SAMMLUNG GÖSCHEN BAND 77

# EINFÜHRUNG IN DIE THEORETISCHE PHYSIK

## BAND II

## DAS ELEKTROMAGNETISCHE FELD

von

DR. ING. WERNER DÖRING

o. Professor an der Justus-Liebig-Hochschule Gießen

Mit 15 Abbildungen

WALTER DE GRUYTER & CO.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.

BERLIN 1955

Archiv-Nr. 11 00 77
Satz und Druck: Rudolf Wendt KG., Berlin N 65
Printed in Germany

# Inhaltsverzeichnis

# Verzeichnis einiger einschlägiger Werke

## a) Werke über das Gesamtgebiet der theoretischen Physik


H. v. Helmholtz: *Vorlesungen über theor. Physik* (6 Bände). Bd. IV: Elektrodynamik und Theorie des Magnetismus, Leipzig 1907.

F. Hund: *Einführung in die theor. Physik* (5 kleinere Bände). 2. Bd.: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, Leipzig 1947.

G. Joos: *Lehrbuch der theor. Physik*, 8. Aufl., Leipzig 1954.

L. Page: *Introduction to theor. Physics*, 3. Aufl., Toronto, New York, London 1952.

G. Kirchhoff: *Vorlesungen über math. Physik*. Bd. III: Elektrizität u. Magnetismus, Leipzig 1891.

M. Planck: *Einführung in die Theorie der Elektrizität und des Magnetismus*, 4. Aufl., Leipzig 1927 (und 4 weitere Bände).

Cl. Schäfer: *Einführung in die theor. Physik* (3 umfangreiche, z. T. mehrteilige Bände). III. Bd., 1. Teil: Elektrodynamik und Optik, 2. Aufl., Berlin und Leipzig 1949.

A. Sommerfeld: *Vorlesungen über theor. Physik* (6 Bände). Bd. III: Elektrodynamik, Wiesbaden 1948.

W. Weizel: *Lehrbuch der theor. Physik* (2 Bände), Berlin, Göttingen, Heidelberg 1950.


## b) Beiträge zu Handbüchern


*Encyklopädie der math. Wissenschaften*, Bd. V, Teil 2 und 3: *Elektrizität und Optik*, 1902—1925 (viele verschiedene Verfasser).

*Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus* (5 Bände). Die Theorie ist enthalten in Bd. IV: *Magnetismus und Elektromagnetismus* (mehrere Verfasser).

*Handbuch der Experimentalphysik*. Bd. 11, 1. Teil: G. Mie: *Elektrodynamik*, Leipzig 1932.

*Handbuch der Physik*. Bd. XV: *Magnetismus, elektromagnetisches Feld*, Berlin 1927.


## c) Einzelwerke über die Theorie des elektromagnetischen Feldes


R. Becker: *Theorie der Elektrizität*. Bd. I: *Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität*, 12. u. 13. Aufl., Berlin und Leipzig 1944. Bd. II: *Elektronentheorie*, Leipzig und Berlin 1933.

E. Cohn: *Das elektromagnetische Feld*, Leipzig 1900.

N. H. Frank: *Introduction to electricity und optics*, 2. Aufl., New York, Toronto, London 1950.

J. Frenkel: *Lehrbuch der Elektrodynamik* (2 Bände), Berlin 1926 u. 1928.

J. Cl. Maxwell: *Lehrbuch der Elektrizität* (2 Bände, deutsche Übersetzung), Berlin 1883.

G. Mie: *Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus*, Stuttgart 1948.

R. W. Pohl: *Elektrizitätslehre* (experimentell), 13. und 14. Aufl., Berlin, Göttingen, Heidelberg 1949.

J. C. Slater, N. H. Frank: *Electromagnetism*, 3. Aufl., New York, London 1947.

# I. Elektrostatik

## § 1. Grundlegende Erfahrungstatsachen

Die Elektrostatik ist die Lehre von den ruhenden elektrischen Ladungen. Die älteste Methode, Körper in den elektrisch geladenen Zustand zu versetzen, besteht darin, sie miteinander in innige Berührung zu bringen, was am besten durch Reiben aneinander bewirkt wird. Sind die Körper chemisch verschieden, so sind sie dann im allgemeinen nach dem Auseinanderziehen elektrisch geladen. Das Vorhandensein elektrischer Ladungen äußert sich an dem Auftreten gewisser Kräfte, die im ungeladenen Zustand fehlen. Die experimentelle Erforschung dieser Kräfte führte zu den folgenden qualitativen Erkenntnissen:

1. Es gibt zwei Arten elektrischer Ladung, positive und negative. Ungleichnamige Ladungen ziehen sich an, gleichnamige stoßen sich ab (du Fay, um 1735).

