} \quad (1.105)$$

Eine abfallende Phase  $\Psi(f)$  des Signals  $X(f)$  entspricht einer Verzögerung. Das negative Vorzeichen in Gl. (1.105) bewirkt, dass der Signalverzögerung eine positive Gruppenlaufzeit zugeordnet wird.

**Satz 1.5** Mittlere Zeit im Frequenzbereich

Die mittlere Zeit  $t_x$  kann im Frequenzbereich als gewichtetes Mittel der Gruppenlaufzeit berechnet werden. Die Gewichtungsfunktion ist dabei die normierte Energiedichte im Frequenzbereich.

$$t_x = \int_{-\infty}^{\infty} t_x(f) \cdot \frac{|X(f)|^2}{\|X(f)\|^2} df \quad (1.106)$$

**Beweis 1.5**

Die mittlere Zeit wurde in Gl. (1.63) als

$$t_x = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot x(t) \cdot x^*(t) dt \quad (1.107)$$

definiert. Mit Hilfe der Korrespondenz

$$t \cdot x(t) \circ \bullet -\frac{1}{j2\pi} \cdot \frac{dX(f)}{df} \quad (1.108)$$

und dem Satz von Parseval (Anhang A.2) erhält man die mittlere Zeit im Spektralbereich

$$t_x = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} \left( -\frac{1}{j2\pi} \cdot \frac{dX(f)}{df} \right) \cdot X^*(f) df. \quad (1.109)$$

Das Signal  $X(f)$  wird in Betrag und Phase aufgetrennt.

$$X(f) = A(f) \exp(j\Psi(f)) \quad (1.110)$$

Die mittlere Zeitdauer ist damit

$$t_x = \left(-\frac{1}{j2\pi}\right) \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} [A'(f) \exp(j\Psi(f)) + A(f)j\Psi'(f) \exp(j\Psi(f))] \cdot A(f) \exp(-j\Psi(f)) df \quad (1.111)$$

$$= \left(-\frac{1}{j2\pi}\right) \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} [A'(f) + A(f)j\Psi'(f)] A(f) df \quad (1.112)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{d\Psi(f)}{df}\right) \cdot \frac{A^2(f)}{E_x} df + j \frac{1}{2\pi E_x} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} A'(f) \cdot A(f) df}_{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{df} (A^2(f)) df = \frac{1}{2} (A^2(\infty) - A^2(-\infty)) = 0} \quad (1.113)$$

Der zweite Term ist gleich Null, da der Betrag des Spektrums eines Energiesignals für  $f \rightarrow \pm\infty$  verschwindet. Mit Hilfe von Definition 1.4 für die Gruppenlaufzeit erhalten wir Gl. (1.114)

$$t_x = \int_{-\infty}^{\infty} t_x(f) \cdot \frac{|X(f)|^2}{\|X(f)\|^2} df. \quad (1.114)$$

Man erkennt, dass das negative Vorzeichen in der Definition 1.4 der Gruppenlaufzeit durch die Korrespondenz (1.108) eingeführt wird.

### Satz 1.6 Zeitdauer im Frequenzbereich

Die Zeitdauer eines Energiesignals wird durch das gewichtete Mittel der quadrierten Differenz der Gruppenlaufzeit  $t_x(f)$  gegenüber der mittleren Zeit  $t_x$  und durch die Amplitudenänderung  $dA(f)/df$  bestimmt.

$$\Delta_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t_x(f) - t_x)^2 \cdot \frac{|X(f)|^2}{\|X(f)\|^2} df + \frac{1}{4\pi^2 E_x} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{dA(f)}{df}\right)^2 df \quad (1.115)$$

