

Thomas Kuttner
Armin Rohnen

Praxis der Schwingungsmessung

Messtechnik und
Schwingungsanalyse mit MATLAB®

2. Auflage

EBOOK INSIDE



Springer Vieweg

Praxis der Schwingungsmessung

Thomas Kuttner · Armin Rohnen

Praxis der Schwingungsmessung

Messtechnik und Schwingungsanalyse
mit MATLAB®

2., überarbeitete und erweiterte Auflage

Thomas Kuttner
Fakultät für Maschinenbau, Universität der
Bundeswehr München
Neubiberg, Deutschland

Armin Rohnen
Fakultät für Maschinenbau, Fahrzeugtechnik
Hochschule für angewandte
Wissenschaften München
München, Deutschland

ISBN 978-3-658-25047-8 ISBN 978-3-658-25048-5 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-25048-5>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2015, 2019

Das Buch erschien in der 1. Auflage unter dem Titel „Praxiswissen Schwingungsmesstechnik“

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Lektorat: Thomas Zipsner

Springer Vieweg ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Vorwort zur 2. Auflage

Nach der positiven Aufnahme der ersten Auflage durch die Leserschaft hat der Springer Vieweg Verlag die Herausgabe einer neuen Auflage angeregt. Das vorliegende Werk hat eine grundlegende Überarbeitung, Erweiterung und Neuausrichtung erfahren. Durch die Zusammenarbeit mit Armin Rohnen als Kollegen und Freund wurde das Buch um die Inhalte in den Kapiteln 11 bis 13 und 15 erweitert und um die Signalanalyse mit MATLAB® sowie zahlreiche Beispiele aus der Messpraxis ergänzt. Mit dieser Neuausrichtung hoffen die Autoren, den aktuellen Entwicklungen in der Messtechnik und Signalverarbeitung Rechnung tragen zu können und dem Anwender eine Handreichung zur Lösung von praxisrelevanten Messaufgaben geben zu können.

Wie bereits die erste Auflage wendet sich das Buch an drei Zielgruppen:

- Studierende und Einsteiger, die erstmals mit dem Gebiet der Schwingungsmesstechnik in Kontakt kommen und einen Einstieg in dieses interdisziplinäre Fachgebiet suchen. Hier finden Sie zu Ihrer Messaufgabe die Grundlagen, das Messverfahren und Skripte zur Signalverarbeitung mit MATLAB®.
- Fachleute aus der Praxis, die Möglichkeiten und Grenzen der Messverfahren und der Auswertung ausschöpfen wollen. Hierbei geht es in der Praxis oft um einen „horizontalen“ Vergleich von verschiedenen Verfahren und Methoden mit dem Ziel, das Geeignetste auszuwählen. Die Autoren hoffen, die Verfahren hinreichend in Breite und Tiefe beschrieben zu haben. Es werden nahezu ausnahmslos Verfahren vorgestellt, die in der praktischen Arbeit der Autoren zum Einsatz kommen, die Verfahren der Signalanalyse sind allesamt praktisch in Lehre und angewandter Forschung erprobt.
- Anwendungsspezialisten und technische Vertriebsmitarbeiter, die einen Teil der Messkette beherrschen und sich für den Gesamtzusammenhang interessieren. Dies ergänzt die Anforderungen der vorherigen Gruppe um eine „vertikale“ Schiene, bei welcher der Gesamtzusammenhang des Signalflusses im Mittelpunkt steht.

Wie bereits in der ersten Auflage praktiziert, wird das Wissen aus Sicht der Anwendung dargestellt. Der Aufbau von Messketten einschließlich der praktischen Problemlösung bei

deren Inbetriebnahme, Plausibilitätsprüfung und Störungsbeseitigung sind praxisnah dargestellt. Mit dieser Ausrichtung will das Buch für die Messpraxis lösungsorientierte Ansätze vermitteln und dem Anwender praxistaugliche Lösungen in die Hand geben. Im interdisziplinär geprägten Arbeitsfeld der Schwingungsmesstechnik sind die drei miteinander verzahnten Teile in einem Buch abgehandelt: der Schwingungstechnik als von der Mechanik geprägten Teildisziplin, der Messtechnik als Bestandteil Elektronik und der Signalverarbeitung als Bereich, der verwendete Techniken stark aus der Informatik bezieht.

Es werden die grundlegenden Kenntnisse der technischen Mechanik, Elektrotechnik und Messtechnik vorausgesetzt, welche z. B. in den ersten Semestern eines Studiums des Maschinenbaues oder der Elektrotechnik vermittelt werden. Der Ansatz, alles in einem Buch darzustellen, zieht notwendigerweise eine Beschränkung auf die grundlegenden Methoden und Verfahren nach sich, um den Umfang des Werkes nicht zu sprengen. Der ausgewiesene Spezialist wird sicherlich das eine oder andere Verfahren vermissen, für das auf die weiterführende Literatur verwiesen werden muss.