Nach unsern heutigen Kenntnissen enthalten alle Körper positive und negative Ladungen in so großer Menge, daß man sie nicht vollständig voneinander trennen kann. Die dazu erforderlichen Kräfte würden unsere technischen Möglichkeiten bei weitem übersteigen. Im normalen, ungeladenen Zustand enthält ein Körper gerade so viel positive und negative Ladung, daß die Kraft eines anderen, geladenen Körpers auf ihn verschwindet.

2. Die elektrische Ladung besitzt Substanzcharakter, d. h. sie kann weder erzeugt noch vernichtet, sondern nur von einem Körper auf den anderen übertragen werden.

3. In groben Zügen kann man die Körper einteilen in Leiter und Nichtleiter (Gray, 1729).

Durch Nichtleiter oder Isolatoren vermögen elektrische Ladungen nur in sehr geringem Maße hindurchzuwandern, durch Leiter dagegen fast ohne Widerstand. Es gibt aber dazwischen Übergänge.

4. Ebenso wie die Materie besitzt auch die elektrische Ladung eine atomistische Struktur.

Der direkte, experimentelle Beweis dafür wurde 1913 von Millikan erbracht. Indirekt hat man diese Tatsache schon viel früher aus den Gesetzen über die chemischen Umwandlungen beim Durchgang elektrischer Ladungen durch Salzlösungen (Elektrolyte) erschlossen (Faraday, 1834). Die positiv geladenen Elektrizitätsteilchen in den Atomen heißen Atomkerne; die negativ geladenen heißen Elektronen. Wir werden hier auf die Struktur der Atome nicht eingehen. Jedoch benutzen wir die Vorstellung, daß sich alle Ladungen aus sehr vielen kleinen geladenen Teilchen zusammensetzen, die einzeln als punktförmig angesehen werden können.

## § 2. Die elektrische Ladung und elektrische Feldstärke

Um zu einer einwandfreien Definition des Begriffes „elektrische Ladung“ zu gelangen, betrachten wir folgenden Versuch: Wir laden einen Körper K elektrisch auf und halten ihn dann in konstanter Lage und unveränderlichem Ladungszustand fest. In die Nähe von K bringen wir nacheinander einige kleine, elektrisch geladene Probekörper an verschiedene Stellen und messen die auf sie wirkenden Kräfte. Davon subtrahieren wir die Kräfte, die im ungeladenen Zustand auf die Probekörper an denselben Stellen wirken. Für die restlichen Kräfte findet man das folgende Gesetz: Die Richtung der elektrischen Kraft auf verschiedene Probekörper am gleichen Ort ist gleich. Das Verhältnis der Kräfte auf zwei Probekörper am selben Ort ist unabhängig vom Ort, hängt also nur von dem Zustand der Probekörper ab.

Die atomistische Struktur der elektrischen Ladung macht dieses Resultat plausibel. Wir wollen dabei im Augenblick von der Gesamtheit der positiven und negativen Ladungsteilchen absehen, welche bereits im elektrisch neutralen Zustand im Probekörper vorhanden sind, und nur die zahlreichen identischen Teilchen der überschüssigen Ladung betrachten. Wenn der Probekörper klein genug ist, erfahren diese alle von dem Körper K die gleiche Kraft. Die Gesamtkraft ist also ihrer Anzahl proportional. Das Verhältnis der Kräfte auf zwei verschieden geladene Probekörper, die nacheinander an den gleichen Ort gebracht werden, ist gleich dem Verhältnis der Anzahl der Ladungsteilchen. Es ist daher vom Ort unabhängig. Zugleich macht diese Betrachtung deutlich, wann der Probekörper als klein genug anzusehen ist. Die Kraft des Körpers K auf die Ladungsteilchen an verschiedenen Stellen des Probekörpers muß gleich sein. Makroskopisch zeigt sich das daran, daß sich die Gesamtkraft bei einer Verschiebung des Probekörpers um eine Strecke von der Größenordnung seiner linearen Abmessungen praktisch nicht ändert.