### Beweis 1.6

Die Zeitdauer  $\Delta_t^2$  aus Gleichung (1.66) wird als Signalenergie der Hilfsgröße

$$y(t) = (t - t_x)x(t) \quad (1.116)$$

berechnet. Aus

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (1.117)$$

erhält man durch Ableitung nach  $f$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{j2\pi} \frac{d}{df} (X(f) \exp(j2\pi f t_x)) &= -\frac{1}{j2\pi} \frac{d}{df} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi f(t-t_x)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (t-t_x) x(t) \exp(-j2\pi f(t-t_x)) dt \quad (1.118) \end{aligned}$$

und durch Multiplikation mit dem Demodulationsfaktor

$$\begin{aligned} -\frac{1}{j2\pi} \exp(-j2\pi f t_x) \frac{d}{df} (X(f) \exp(j2\pi f t_x)) &= \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(t-t_x) x(t)}_{y(t)} \exp(-j2\pi f t) dt}_{Y(f)} \end{aligned}$$

die Fourier-Transformierte  $Y(f)$  der Hilfsgröße. Zerlegt man das Signal  $X(f)$  in Betrag und Phase

$$X(f) = A(f) \exp(j\Psi(f)) \quad (1.119)$$

und setzt dies in  $Y(f)$  ein, so erhält man

$$Y(f) = -\frac{1}{j2\pi} \exp(-j2\pi f t_x) \frac{d}{df} (A(f) \exp(j\Psi(f) + j2\pi f t_x)) \quad (1.120)$$

$$\begin{aligned} &= \left( \underbrace{-\frac{1}{2\pi} \frac{d\Psi(f)}{df}}_{t_x(f)} - t_x \right) A(f) \exp(j\Psi(f)) + \frac{1}{2\pi} \frac{dA(f)}{df} \exp(j\Psi(f)). \end{aligned} \quad (1.121)$$

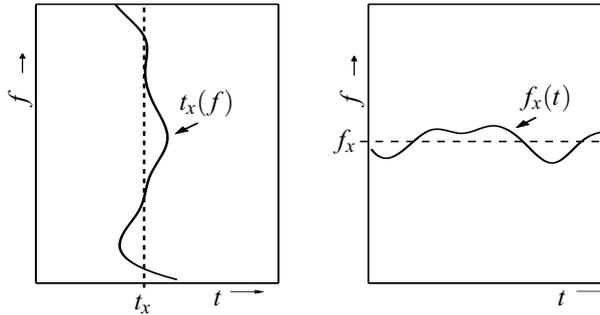
Die Zeitdauer ist damit

$$\Delta_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t-t_x)^2 \frac{|X(f)|^2}{\|X(f)\|^2} df = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) y^*(t) dt = \frac{1}{E_x} \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) Y^*(f) df \quad (1.122)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (t_x(f) - t_x)^2 \frac{|X(f)|^2}{\|X(f)\|^2} df + \frac{1}{4\pi^2 E_x} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{dA(f)}{df} \right)^2 df \quad , \text{ w.z.b.w.} \quad (1.123)$$

Die beiden eindimensionalen Verläufe  $f_x(t)$  und  $t_x(f)$  sind nur bedingt geeignet, ein Signal  $x(t)$  zu analysieren. Man kann das Verhalten allgemeiner Signale, z. B. von Musik, genauer beschreiben, wenn man zu einer zweidimensionalen Zeit-Frequenz-Darstellung  $T_x(t, f)$  übergeht. Lineare Zeit-Frequenz-Darstellungen erfüllen die folgende Beziehung.

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \Rightarrow T_x(t, f) = c_1 T_{x_1}(t, f) + T_{x_2}(t, f) \quad (1.124)$$



**Abbildung 1.2:** Mittlere Zeit  $t_x$ , Gruppenlaufzeit  $t_x(f)$ , mittlere Frequenz  $f_x$  und Momentanfrequenz  $f_x(t)$

Beispiele für lineare Zeit-Frequenz-Darstellungen sind die *Kurzzeit-Fourier-Transformation* und die *Wavelet-Transformation*.

## 1.4 Fensterfunktionen

Für die Kurzzeit-Fourier-Transformation und die Wavelet-Transformation werden Fensterfunktionen benötigt. Dazu betrachten wir deren Eigenschaften.

### 1.4.1 Verschiebungs-Invarianz

Als erstes wollen wir eine Definition für die Fensterfunktion formulieren.