In dieses Fachbuch sind nicht nur eine fast 20 jährige Berufspraxis auf diesem Gebiet, sondern auch die Unterstützung und der Austausch mit Kollegen und der Industrie eingeflossen, die nicht alle namentlich genannt werden können. Ein besonderer Dank gilt Frau Dr. Kerstin Kracht für die begleitende Durchsicht des Manuskriptes und die wertvollen Anregungen. Für die Durchsicht und die eingeflossenen Verbesserungen zum Abschnitt Kalibrierung von Beschleunigungsaufnehmern bedanken sich die Autoren bei Herrn Begoff von der Fa. SPEKTRA in Dresden. Die Autoren möchten dem Lektorat des Springer Vieweg Verlags sehr herzlich für die freundliche Begleitung und permanente Unterstützung danken.

Die Rückmeldung aus dem Leserkreis ist den Autoren ein wichtiges Anliegen, um dieses Werk weiter zu verbessern. Haben Sie Anregungen, sind Ihnen Fehler im Inhalt aufgefallen oder haben Sie Verbesserungsvorschläge zur Darstellung? Für Rückmeldungen erreichen Sie uns unter folgender E-Mail:

kontakt@professorkuttner.de
www.professorkuttner.de
armin@rohnen.net
<http://schwingungsanalyse.com>

München
Planegg
im Januar 2019

Thomas Kuttner
Armin Rohnen

Inhaltsverzeichnis

1	Schwingungen und deren Messung	1
1.1	Thematik und Anwendung	1
1.2	Definition und Zustandsgrößen	3
1.3	Einteilung von Schwingungen nach deren Zeitverlauf	4
1.4	Einteilung von Schwingungen nach deren Entstehungsmechanismus	6
1.5	Systematisierung der Messaufgaben	8
1.6	Planung und Konzept von Messeinrichtungen	10
	Literatur	12
2	Schwingungen im Zeit- und Frequenzbereich	15
2.1	Harmonische Schwingungen	15
2.2	Zeigerdiagramm	18
2.3	Darstellung im Zeitbereich und Frequenzbereich	22
2.3.1	Begriffe	22
2.3.2	Fourier-Reihe	23
2.3.3	Fourier-Transformation	27
	Literatur	30
3	Freie Schwingungen	31
3.1	Translationsschwingungen	31
3.2	Rotationsschwingungen	33
3.3	Freie gedämpfte Schwingungen	35
	Literatur	42
4	Erzwungene Schwingungen	43
4.1	Federkrafterregung mit konstanter Kraftamplitude	43
4.2	Amplituden- und Phasenfrequenzgang	46
4.3	Übertragungsfunktionen und deren Inverse	50

4.4	Nyquistdiagramm (Ortskurven)	56
4.5	Zusammenstellung verschiedener Übertragungsfunktionen	57
	Literatur.	62
5	Schwingungsaufnehmer	63
5.1	Messprinzip für kinematische Größen	63
5.1.1	Grundlagen	63
5.1.2	Relativaufnehmer	65
5.1.3	Absolutaufnehmer	66
5.2	Auswahl des Aufnehmers und der Messgröße	69
5.3	Darstellung in Frequenzbändern	71
5.4	Pegeldarstellung	72
	Literatur.	75
6	Wegaufnehmer	77
6.1	Potenziometrische Wegaufnehmer	77
6.2	Kapazitive Wegaufnehmer	79
6.3	Induktive Wegaufnehmer	80
6.4	Wegaufnehmer nach dem Wirbelstromprinzip	83
6.5	Magnetostriktive Wegaufnehmer	85
6.6	Digitale Wegaufnehmer	86
6.7	Faseroptische Wegaufnehmer	87
6.8	Wegaufnehmer nach dem Lasertriangulationsprinzip	89
6.9	Videografische Verfahren	90
	Literatur.	94
7	Schnelleaufnehmer (Schwinggeschwindigkeitsaufnehmer)	95
7.1	Elektrodynamische Schnelleaufnehmer	95
7.2	Elektromagnetische Schnelleaufnehmer	98
7.3	Laser-Doppler-Vibrometrie	99
	Literatur.	104
8	Beschleunigungsaufnehmer	105
8.1	Piezoelektrische Beschleunigungsaufnehmer	105
8.1.1	Der piezoelektrische Effekt	105
8.1.2	Bauformen	107
8.1.3	Signalaufbereitung	112
8.1.4	Frequenzgänge und Messbereiche	118
8.1.5	Einflussgrößen auf die Messung mit piezoelektrischen Beschleunigungsaufnehmer	122
8.1.6	Befestigung piezoelektrischer Beschleunigungsaufnehmer	125
8.1.7	Auswahl piezoelektrischer Beschleunigungsaufnehmer	134