Die obige Erfahrungstatsache kann man folgendermaßen zusammenfassen: Die elektrische Kraft $\mathfrak{F}$ auf den Probekörper ist gleich dem Produkt aus einem skalaren, nur von den Eigenschaften des Probekörpers abhängigen Faktor $q$ mal einem vektoriellen, nur vom Ort abhängigen Faktor $\mathfrak{E}$:

$$\mathfrak{F} = q\mathfrak{E}. \tag{1}$$

Den Faktor $q$ nennt man die elektrische Ladung des Probekörpers. Der Faktor $\mathfrak{E}$ ist die elektrische Feldstärke, welche der Körper K in seiner Umgebung erzeugt. Selbstverständlich definiert die eine Gleichung (1) nicht die beiden Größen $q$ und $\mathfrak{E}$. Der geschilderte Versuch zeigt aber, wie man im Prinzip das Verhältnis der Ladungen zweier Körper durch Messung der elektrischen Kräfte am gleichen Ort bestimmen kann. Dieses Verfahren, zwei Probekörper miteinander zu vergleichen, definiert eine Eigenschaft dieser Körper, eben ihre elektrische Ladung, welche damit als Grundgröße eingeführt ist[1]).

In dieser Betrachtung ist wohl zu beachten, daß nach Voraussetzung der Zustand des Körpers K durch den Probekörper nicht verändert werden darf. Das ist im allgemeinen nur erfüllt, wenn die Ladung $q$ des Probekörpers genügend klein ist, so daß die Kraft, mit der sie auf die einzelnen Ladungsteilchen von K zurückwirkt, eine vernachlässigbar geringe Wirkung hat. Aber auch bei sehr kleinem $q$ wird diese Bedingung verletzt, sobald der Abstand der Oberflächen des Probekörpers und des Körpers K mit den Atomabmessungen vergleichbar wird. Wenn z. B. K eine Flüssigkeit ist, so erfährt ein eingetauchter ungeladener Probekörper auch eine Kraft, nämlich den Auftrieb. Diese „mechanischen" Kräfte sind nach unsern heutigen Kenntnissen im wesentlichen ebenfalls elektrische Kräfte und rühren davon her, daß sich die Verteilung der Elektronen und Atomkerne in jedem Körper ändert, wenn er sich anderen Körpern bis auf Entfernungen von der Größenordnung der Atomabmessungen nähert. Sie hängen im allgemeinen auch

[1]) Siehe W. Döring: Einführung in die theor. Physik I, Mechanik, Sammlung Göschen Bd. 76, § 1 und § 15.

noch von der Ladung des Probekörpers ab und können daher nicht eliminiert werden, indem man von der Kraft auf den geladenen Probekörper die Kraft auf den ungeladenen Probekörper am gleichen Ort subtrahiert.

Kraftmessungen mit makroskopischen Probekörpern liefern daher nach (1) nur die Feldstärken im Vakuum. Aussagen über die elektrischen Felder im Innern der Materie erhält man durch Extrapolation der Gesetze für die elektrischen Felder im Vakuum auf atomare Probekörper und subatomare Entfernungen. Dieses Vorgehen hat sich an der Erfahrung bewährt. Wenn man sich vorstellt, daß alle Körper aus praktisch punktförmigen Elektronen und Atomkernen aufgebaut sind, erhält man auf diese Weise für das Innere der Körper einen sehr zackigen Verlauf von $\mathfrak{E}$. Das, was man makroskopisch unter der Feldstärke im Innern eines Körpers versteht, ist ein gewisser Mittelwert davon (vgl. § 5 und 6).

## § 3. Das Coulombsche Gesetz

Das Kraftgesetz zwischen ruhenden elektrischen Ladungen wurde experimentell von Coulomb im Jahre 1785 durch Messungen mit Hilfe der Drehwaage gefunden. Es lautet: Die elektrische Kraft $\mathfrak{F}$ zwischen zwei geladenen Körpern, deren Ausdehnung klein gegen ihren Abstand $r$ ist, hat die Richtung der Verbindungslinie zwischen den beiden Körpern. Ihr Betrag $F$ ist den Ladungen $Q_1$ und $Q_2$ der beiden Körper proportional und dem Quadrat ihres Abstandes umgekehrt proportional. Man schreibt dies Gesetz heute meist in der Form:

$$F = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{4\pi r^2}. \tag{1}$$

Dadurch, daß der Proportionalitätsfaktor $1/4\pi\varepsilon_0$ genannt wird, tritt im Nenner nicht $r^2$, sondern die Oberfläche $4\pi r^2$ einer Kugel vom Radius $r$ auf. Das wird sich nachher als zweckmäßig herausstellen.