#### **Definition 1.5** Fensterfunktion

Eine Fensterfunktion  $w(t)$  ist ein reelles, symmetrisches, nicht-negatives Energiesignal, dessen Signalenergie überwiegend im Bereich der mittleren Zeit und der mittleren Frequenz lokalisiert ist. Man sagt, dass das Fenster ein kompaktes Signal ist. Die Symmetrie bedeutet im Zeitbereich

$$w(t) = w(-t) \geq 0. \quad (1.125)$$

Die Fourier-Transformierte des Fensters

$$W(f) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \exp(-j2\pi ft) dt = \int_{-\infty}^{\infty} w(-t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (1.126)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} w(t') \exp(-j2\pi(-f)t') dt' = W(-f) \quad (1.127)$$

ist dann ebenfalls symmetrisch. Die Fensterfunktion ist auf die Signalenergie  $\|w(t)\|^2 = 1$  normiert.

Eine restriktive Definition für die Kompaktheit findet sich in Abschnitt 1.6.5, Gl. (1.310). Das Signal  $x(t)$  wird bei der Zeit-Frequenz-Analyse in einem um die mittlere Zeit  $t_w$  und die mittlere Frequenz  $f_w$  verschobenen Fenster

$$w(t - t_w) \exp(j2\pi f_w t) \circ \bullet W(f - f_w) \exp(-j2\pi(f - f_w)t_w) \quad (1.128)$$

betrachtet. Dabei entspricht der Verschiebung um  $f_w$  im Frequenzbereich ein Modulationsfaktor im Zeitbereich. Daraus folgt das „gefensterte“ Signal  $x_w(t)$  als das Produkt

$$x_w(t) = x(t) \cdot w(t - t_w) \exp(j2\pi f_w t). \quad (1.129)$$

Aus verschobenen Fensterfunktionen werden die Analyse- und Synthesefenster bei der Kurzzeit-Fourier-Transformation gebildet. Das Fenster hat die mittlere Zeit  $t_w$  und die mittlere Frequenz  $f_w$ . Für das nichtverschobene Zeitfenster  $w(t)$  sind beide Werte definitionsgemäß Null. Die mittlere Zeit und die mittlere Frequenz des um  $t_w$  bzw.  $f_w$  verschobenen Fensters  $w(t - t_w) \cdot \exp(j2\pi f_w t)$  werden wie folgt berechnet (vgl. Gl. (1.63) und (1.64)):

$$\bar{t} = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot \frac{|w(t - t_w) \exp(j2\pi f_w t)|^2}{\|w(t - t_w) \exp(j2\pi f_w t)\|^2} dt \quad (1.130)$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_w) \cdot \frac{|w(t - t_w)|^2}{\|w(t - t_w)\|^2} d(t - t_w)}_{=0, \text{ nach Definition}} + t_w \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|w(t - t_w)|^2}{\|w(t - t_w)\|^2} d(t - t_w)}_{=1} \quad (1.131)$$

$$= t_w, \quad (1.132)$$

$$\bar{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f \cdot \frac{|W(f - f_w) \exp(-j2\pi(f - f_w)t_w)|^2}{\|W(f - f_w) \exp(-j2\pi(f - f_w)t_w)\|^2} df \quad (1.133)$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (f - f_w) \cdot \frac{|W(f - f_w)|^2}{\|W(f - f_w)\|^2} d(f - f_w)}_{=0, \text{ nach Definition}} + f_w \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|W(f - f_w)|^2}{\|W(f - f_w)\|^2} d(f - f_w)}_{=1} \quad (1.134)$$

$$= f_w. \quad (1.135)$$

### Bemerkung 1.1

Verschobene Fenster  $w(t - t_w) \exp(j2\pi f_w t)$  können aufgrund des Modulationsfaktors auch Funktionswerte annehmen, die komplex sind und die eventuell einen negativen Realteil besitzen.

**Satz 1.7** *Verschiebungs-Invarianz*

Die Zeitdauer Gl. (1.136) und die Bandbreite Gl. (1.138) des Fensters sind unabhängig von der mittleren Zeit  $t_w$  und von der mittleren Frequenz  $f_w$ . Dies ist die Eigenschaft der Verschiebungs-Invarianz.