8.2	DMS-Beschleunigungsaufnehmer	137
8.3	Kapazitive Beschleunigungsaufnehmer	138
8.4	Piezoresistive Beschleunigungsaufnehmer	139
8.5	Beschleunigungsaufnehmer nach dem Servoprinzip	141
8.6	Kalibrierung von Beschleunigungsaufnehmern	142
	Literatur	143
9	Deformatorische Aufnehmer	145
9.1	Dehnungsmessstreifen	145
9.1.1	Aufbau und Funktionsweise	145
9.1.2	Einflussgrößen auf die Messung mit DMS	150
9.1.3	Viertelbrückenschaltung	152
9.1.4	Halbbrückenschaltung	155
9.1.5	Vollbrückenschaltung	156
9.1.6	Trägerfrequenz- und Gleichspannungs-Messverstärker	158
9.1.7	Applikation und Kalibrierung	161
9.1.8	Messung einachsiger Spannungszustände mittels DMS	164
9.2	Messprinzip von Kraft- und Momentenaufnehmern	173
9.3	DMS-Kraft- und Momentenaufnehmer	178
9.4	Piezoelektrische Kraft- und Momentenaufnehmer	186
9.5	Magnetoelastische Kraft- und Momentenaufnehmer	188
9.6	Mehrkomponentenaufnehmer	191
9.7	Einbau von Kraft- und Momentenaufnehmern	195
	Literatur	198
10	Signalverarbeitung	201
10.1	Signalfluss und Gerätefunktionen	201
10.2	Messverstärker	203
10.3	Elektromagnetische Beeinflussung der Messkette	209
10.3.1	Ursachen	209
10.3.2	Abhilfemaßnahmen	212
10.4	Kalibrierung und Plausibilitätsprüfung der Messkette	219
10.4.1	Methoden zur Kalibrierung der Messkette	219
10.4.2	Kennlinie, Offset und Übertragungskoeffizient	223
10.4.3	Signalpfadverfolgung und Fehlersuche in Messketten	231
10.5	TEDS (Transducer Electronic Data Sheet)	234
10.6	Filter	237
10.6.1	Aufgaben und Funktion von Filtern	237
10.6.2	Übertragungsfunktion	239
10.6.3	Einschwingverhalten	244
10.6.4	Filterauswahl	246

10.7	Analog-Digital-Wandlung	248
10.7.1	Digitale Messtechnik	248
10.7.2	Quantisierung	249
10.7.3	Abtastung	253
10.7.4	Technische Umsetzung in A/D-Wandlern	256
10.8	Telemetrische Signalübertragung	262
	Literatur	267
11	MATLAB® und Datenformate eine Einführung	269
11.1	MATLAB® nach dem Start	269
11.2	MATLAB® Hilfe	270
11.3	MATLAB® Datentyp struct	271
11.4	Diagramme erstellen	273
11.5	Datenformate für Mess- und Metadaten	282
11.5.1	Mathworks *.mat Dateien	282
11.5.2	Audiodatenformat – WAV	282
11.5.3	Komma – separierte Werte – CSV	283
11.5.4	Universal Daten Format – UFF	288
11.5.5	ASAM ODS Format – ATF/ATFX	296
	Literatur	297
12	Messen mit MATLAB®	299
12.1	Messen mit der OnBoard-Soundkarte	300
12.1.1	Messen mit der OnBoard-Soundkarte und etwas Bedienungskomfort	302
12.2	Data Acquisition Toolbox™	305
12.2.1	Data Acquisition Toolbox™ und verbesserter Bedienungskomfort	308
12.2.2	Data Acquisition Toolbox™ – Standardaufgaben	316
12.2.3	Instrument Control Toolbox™ – HP-IB	321
12.3	Data Acquisition Toolbox™ in Verbindung mit Professional Audio Hardware	324
12.4	Mit der Data Acquisition Toolbox™ Signale generieren	330
12.5	MATLAB GUI – Grafische Oberfläche	341
12.5.1	Grafische Oberfläche erstellen	341
12.5.2	Funktionen den Elementen der grafischen Oberfläche zuordnen	345
12.6	Messprozess – ein variabler Datenlogger	353
12.6.1	Messprozess – Dokumentation	354
12.6.2	Messprozess – Messung	358
	Literatur	372