Die Größe $\varepsilon_0$ ist eine Naturkonstante mit der Dimension $\frac{(\text{Ladung})^2}{\text{Kraft} \cdot \text{Fläche}}$. Ihr Zahlenwert hängt von der gewählten Ladungseinheit ab. Die heute am meisten benutzte Ladungseinheit 1 Coulomb wird dadurch festgelegt, daß man den Zahlenwert von $\varepsilon_0$ in der Einheit $\frac{(\text{Coulomb})^2}{\text{dyn} \cdot \text{cm}^2}$ vorschreibt.

Aus Gründen, die wir erst später (§ 29) durchschauen werden, wählt man ihn so, daß $\varepsilon_0$ mal dem Quadrat der Vakuumlichtgeschwindigkeit $c_0$ einen mathematisch einfachen Zahlenwert annimmt, nämlich

$$\varepsilon_0 c_0^2 = \frac{10^2}{4\pi} \frac{\text{Coulomb}^2}{\text{dyn} \cdot \text{sek}^2} = \frac{10^7}{4\pi} \frac{\text{Coulomb}^2}{\text{Newton} \cdot \text{sek}^2}. \tag{2}$$

$c_0$ hat den Wert $c_0 = 2{,}9976 \cdot 10^8$ m/sek. In der Formel (2) ist $c_0$ eine benannte Größe, keine Zahl!

In der theoretisch-physikalischen Literatur wird vielfach noch ein anderer Ladungsbegriff benutzt, der sich von dem in § 2 definierten Grundbegriff $Q$ unterscheidet. Die elektrostatisch definierte Ladung $Q_s$ ist eine abgeleitete Größe, die zu $Q$ proportional ist und so definiert wird, daß bei ihrer Verwendung der Proportionalitätsfaktor $4\pi\varepsilon_0$ im Coulombschen Gesetz verschwindet. Sie kann demnach folgendermaßen erklärt werden: Die elektrostatisch definierte Ladung $Q_s$ eines Körpers ist gleich der Wurzel aus der elektrischen Kraft auf einen anderen Körper mit der gleichen Ladung im Vakuum, multipliziert mit dessen Abstand. Zwei Körper, bei denen die elektrostatisch definierten Ladungen die Werte $Q_{s1}$ und $Q_{s2}$ haben, üben aufeinander die Kraft

$$F = \frac{Q_{s1} \cdot Q_{s2}}{r^2} \tag{3}$$

aus. Der Vergleich mit (1) ergibt als Zusammenhang zwischen den Größen $Q$ und $Q_s$ des gleichen Körpers

$$Q_s = \frac{Q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}. \tag{4}$$

Ist $Q = 1$ Coulomb, so erhält man daraus

$$Q_s = \frac{1\ \text{Coulomb}}{\sqrt{\dfrac{10^2}{c_0^2} \dfrac{\text{Coulomb}^2}{\text{dyn sek}^2}}} = \frac{c_0}{10} \sqrt{\text{dyn}} \cdot \text{sek} = 2{,}9976 \cdot 10^9\, \text{g}^{1/2} \text{cm}^{3/2} \text{sek}^{-1}.$$

Die Größe $1\sqrt{\text{dyn}}\ \text{cm} = 1\ \text{g}^{1/2}\ \text{cm}^{3/2}\ \text{sek}^{-1}$ nennt man auch „eine elektrostatische Ladungseinheit".

Wir wollen im folgenden den elektrostatischen Ladungsbegriff $Q_s$ nicht benutzen, da er anscheinend allmählich außer Gebrauch kommt. In § 33 werden wir einige Formeln auf die anderen, mit Hilfe von $Q_s$ definierten Begriffe umschreiben. Da (4) eine Größengleichung darstellt, die von der Wahl der Einheiten unabhängig ist, kann man jede Größengleichung, in der $Q$ vorkommt, in eine andere Größengleichung umwandeln, in der $Q_s$ vorkommt. Für das Formelrechnen ist es also gleichgültig, ob man $Q$ oder $Q_s$ benutzt. Diese nahezu triviale Tatsache ist merkwürdiger Weise oft bestritten worden. Beim Zahlenrechnen ist manchmal die Benutzung von $Q$, manchmal die von $Q_s$ bequemer.