**Beweis 1.7**

Mit  $dt = d(t - t_w)$  und  $df = d(f - f_w)$  gilt

$$\Delta_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_w)^2 \cdot \frac{|w(t - t_w) \exp(j2\pi f_w t)|^2}{\|w(t - t_w) \exp(j2\pi f_w t)\|^2} d(t - t_w) = \int_{-\infty}^{\infty} t'^2 \cdot \frac{|w(t')|^2}{\|w(t')\|^2} dt', \quad (1.136)$$

$$\Delta_f^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (f - f_w)^2 \frac{|W(f - f_w) \exp(-j2\pi(f - f_w)t_w)|^2}{\|W(f - f_w) \exp(-j2\pi(f - f_w)t_w)\|^2} d(f - f_w) \quad (1.137)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f'^2 \cdot \frac{|W(f')|^2}{\|W(f')\|^2} df'. \quad (1.138)$$

**Satz 1.8** *Innenprodukt verschobener Fensterfunktionen*

Der Betrag des Innenprodukts zweier gegeneinander zeit- und frequenzverschobener Fensterfunktionen ist nur abhängig von der relativen Verschiebung und unabhängig von der gemeinsamen absoluten Verschiebung. Dabei sind die Zeitverschiebungen  $t_{w_1}$ ,  $t_{w_2}$  und die Frequenzverschiebungen  $f_{w_1}$ ,  $f_{w_2}$ .

**Beweis 1.8**

Das Innenprodukt ist

$$\begin{aligned} & \langle w(t - t_{w_1}) \exp(j2\pi f_{w_1} t), w(t - t_{w_2}) \exp(j2\pi f_{w_2} t) \rangle = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{w(t - t_{w_1})}_{t'} w^*(t - t_{w_2}) \exp(j2\pi(f_{w_1} - f_{w_2})t) dt \end{aligned} \quad (1.139)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} w(t') w^*(t' + \underbrace{t_{w_1} - t_{w_2}}_{-\Delta t_w}) \exp(j2\pi \underbrace{(f_{w_1} - f_{w_2})}_{-\Delta f_w} (t' + t_{w_1})) dt' \quad (1.140)$$

$$= \exp(-j2\pi \Delta f_w t_{w_1}) \int_{-\infty}^{\infty} w(t') w^*(t' - \Delta t_w) \exp(-j2\pi \Delta f_w t') dt'. \quad (1.141)$$

Für den Betrag des Innenproduktes erhält man

$$\begin{aligned} & |\langle w(t - t_{w_1}) \exp(j2\pi f_{w_1} t), w(t - t_{w_2}) \exp(j2\pi f_{w_2} t) \rangle| \\ & = |\langle w(t), w(t - \Delta t_w) \exp(j2\pi \Delta f_w t) \rangle|. \end{aligned} \quad (1.142)$$

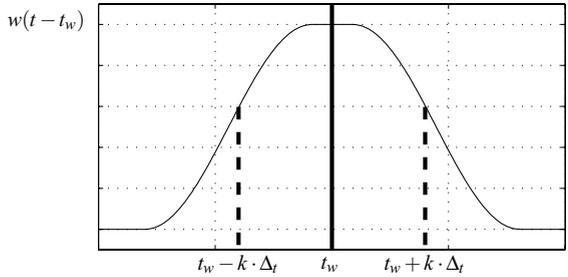


Abbildung 1.3: Verschobene Fensterfunktion

## 1.4.2 Leckeffekt

Die Fourier-Transformierte  $X_w(f)$  des in einem endlichen Fenster  $w(t - t_w) \exp(j2\pi f_w t)$  betrachteten Signals  $x_w(t)$  aus Gl. (1.129) wird durch Faltung mit der Fourier-Transformierten  $W(f)$  der Fensterfunktion gegenüber dem ursprünglichen Spektrum  $X(f)$  verfälscht.

$$X_w(f) = X(f) * W(f - f_w) \exp(-j2\pi(f - f_w)t_w) \quad (1.143)$$

Dies ist der Leckeffekt. Nur bei einem Dirac-Impuls  $\delta(f - f_w)$  als Fourier-Transformierter des Fensters tritt kein Leckeffekt auf. Diesem entspricht aber im Zeitbereich eine sich über einen unendlichen Bereich erstreckende „Fensterfunktion“

$$\exp(j2\pi f_w t). \quad (1.144)$$

Gewünscht ist eine möglichst kleine Zeitdauer und gleichzeitig möglichst kleine Bandbreite der Fensterfunktion. Dazu wird das Zeitdauer-Bandbreite-Produkt betrachtet.