13	Raspberry Pi als Messgerät	373
13.1	Raspberry Pi	373
13.2	Digital IO	377
13.3	Spannungsmessung mit dem A/D-Wandler ads1015	381
13.4	Drehzahlmessung via Interrupt an Digital IO	384
13.5	Brückenschaltung mit Gleichspannungs-Messverstärker	390
	Literatur	396
14	Verfahren und Beispiele zur Signalanalyse	397
14.1	Aufgaben und Methoden der Signalanalyse	397
14.2	Signalanalyse im Zeitbereich	398
14.2.1	Effektivwert, Leistung, Mittelwert und verwandte Größen	398
14.2.2	Anwendungsbeispiele: Effektivwert, Leistung, Mittelwert und verwandte Größen	403
14.2.3	Hüllkurven	406
14.2.4	Crestfaktor	412
14.2.5	Autokorrelation und Kreuzkorrelation	414
14.2.6	1/n-Oktav-Bandpassfilterung	417
14.3	Signalanalyse im Häufigkeitsbereich	425
14.3.1	Amplitudendichte	425
14.3.2	Zählverfahren	427
14.4	Signalanalyse im Frequenzbereich	435
14.4.1	Fourier-Transformation – FFT oder DFT?	435
14.4.2	Grundlagen zur Diskreten-Fourier-Transformation	436
14.4.3	Aliasing	445
14.4.4	Zusammenhänge zwischen den DFT-Parametern	446
14.4.5	Leakage und Fensterfunktionen	450
14.4.6	Triggerung	461
14.4.7	Mittelung und Überlappung	463
14.4.8	Spektrale Größen	467
14.4.9	Achsenskalierung	474
14.4.10	Differenzieren und Integrieren	477
14.4.11	Praxisgerechte Einstellungen für Orientierungsmessungen	479
14.4.12	Praktische Umsetzung in MATLAB® mit Testsignalen	482
14.4.13	Spektrale Größen in MATLAB®	499
14.4.14	Modulationsanalyse	500
14.5	Übertragungsfunktion	506
	Literatur	518

15 Experimentelle Modalanalyse	521
15.1 Annahmen und Begriffserklärungen	522
15.2 Zusammenfassung der analytischen Grundlagen der Modalanalyse	524
15.3 Operative Durchführung der experimentellen Modalanalyse	529
15.3.1 Lagerung	531
15.3.2 Objektanregung mittels Impulshammer	531
15.3.3 Objektanregung mittels Shaker	535
15.4 Auswertung der experimentellen Modalanalyse in MATLAB®	535
15.4.1 Auswertung von Messungen mit Impulshammeranregung ...	535
15.4.2 Auswertung von Messungen mit Shaker-Anregung	546
Literatur	550
Stichwortverzeichnis	551

Schwingungen und deren Messung

1

- Dieses Kapitel umreißt die Thematik, zeigt das interdisziplinäre Zusammenwirken der einzelnen Teilgebiete auf und definiert Grundbegriffe. Die Einteilung der Schwingungen nach dem Zeitverlauf und dem Entstehungsmechanismus werden dargestellt und anhand der Übertragungsfunktion die möglichen Arten von Messaufgaben systematisiert. Die Planung und Konzeption von Messeinrichtungen zur Schwingungsmessung wird anhand ausgewählter Kriterien behandelt. Damit schafft dieses Kapitel die Grundlagen für das Verständnis des Schwingungsvorganges, der Messaufgabe und der Interpretation der Messergebnisse. Mit dem vertieften Wissen wird der Anwender in die Lage versetzt, seine konkreten Messaufgaben besser analysieren und planen zu können. Für die Auswahl von Messtechnik liefert der Kriterienkatalog eine Entscheidungshilfe.

1.1 Thematik und Anwendung

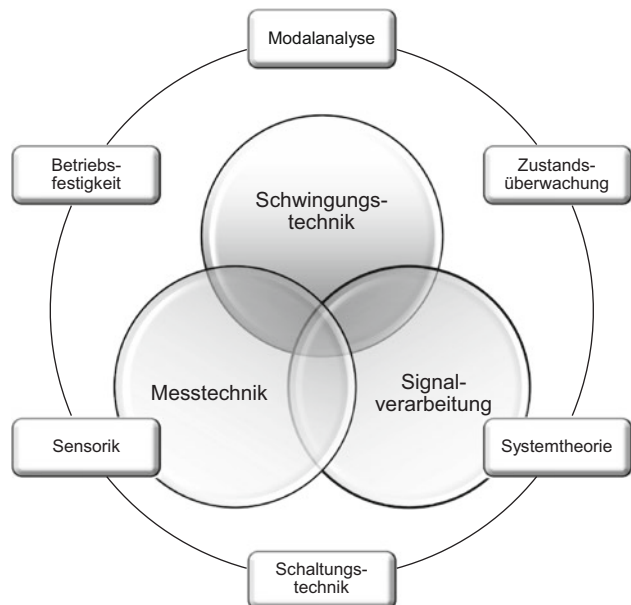
Schwingungsmessungen sind ein wichtiges und unverzichtbares Werkzeug für die Lösung einer Reihe von ingenieurwissenschaftlichen Aufgabenstellungen. Ohne der späteren Systematisierung in Abschn. 1.5 vorzugreifen, seien als Beispiele genannt:

- Schwingungsmessung an einem Maschinenfundament zur Messung der Schwingungseinwirkung am Aufstellort und Vergleich mit zulässigen Grenzwerten,
- Messung der Schwingungen an Fahrwerkskomponenten, um die auftretenden Belastungs-Zeit-Verläufe (Kräfte und Momente) zu messen und daraus Lastannahmen für die Auslegung abzuleiten,
- Messung der dynamischen Federsteifigkeit von Bauteilen mit dem Ziel der Ermittlung von Werkstoff- und Bauteilkennwerten unter schwingender Belastung.