## § 4. Das elektrostatische Potential

Das elektrische Feld einer gegebenen Ladungsanordnung läßt sich auf Grund des Coulombschen Gesetzes unmittelbar hinschreiben. Ein Elektrizitätsteilchen mit der Ladung $e_j$, dessen Lage durch den Ortsvektor $\mathfrak{r}_j$ gegeben ist, übt auf eine Probeladung $q$ am Endpunkt des Vektors $\mathfrak{r}$ eine Kraft aus, welche die Richtung des Vektors $\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_j$ hat und den Betrag $\frac{e_j q}{4\pi\varepsilon_0 |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_j|^2}$. Dieses Teilchen erzeugt demnach an dieser Stelle die Feldstärke $\frac{e_j}{4\pi\varepsilon_0 |\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_j|^2} \cdot \frac{\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_j}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_j|}$. Summiert man diese Ausdrücke über alle $N$ Ladungen des betrachteten Körpers, so erhält man das gesamte Feld

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} \frac{e_j}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_j|^3} (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_j). \tag{1}$$

Daraus lassen sich eine Reihe von Eigenschaften des elektrischen Feldes ablesen. Als erstes stellen wir fest: $\mathfrak{E}$ kann als Gradient[1]) einer skalaren Ortsfunktion $\varphi(\mathfrak{r})$ geschrieben werden:

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{2}$$

Die Funktion $\varphi(\mathfrak{r})$ lautet

$$\varphi(\mathfrak{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} \frac{e_j}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_j|}. \tag{3}$$

Die Richtigkeit dieser Beziehung bestätigt man leicht durch Ausrechnen in Koordinaten. Die Funktion $\varphi(\mathfrak{r})$ heißt das elektrostatische Potential. Es ist durch (2) nur bis auf eine willkürliche additive Konstante bestimmt. In (3) ist über diese so

---

[1]) Im folgenden wird die Vektoranalysis als bekannt vorausgesetzt. An den Stellen, wo ein Begriff der Vektoranalysis zum erstenmal auftritt, wird jedes Mal verwiesen auf den entsprechenden Paragraphen in: S. Valentiner, Vektoranalysis, Sammlung Göschen Bd. 354. Hier vgl. § 21.

verfügt worden, daß $\varphi$ in unendlich großem Abstand von dem geladenen Körper verschwindet.

Aus (2) folgt weiter: Das Linienintegral über die Feldstärke $\mathfrak{E}$ zwischen zwei Punkten $P_1$ und $P_2$ ist unabhängig vom Wege zwischen ihnen gleich der Differenz der elektrostatischen Potentiale in $P_1$ und $P_2$:

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathfrak{E} d\mathfrak{r} = -\int_{P_1}^{P_2} \operatorname{grad} \varphi \, d\mathfrak{r} = \varphi(P_1) - \varphi(P_2). \qquad (4)$$

Diese Beziehung gilt allgemein für jeden Gradienten einer skalaren Ortsfunktion und daher auch für das elektrische Feld $\mathfrak{E}$. Multipliziert man (4) mit der Größe $q$ der Probeladung, so erhält man links die Arbeit, welche die Kraft des geladenen Körpers auf die Probeladung bei deren Bewegung von $P_1$ nach $P_2$ leistet. Man kann also auch definieren: Die Differenz der elektrostatischen Potentiale $\varphi(P_1) - \varphi(P_2)$ in zwei Punkten $P_1$ und $P_2$ ist gleich dem Quotienten aus der an der Probeladung geleisteten Arbeit bei der Bewegung von $P_1$ nach $P_2$ dividiert durch die Probeladung.