## 1.4.3 Unschärferelation

Das Zeitdauer-Bandbreite-Produkt des Fensters wird gemäß Gl. (1.65) und (1.66) berechnet.

$$\Delta_t^2 \cdot \Delta_f^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot \frac{|w(t)|^2}{\|w(t)\|^2} dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f^2 \cdot \frac{|W(f)|^2}{\|W(f)\|^2} df \quad (1.145)$$

Da die Zeitdauer und die Bandbreite unabhängig von  $t_w$  und  $f_w$  sind, wurden beide zu Null gesetzt. Aufgrund von Gl. (1.75) und dem Satz von Parseval (vgl. Anhang A.2) kann man das Zeitdauer-Bandbreite-Produkt im Zeitbereich wie folgt ansetzen.

$$\Delta_t^2 \cdot \Delta_f^2 = \frac{1}{4\pi^2 E_w^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot |w(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{dt} w(t) \right|^2 dt \quad (1.146)$$

Mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung (vgl. A.4) ergibt sich die Abschätzung

$$\Delta_t^2 \cdot \Delta_f^2 = \frac{1}{4\pi^2 E_w^2} \langle t \cdot w(t), t \cdot w(t) \rangle \cdot \left\langle \frac{dw(t)}{dt}, \frac{dw(t)}{dt} \right\rangle \quad (1.147)$$

$$\geq \frac{1}{4\pi^2 E_w^2} \left| \left\langle t \cdot w(t), \frac{dw(t)}{dt} \right\rangle \right|^2. \quad (1.148)$$

Durch Berechnung des Innenprodukts erhält man die Ungleichung

$$\Delta_t^2 \cdot \Delta_f^2 \geq \frac{1}{4\pi^2 E_w^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} [t \cdot w(t)] \cdot \left[ \frac{d}{dt} w(t) \right] dt \right|^2 \quad (1.149)$$

$$\geq \frac{1}{4\pi^2 E_w^2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (w(t))^2 dt \right)^2 \quad (1.150)$$

$$\geq \frac{1}{16\pi^2 E_w^2} \left( \underbrace{t \cdot w^2(t)}_{=0} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} w^2(t) dt}_{=E_w} \right)^2 \quad (1.151)$$

$$\Delta_t^2 \cdot \Delta_f^2 \geq \frac{1}{16\pi^2} \quad (1.152)$$

$$\boxed{\Delta_t \cdot \Delta_f \geq \frac{1}{4\pi}}. \quad (1.153)$$

Das Zeitdauer-Bandbreite-Produkt ist immer größer/gleich  $1/4\pi$ . Man nennt diese Ungleichung auch *Unschärferelation*. Für eine schmale Fensterfunktion  $w(t)$  im Zeitbereich (und damit für eine feine Auflösung im Zeitbereich) bezahlt man mit einer breiten Fensterfunktion  $W(f)$  im Frequenzbereich (und damit mit einer groben Auflösung im Frequenzbereich) und umgekehrt.