Aus den unterschiedlichen Aufgabenstellungen ist ersichtlich, dass die verwendete Messtechnik und die Durchführung der Messung an die jeweilige Messaufgabe angepasst sein muss.

Die Schwingungsmesstechnik stellt sich aus der Schnittmenge von drei Wissenschaftsdisziplinen dar: der Schwingungstechnik, der Messtechnik und der Signalverarbeitung (Abb. 1.1). Die Grundlagen der Schwingungstechnik liefern einen Hintergrund zur Definition der Messaufgabe, der Auswahl von Messprinzip und Aufnehmer sowie der Weiterverarbeitung, Auswertung und Interpretation der Messung. Mit dem Wissen zur Sensorik und Messtechnik können Aufnehmer und Messeinrichtung optimal ausgewählt und aufgebaut werden. Hierfür sind wiederum Vorabschätzungen aus der Schwingungstechnik erforderlich. Mit dem Wissen um Schwingungstechnik und Messtechnik können in Richtung der Signalverarbeitung die Anforderungen adressiert werden, um die Signale des Aufnehmers sinnvoll weiter zu verarbeiten und auszuwerten. Die Signalverarbeitung – heute fast ausschließlich als digitale Signalverarbeitung – stellt die Methoden bereit, die elektrischen Größen aus dem Aufnehmer aufzubereiten. Für eine Reihe von Aufnehmern ist die digitale Signalverarbeitung eine Grundvoraussetzung für deren Funktion (z. B. Vibrometer, magnetostriktive Weg- und Kraftmessung). Für die Signalverarbeitung ist die Beschreibung des zu messenden Schwingungsvorganges einerseits und das verwendete Messprinzip im Aufnehmer bzw. dessen mathematisches Modell andererseits eine unverzichtbare Information zur sinnvollen Weiterverarbeitung der Signale und deren richtigen Interpretation.

Abb. 1.1 Zusammenwirken der Teilgebiete der Schwingungsmesstechnik



Aus dem interdisziplinären Zusammenwirken der Schwingungstechnik, der Messtechnik und Signalverarbeitung lassen sich die Anwendungsfelder z. B. in der Betriebsfestigkeit, der experimentellen Modalanalyse und Zustandsüberwachung ableiten. Jedes der genannten Felder benötigt zuverlässige Messergebnisse, auf deren Basis sich Auswertung und Interpretation anschließen. Andererseits treiben die genannten Anwendungsfelder ebenfalls die Entwicklung auf dem Gebiet der Sensorik, deren Schaltungstechnik und Systemtheorie als mathematischen Hintergrund für die Signalverarbeitung voran.

1.2 Definition und Zustandsgrößen

Die DIN 1311-1 gibt als Definition für Schwingungen an [1]:

► Eine Schwingung ist eine Änderung einer Zustandsgröße eines Systems, bei der im Allgemeinen die Zustandsgröße abwechselnd zu- und abnimmt. Spezielle zeitliche Änderungen wie Stoß- oder Kriechvorgänge werden im erweiterten Sinne auch als Schwingungen bezeichnet.

Mechanische Schwingungsvorgänge werden über *Zustandsgrößen* in einem mechanischen System beschrieben [2]. Mechanische Zustandsgrößen sind:

- **Kinematische Zustandsgrößen:** Im Falle einer translatorischen Bewegung kann dies die Auslenkung sein. Ebenso kommen die Schnelle oder Beschleunigung als kinematische Größen in Betracht, die sich aus einer zeitlichen Ableitung der Auslenkung ergeben. Analog dazu sind Zustandsgrößen einer Rotationsschwingung der Winkel, die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung.
- **Dynamische Zustandsgrößen:** Zur Beschreibung des Zustandes eines schwingungsfähigen Systems können Schnittreaktionen dienen, z. B. Normalkraft, Querkraft, Biegemoment oder Torsionsmoment. Diese Größen können ebenso in normierter Form als Spannung (Normalspannung oder Schubspannung) verwendet werden.
- **Deformatorische Zustandsgrößen:** Neben den Spannungen können auch die Deformationen (Dehnungen und Schubverzerrungen) zur Beschreibung des Zustandes eines schwingungsfähigen Systems dienen.

Für die Erfüllung der Messaufgabe ist es deshalb wichtig, einerseits im schwingungsfähigen System eine geeignete und andererseits messtechnisch gut zugängliche Zustandsgröße auszuwählen.

1.3 Einteilung von Schwingungen nach deren Zeitverlauf

Im Folgenden sollen Schwingungen nach verschiedenen Gesichtspunkten klassifiziert werden. DIN 1311-1 [1] gibt einen Überblick über die Einteilung von Schwingungen nach dem zeitlichen Verlauf, der hier in modifizierter Form [2, 3] dargestellt wird (Abb. 1.2).