Die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten bezeichnet man als die Spannung zwischen ihnen. Sie hat die Dimension Arbeit/Ladung. Die üblichste Einheit der Spannung hat einen eigenen Namen:

$$1 \, \frac{\text{Newton} \cdot \text{m}}{\text{Coulomb}} = 1 \text{ Volt}. \qquad (5)$$

Nach (4) verschwindet das Linienintegral über $\mathfrak{E}$ längs eines geschlossenen Weges:

$$\oint \mathfrak{E} d\mathfrak{r} = 0. \qquad (6)$$

Das läßt sich auch direkt physikalisch einsehen. Wenn die Arbeit der Kraft des geladenen Körpers an der Probeladung bei einem geschlossenen Umlauf nicht null wäre, sondern positiv, so könnte man durch wiederholtes Umlaufen eine beliebig große Arbeit gewinnen, ohne daß dafür ein Äquivalent vorhanden wäre, denn der Zustand des geladenen Körpers sollte ja voraussetzungsgemäß dabei konstant sein. Wäre das Umlaufsintegral negativ, so gilt für Umläufe in umgekehrter Richtung dasselbe. Da dieses Resultat dem Satz von der Erhaltung der Energie widerspricht, muß also $\oint \mathfrak{E} d\mathfrak{r} = 0$ sein.

Diese Eigenschaft des elektrostatischen Feldes ist gleichwertig mit der Aussage: Das elektrostatische Feld ist wirbelfrei[1]):

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0 \tag{7}$$

oder in Koordinaten ausgeschrieben

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0; \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0; \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0. \tag{8}$$

Das folgt unmittelbar aus (2) wegen der Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Differentiationen bei mehrfachen partiellen Ableitungen oder auch aus (6) mit Hilfe des Stokes'schen Integralsatzes.

## § 5. Die Raumladungs- und Flächenladungsdichte

In einem makroskopischen geladenen Körper ist niemals die Lage jedes einzelnen Ladungsteilchens bekannt, sondern nur ihre mittlere Verteilung, welche durch Angabe der Raumladungsdichte und Flächenladungsdichte beschrieben wird. Unter der Raumladungsdichte $\varrho$ versteht man den Quotienten aus der Gesamtladung $\Delta Q$ innerhalb eines Volumens $\Delta V$ dividiert durch $\Delta V$:

$$\varrho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}. \tag{1}$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß dieser Quotient von $\Delta V$ unabhängig ist. Das ist innerhalb gewisser Grenzen meist der Fall. Die linearen Abmessungen von $\Delta V$ dürfen nur nicht so klein sein, daß sie mit dem mittleren Abstand der Atome vergleichbar werden. Sonst ändert sich nämlich unter Umständen $\Delta Q$ bei einer geringfügigen Änderung der Größe und Lage von $\Delta V$ sehr erheblich. $\Delta V$ darf andererseits auch nicht so groß sein, daß sich in seinem Innern die makroskopischen mittleren Eigenschaften merklich ändern. Diese Bedingungen sind nicht nur bei der Definition der Raumladungsdichte zu beachten, sondern bei allen makroskopischen spezifischen Größen wie z. B. der Massendichte.

An der Oberfläche von geladenen Körpern kann man jedoch die Verteilung der Ladung nicht durch Angabe einer Raum-

[1]) S. Valentiner: Vektoranalysis, Sammlung Göschen Bd. 354, § 26 und 27.

ladungsdichte sinnvoll beschreiben. Häufig liegen dort die Ladungsteilchen nur in einer dünnen Oberflächenschicht, deren Dicke wenige Atomabstände beträgt, so daß $\Delta Q$ nicht dem Volumen $\Delta V$ proportional ist, sondern dem Flächenstück $\Delta f$, welches das betrachtete Volumen aus der Oberfläche ausschneidet. Innerhalb der oben erwähnten Grenzen ist dann der Quotient

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta f} \tag{2}$$

von $\Delta f$ unabhängig. $\sigma$ nennt man die Oberflächenladungsdichte.