#### 1.4.4 Gauß-Impuls

Je größer die Zeitdauer einer Fensterfunktion, desto geringer ist deren Bandbreite, und umgekehrt. Das kleinste Zeitdauer-Bandbreite-Produkt wird erreicht, wenn in der Unschärferelation (Gl. 1.153) das Gleichheitszeichen steht. Dies gilt gerade, wenn die beiden Funktionen in der Schwarzschen Ungleichung mit dem Faktor  $\beta$  zueinander proportional sind.

$$\beta \cdot t \cdot g(t) + \frac{d}{dt} g(t) = 0 \quad (1.154)$$

Die Integration der Gleichung (1.154) ergibt den Gauß-Impuls

$$g(t) = c \cdot \exp\left(-\frac{\beta}{2} t^2\right). \quad (1.155)$$

Die Konstante  $c$  wird dabei so bestimmt, dass die Energie des Gauß-Impulses identisch 1 wird.

$$E_g = \|g(t)\|^2 = 1 \quad (1.156)$$

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = c^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta t^2) dt = c^2 \cdot \sqrt{\pi/\beta} \stackrel{!}{=} 1 \quad (1.157)$$

$$c = (\beta/\pi)^{1/4} \quad (1.158)$$

Der normierte Gauß-Impuls ist somit gegeben durch

$$g(t) = (\beta/\pi)^{1/4} \exp\left(-\frac{\beta}{2} t^2\right). \quad (1.159)$$

Er ist symmetrisch in  $t$ , d. h.  $t_g = 0$ . Wegen  $\dot{\phi}(t) = 0$  ist auch  $f_g = 0$ .

Die Zeitdauer berechnet sich nach Gl. (1.65) zu

$$\Delta_t^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |g(t)|^2 dt \quad (1.160)$$

$$= (\beta/\pi)^{1/2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \exp(-\beta t^2) dt = 1/(2\beta). \quad (1.161)$$

Die Bandbreite berechnet sich nach Gleichung (1.82) mit  $\dot{\phi}(t) = 0$  und  $E_g = 1$  zu

$$\Delta_f^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{A}(t))^2 dt \quad (1.162)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ (\beta/\pi)^{1/4} \cdot \beta \cdot t \cdot \exp\left(-\frac{\beta}{2} t^2\right) \right]^2 dt \quad (1.163)$$

$$= \frac{\beta^2}{4\pi^2} \cdot (\beta/\pi)^{1/2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \exp(-\beta t^2) dt \quad (1.164)$$

$$= \frac{\beta^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{2\beta} = \frac{\beta}{8\pi^2}. \quad (1.165)$$

Das Zeitdauer-Bandbreite-Produkt ist wie erwartet

$$\Delta_t^2 \cdot \Delta_f^2 = \frac{1}{16\pi^2}. \quad (1.166)$$

Der Gauß-Impuls ist somit die im Zeit- und Frequenzbereich kompakteste Funktion. Während die Normalverteilung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung den Abfall auf  $1/e$  bei  $x = \sqrt{2}\sigma_x$  erreicht, ist dies beim Gauß-Impuls für  $t = 2\Delta_t$  der Fall. Das liegt an der unterschiedlichen Normierung. Bei der Normalverteilung ist das Integral über die Wahrscheinlichkeitsdichte zu eins normiert.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_N(x) dx = 1 \quad (1.167)$$

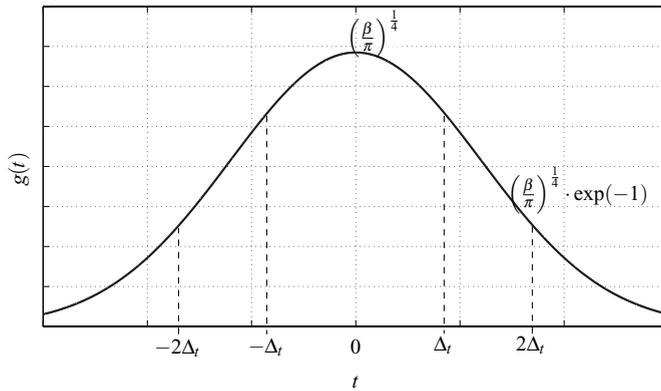


Abbildung 1.4: Gauß-Impuls

Beim Gauß-Impuls hingegen wird die Signalenergie auf eins normiert.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt = 1 \quad (1.168)$$

Die Fourier-Transformierte des Gauß-Impulses ist gegeben durch

$$G(f) = \sqrt{2}(\pi/\beta)^{1/4} \exp\left(-\frac{2}{\beta}\pi^2 f^2\right). \quad (1.169)$$

Wählt man anstelle von  $\beta$  die Zeitdauer  $\Delta_t$  und die Bandbreite  $\Delta_f$  als Parameter, so erhält man eine symmetrische Darstellung des Gauß-Impulses im Zeit- und Frequenzbereich.