Hierbei werden die Schwingungen in deterministische und stochastische Schwingungen eingeteilt. *Deterministische Schwingungen* lassen sich im Zeitverlauf durch eine Funktion beschreiben. Im Zeitverlauf ist für jeden Zeitpunkt t ein Funktionswert $x(t)$ über eine mathematische Funktion bestimmt. Als Beispiel kann hierbei die Werkstoffprüfung in einer Schwingprüfmaschine herangezogen werden, bei der möglichst genau der Kraft-Zeit-Verlauf bzw. Weg-Zeit-Verlauf bestimmt sein sollte.

Im Gegensatz dazu sind *stochastische Schwingungen* im Zeitverlauf nicht vorhersagbar. Eine genaue Trennung zwischen deterministischen und stochastischen Schwingungen ist von den jeweiligen Annahmen in der Betrachtung abhängig. Beim Beispiel der Schwingprüfmaschine ist der künftige Signalverlauf nur so lange vorhersehbar, bis die Probe bricht oder die Maschine aus sonstigen Gründen abschaltet. Ebenfalls wird sich bei genauerer Betrachtung die gemessene Schwingung nicht als reine Sinusschwingung herausstellen, sondern durch stochastische Anteile überlagert (z. B. Erschütterungen durch vorbeifahrende Fahrzeuge, Rauschen des Aufnehmers usw.). In der Praxis ist dann eine zweckmäßige Entscheidung zum Verlauf der Schwingung zu treffen. Für die Messung der Schwingung an Schwingprüfmaschinen und deren Regelung geht man

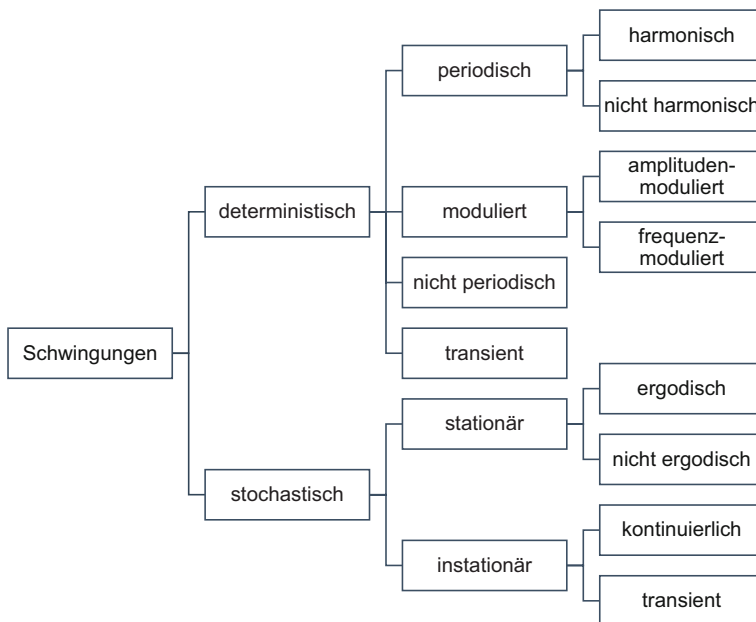


Abb. 1.2 Einteilung von Schwingungen nach deren zeitlichen Verlauf

zweckmäßig davon aus, dass die Maschine weiter läuft (und für diesen Fall Abschaltkriterien vorzusehen sind) und die stochastischen Schwingungen vernachlässigt werden können.

Deterministische Schwingungen lassen sich weiter unterteilen in periodische Schwingungen. *Periodische Schwingungen* haben das charakteristische Merkmal, dass sich der Funktionsverlauf nach einer Periodendauer T wiederholt:

$$x(t) = x(t + T). \quad (1.1)$$

Dieses Merkmal muss im gesamten betrachteten Zeitverlauf gelten. Der Ausschnitt der Länge T aus dem Funktionsverlauf wird also unendlich oft wiederholt. Damit wiederholt sich der Funktionsverlauf auch nach einer beliebigen Anzahl von Perioden. Ein konstantes $x(t)$ zählt nicht zu den periodischen Schwingungen – obwohl ein Signalausschnitt mit beliebigem T wiederholt werden könnte. In den Fall $x = \text{konst.}$ ist die periodische Zu- und Abnahme der Zustandsgröße aus der Definition für Schwingungen nicht gegeben. Ebenso gilt die Definition nicht für abklingende Schwingungen (z. B. Abschn. 3.3), da die Nulldurchgänge mit einer Periodendauer T erfolgen, jedoch die Amplituden abnehmen. Der einfachste Sonderfall der periodischen Schwingungen sind die *harmonischen Schwingungen*, die als Sinus-Schwingungen mit beliebigem Phasenwinkel aufgefasst werden können. Aus diesem Grund zählen Cosinus-Schwingungen ebenfalls zu den harmonischen Schwingungen. In der Akustik kennzeichnet der Begriff „harmonisch“ allerdings auch ein ganzzahliges Frequenzverhältnis einzelner Sinus-Schwingungen. In diesem Zusammenhang wird der Begriff der harmonischen Schwingung hier nicht verwendet.