Wenn bei einem Körper nicht die Lage aller Ladungsteilchen genau bekannt ist, sondern nur die Raumladungs- und Flächenladungsdichte, kann man natürlich auch nicht das elektrostatische Potential exakt berechnen. Dieses ist nach (§ 4; 3) im Innern des Körpers eine sehr zackige Funktion des Ortes, welche in der Nähe jedes Ladungsteilchens über alle Grenzen steigt. Da $\varrho$ und $\sigma$ nur die mittlere Ladungsverteilung wiedergeben, kann man aus ihnen auch nur das makroskopisch gemittelte Potential ausrechnen, in welchem diese atomaren Unregelmäßigkeiten durch einen geeigneten Mittelungsprozeß ausgeglättet worden sind. Dieses gemittelte Potential gehört in Strenge zu einer Ladungsverteilung, welche aus der wirklichen durch eine Verschmierung der Ladung jedes Elektrons und Atomkerns über ein im Vergleich zu den Atomabständen großes Volumen hervorgeht. Bei ihr ist die Ladung kontinuierlich verteilt in solcher Weise, daß in jedem beliebig kleinen Volumenelement $dV$ die Ladung $\varrho dV$ und auf jedem Oberflächenelement $df$ die Ladung $\sigma df$ enthalten ist. Befindet sich das Volumenelement $dV$ am Endpunkt des Vektors $\mathfrak{r}'$, so ist nach (§ 4; 3) sein Beitrag zum Potential durch $\frac{\varrho(\mathfrak{r}')\,dV}{4\pi\varepsilon_0|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|}$ gegeben. Durch Integration über alle Volumen- und Oberflächenelemente erhält man demnach für das makroskopisch ausgeglättete Potential

$$\varphi(\mathfrak{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\iiint\limits_{\mathfrak{r}'} \frac{\varrho(\mathfrak{r}')dV}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|} + \iint\limits_{\mathfrak{r}'} \frac{\sigma(\mathfrak{r}')df}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|}\right]. \tag{3}$$

## § 6. Die Quellen des elektrischen Feldes

Aus der allgemeinen Formel (§ 4; 1) für $\mathfrak{E}$ ergibt sich eine weitere wichtige Eigenschaft des elektrostatischen Feldes, wenn man das Oberflächenintegral über die Normalkomponente $E_n$ der Feldstärke über eine geschlossene Hüllfläche O bildet, also die Größe $\iint\limits_{O} E_n df$.

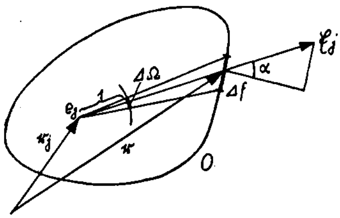


**Abb. 1. Zur Integration der elektrischen Feldstärke über eine geschlossene Hüllfläche O.**

Darin ist $E_n$ positiv zu wählen, wenn $\mathfrak{E}$ mit der Richtung der äußeren Normalen einen spitzen Winkel einschließt, sonst negativ. Wir berechnen das Integral zunächst für einen Summanden von (§ 4; 1).

$$\mathfrak{E}_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e_j}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_j|^3} (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_j).$$

Ist $\alpha$ der Winkel zwischen der Normalen auf einem Flächenelement $\Delta f$ und dem Vektor $\mathfrak{E}_j$ (vgl. Abb. 1), so hat die Normalkomponente von $\mathfrak{E}_j$ die Größe $E_{jn} = |\mathfrak{E}_j| \cos\alpha$. Also ist $E_{jn} \Delta f = \frac{e_j}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\cos\alpha \, \Delta f}{|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_j|^2}$. Die Größe $\cos\alpha\,\Delta f$ ist gleich der Projektion des Flächenelementes $\Delta f$ auf eine Kugelfläche durch $\Delta f$, deren Mittelpunkt in der Ladung $e_j$ liegt. Der Quotient aus $\cos\alpha\,\Delta f$ und dem Quadrat des Kugelradius $|\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_j|$ nennt man den räumlichen Winkel $\Delta\Omega$ von $\Delta f$. Man kann $\Delta\Omega$ anschaulich kennzeichnen als die Fläche, die ein Kegel mit der Spitze in $e_j$ durch den Rand von $\Delta f$ aus der Einheitskugel ausschneidet. Man beachte, daß der Radius der Einheitskugel die Zahl 1 ist, also keine Länge. Dementsprechend ist auch $\Delta\Omega$ dimensionslos. $\Delta\Omega$ ist positiv, wenn die äußere Normale auf $\Delta f$ mit $\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_j$ einen spitzen Winkel bildet, sonst negativ. Man erhält also

$$E_{jn} \Delta f = \frac{e_j}{4\pi\varepsilon_0} \Delta\Omega. \tag{1}$$

Bei Summation dieses Ausdruckes über die geschlossene Hüllfläche O und Grenzübergang zum Integral sind zwei Fälle zu unterscheiden: Liegt $e_j$ im Innern der Fläche, so ist $\iint\limits_{O} d\Omega$