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}\Delta_t}} \exp\left(-\frac{t^2}{4\Delta_t^2}\right) \quad (1.170)$$

$$G(f) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi}\Delta_f}} \exp\left(-\frac{f^2}{4\Delta_f^2}\right) \quad (1.171)$$

### 1.4.5 Effektive Zeitdauer und Bandbreite

Die in Anlehnung an die Wahrscheinlichkeitsrechnung als zweites zentriertes Moment der normierten Energiedichte definierte Zeitdauer  $\Delta_t$  ist klein gegenüber der Zeitdauer, in der das Signal  $x(t)$  nennenswerte von Null abweichende Amplituden aufweist. Deshalb wird alternativ die effektive Zeitdauer  $T_{\text{eff}}$  eingeführt. Die Fläche unter dem Betrag des Signals  $|x(t)|$  wird aufintegriert und mit einem flächengleichen Rechteck verglichen, dessen eine Seite gleich der maximalen Amplitude  $x_{\text{max}}$  des Signals  $|x(t)|$  ist. Dadurch erhält man eine Abschätzung, für welche effektive Zeitdauer  $T_{\text{eff}}$  das Signal  $x(t)$  nennenswerte Energieanteile aufweist. Dabei sei

$x(t)$  auf die Signalenergie 1 normiert.

$$T_{\text{eff}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x(t)|}{x_{\text{max}}} dt \quad (1.172)$$

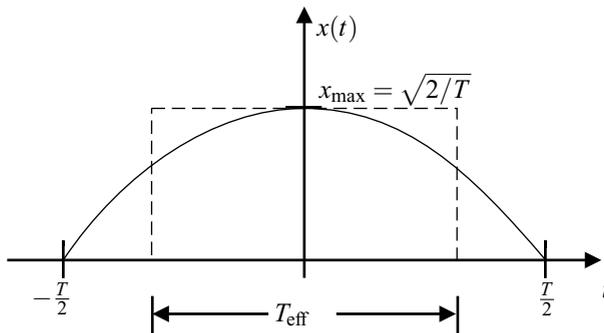
**Beispiel 1.5** *Effektive Zeitdauer (nach Flächengleichheit)*

Das betrachtete Energiesignal sei

$$x(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) r_T(t).$$

Der Vorfaktor  $x_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2}{T}}$  stellt die Normierung auf die Signalenergie 1 sicher. Man erhält die effektive Zeitdauer

$$T_{\text{eff}} = \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) dt = \frac{2T}{\pi} \approx 0,637 \cdot T.$$



**Abbildung 1.5:** Effektive Zeitdauer einer Cosinus-Halbperiode

Die effektive Zeitdauer nach dem Flächengleichgewicht wird speziell dann verwendet, wenn man bei periodischer Wiederholung von Signalverläufen Aliasing vermeiden will. Bei der Gabor-Reihe wird zum Beispiel das Spektrum der Kurzzeit-Fourier-Transformation abgetastet, wobei die Analyse-Fensterfunktion  $\gamma(t - mT)$  in diskreten Vielfachen von  $T \approx T_{\text{eff}}$  verschoben wird (siehe Abschnitt 2.2). Durch ausreichend kleine diskrete Verschiebungszeiten  $T$  bleibt der Informationsgehalt des Signals  $x(t)$  erhalten.