Modulierte Schwingungen entstehen, wenn eine harmonische Schwingung durch einen modulierenden Vorgang verändert wird. Ändert der modulierende Vorgang die Amplitude, so handelt es sich um *amplitudenmodulierte Schwingungen*. Bei Änderung der Frequenz durch den modulierenden Vorgang spricht man von *frequenzmodulierten Schwingungen*. *Nichtperiodische Schwingungen* sind deterministische Schwingungen, deren Zeitverlauf sich nicht wiederholt (z. B. Halbsinus-Stoß). *Transiente Schwingungen* werden als Übergang zwischen zwei Zuständen aufgefasst [1].

Stochastische Schwingungen können in deren zukünftigen Verlauf nicht durch einen formelmäßigen Zusammenhang beschrieben werden. Deshalb werden diese auch als *regellose Schwingungen* oder *Zufallsschwingungen* bezeichnet. Als Beispiel soll der Schwingungsvorgang beim Abrollen eines Fahrzeugrades auf einer unebenen Fahrbahn dienen. Da die Verteilung der Fahrbahnunebenheiten i. d. R. nicht vorhersagbar ist (und die gewählte Fahrspur ebenso nicht), ist dieser Schwingungsvorgang als stochastische Schwingung zu betrachten. Es können jedoch statistische Aussagen getroffen werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit geringe und große Unebenheiten überrollt werden. Daraus kann z. B. der Mittelwert und die Verteilungsfunktion als Kenngrößen und Kennfunktionen gebildet werden. Geht man davon aus, dass z. B. der Mittelwert über der Zeit unveränderlich ist, dann spricht man von einer *stationären stochastischen Schwingung*. Es bedarf sicher nur wenig Vorstellungskraft, dass dies gegeben ist, wenn sich das Fahrzeug, dessen Geschwindigkeit und der Fahrbahnzustand nicht ändern. Ändert sich hingegen

z. B. der Fahrbahnzustand, so ändert sich auch der Mittelwert. In diesem Falle handelt es sich um eine *instationäre stochastische Schwingung*.

Diese Einteilung ist abhängig vom betrachteten Zeitintervall und den verwendeten Kennwerten und Kennfunktionen. Das Zeitintervall ist von endlicher Dauer und muss überdies kürzer sein als die zu bewertende Messung, also als zeitlicher Ausschnitt über dem Signal verschiebbar sein. Verkürzt man das Zeitintervall (z. B. zum Überrollen eines einzelnen Steinchens im Straßenbelag), so treten zwangsläufig die Abweichungen deutlich zutage und die als stationär angesehene Schwingung wird instationär. Es ist also entscheidend, das Zeitintervall zur Ermittlung von Kennwerten und Kennfunktionen anzugeben (bzw. das in Normen und Regelwerken vorgegebene Zeitintervall anzuwenden).

Eine weitere Betrachtungsebene ergibt sich, wenn zusätzlich zur zeitlichen Mittelwertbildung eine Mittelwertbildung über mehrere gleichartige Prozesse durchgeführt wird. In Weiterentwicklung des Beispiels der Fahrbahnunebenheiten kann man sich vorstellen, mehrere gleichartige Fahrzeuge über den gleichen Straßenabschnitt fahren zu lassen. Neben der zeitlichen Mittelwertbildung erhält man dann zu einem Zeitpunkt (ab Start von einem festen Ausgangspunkt für alle Fahrzeuge) einen sog. Scharmittelwert. Ist der zeitliche Mittelwert gleich dem Scharmittelwert, so spricht man von einem *ergodischen Prozess*.

Diese Form der Einteilung ist nicht die einzig Mögliche. Alternative Einteilungen findet man z. B. in [4, 5], bei der die Schwingungen in stationär und nicht stationär unterschieden werden. Anschließend erfolgt in jeder der beiden Gruppen eine Unterteilung in deterministische und stochastische Schwingungen. Mit dieser Einteilung sind Mischformen zwischen stationären und nicht stationären sowie deterministische und stochastische Schwingungen einfach zu beschreiben.

- Aus Sicht der Messpraxis ist die Einteilung nach dem zeitlichen Verlauf von großer Bedeutung. Der zeitliche Verlauf der Schwingungen kann Hinweise zum Entstehungsmechanismus liefern. Aus diesem Grund ist es stets sinnvoll, zunächst den zeitlichen Verlauf zu erfassen und zu beurteilen, bevor weitergehende Analysen (z. B. Darstellung des Spektrums) durchgeführt werden. In der Messpraxis hängen oftmals von der Art und Eigenschaft der untersuchten Schwingungen die verwendeten Aufnehmer, die Messtechnik und die Methoden der Signalverarbeitung ab. Dies bedeutet, dass die Herangehensweise in der Messung, Erfassung und Auswertung von den zu messenden Schwingungen und deren zeitlichen Verlauf abhängig ist.