**Beispiel 1.6** *Zeitdauer (entsprechend Varianz)*

Gegeben ist das auf die Energie 1 normierte Signal  $x(t)$  aus Beispiel 1.5.

$$x(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) r_T(t)$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = 1$$

Die Zeitdauer berechnet sich mit  $t_x = 0$  nach Gleichung (1.69) zu

$$\Delta_t^2 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} t^2 \cos^2\left(\pi \frac{t}{T}\right) dt.$$

Das Integral lässt sich mit Hilfe der Produktregel  $\int u dv = uv - \int v du$  lösen. Dabei wird

$$u = t^2, \quad du = 2t dt$$

$$dv = \cos^2\left(\pi \frac{t}{T}\right) dt, \quad v = \frac{1}{2}t + \frac{T}{4\pi} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$

gesetzt. Man erhält

$$\begin{aligned} \Delta_t^2 &= \frac{2}{T} \left[ \left. t^2 \left( \frac{1}{2}t + \frac{T}{4\pi} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \right) \right|_{-T/2}^{T/2} - \int_{-T/2}^{T/2} t^2 + \frac{T}{2\pi} t \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) dt \right] \\ &= \frac{T^2}{4} - \frac{2}{T} \left[ \frac{1}{3}t^3 + \frac{T}{2\pi} \left( \frac{T^2}{4\pi^2} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) - \frac{T}{2\pi} t \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \right) \right]_{-T/2}^{T/2} \\ &= \frac{T^2}{4} - \frac{T^2}{6} + \frac{T}{2\pi^2} \left( \frac{T}{2} \cos(\pi) + \frac{T}{2} \cos(\pi) \right) \\ &= \frac{T^2}{12} - \frac{T^2}{2\pi^2} \approx 0,032673 \cdot T^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Zeitdauer  $\Delta_t$

$$\Delta_t \approx 0,181 \cdot T.$$

Die Zeitdauer  $\Delta_t$  ist wesentlich kleiner als die effektive Zeitdauer  $T_{\text{eff}}$ .

Die Zeitdauer  $\Delta_t$  ist lediglich ein Maß für die zeitliche Verteilung des Signals. Will man den Zeitbereich kennzeichnen, in dem das Signal  $x(t)$  nennenswerte Energieanteile aufweist, so muss man ein Mehrfaches von  $\Delta_t$  ansetzen, in diesem Beispiel evtl.  $4 \cdot \Delta_t$ . Dies entspricht dem Vorgehen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wo der Vertrauensbereich in Vielfachen von  $\sigma_x$  angegeben wird [22].

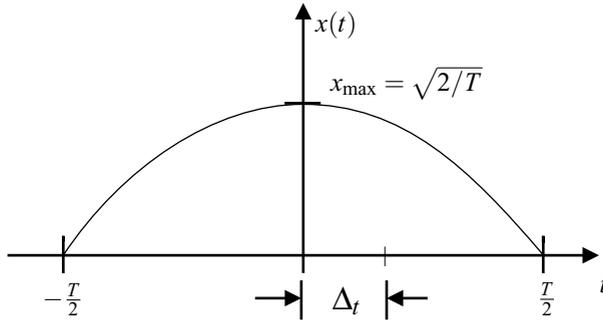


Abbildung 1.6: Zeitdauer einer Cosinus-Halbperiode

In Analogie zur effektiven Zeitdauer wird die effektive Bandbreite

$$F_{\text{eff}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(f)|}{X_{\text{max}}} df \quad (1.173)$$

definiert. Für die Beziehung zwischen der effektiven Bandbreite  $F_{\text{eff}}$  und der Bandbreite  $\Delta_f$  gelten dieselben Überlegungen wie für die Beziehung zwischen der effektiven Zeitdauer  $T_{\text{eff}}$  und der Zeitdauer  $\Delta_t$ .

### Beispiel 1.7 Effektive Zeitdauer und Bandbreite des Gauß-Impulses

Für den Gauß-Impuls

$$g(t) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\beta}{2}t^2\right)$$

◊

$$G(f) = \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{2}{\beta}\pi^2 f^2\right)$$

ist die effektive Zeitdauer

$$T_{\text{eff}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|g(t)|}{g_{\text{max}}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta}{2}t^2\right) dt = \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}$$

und die effektive Bandbreite

$$F_{\text{eff}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G(f)|}{G_{\text{max}}} df = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2}{\beta}\pi^2 f^2\right) df = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}$$

Daraus folgt das Produkt

$$T_{\text{eff}} \cdot F_{\text{eff}} = 1.$$