1.4 Einteilung von Schwingungen nach deren Entstehungsmechanismus

Betrachtet man Schwingungen nach dem Entstehungsmechanismus, so erhält man in Abb. 1.3 folgende Einteilung nach [1, 2]. Die nachfolgend getroffenen Aussagen gelten für lineare schwingungsfähige Systeme.

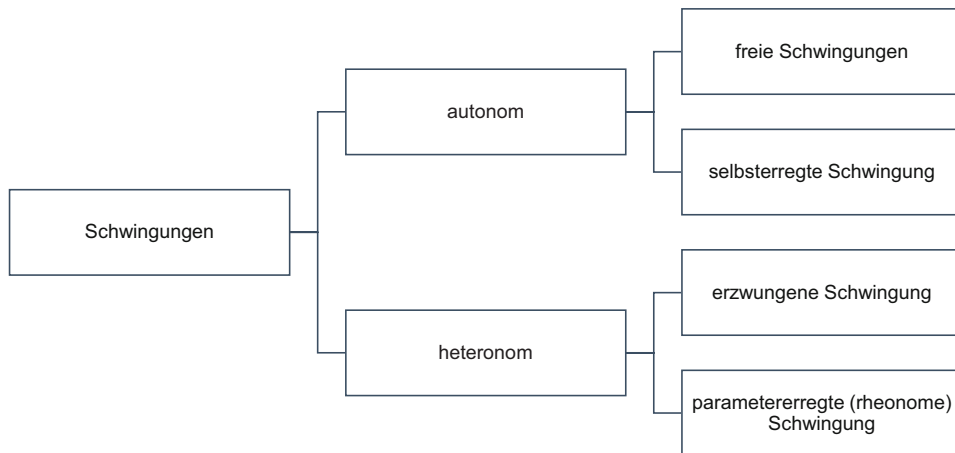


Abb. 1.3 Einteilung von Schwingungen nach deren Entstehungsmechanismus

Bei *autonomen Schwingungen* bestimmt das Schwingungssystem selbst die Frequenzen der Zeitfunktion. Zu den autonomen Schwingungen gehört die freie Schwingung. Eine freie Schwingung liegt dann vor, wenn ein schwingungsfähiges System von einer Anfangsbedingung aus sich selbst überlassen wird. Wird z. B. eine Fahrzeughür zugeschlagen, so wird das Karosserieblech ausgelenkt (Anfangsbedingung) und führt freie Schwingungen aus. Es wird von außen keine Energie zugeführt, durch die stets vorhandene Dämpfung wird jedoch Energie abgegeben, sodass der Schwingungsvorgang zum Erliegen kommt. Zu den autonomen Schwingungen gehören weiterhin die selbsterregten Schwingungen. Diese sind durch den Ausgangszustand und die Zufuhr von Energie gekennzeichnet. Als Beispiele lassen sich Schwingungen von Bauteilen heranziehen, die sich in einer instationären Strömung befinden (Tragflügel von Flugzeugen, Masten und Fahrzeugteilen). Ebenso fallen reibungsinduzierte Schwingungen in die Gruppe der selbsterregten Schwingungen, wie z. B. Bremsenquietschen oder die Tonerzeugung an einer Violinsaiten. Hier kommt die Energiezufuhr aus der fallenden Reibungskennlinie (d. h. mit steigender Geschwindigkeit wird die Reibkraft kleiner).

Heteronome Schwingungen sind durch Frequenzen charakterisiert, die durch die äußeren Einwirkungen auf das System verursacht werden. Damit schwingt das System mit der Frequenz der äußeren Einwirkung. *Erzwungene Schwingungen* werden dabei durch eine äußere Einwirkung (Erregung) auf das schwingungsfähige System hervorgerufen. Beispiel hierfür ist die Fundamentalschwingung einer Presse. Das Fundament wird durch die Erregerkräfte der Presse in Schwingungen versetzt. Kennzeichen erzwungener Schwingungen ist das Vorhandensein der Erregerkräfte, wenn das System nicht schwingt. In dem Beispiel tritt dies dann auf, wenn die Presse nicht auf dem Fundament betrieben wird. Eine Auslenkung aus der Gleichgewichtslage ist hingegen nicht notwendig, um erzwungene Schwingungen anzuregen. Das System schwingt nicht

mit seiner Eigenkreisfrequenz, sondern mit der Erregerkreisfrequenz. Während des Einschwingvorganges können zusätzlich noch die Eigenschwingungen des schwingungsfähigen Systems auftreten. Die klingen infolge der Dämpfung allerdings ab und das System befindet sich im eingeschwungenen (stationären) Zustand. *Parametererregte Schwingungen* (rheonome Schwingungen) sind durch die zeitliche Änderung eines Parameters im schwingungsfähigen System verursacht. Überdies ist eine Auslenkung um die Gleichgewichtslage notwendig. Beispiel hierfür sind Torsionsschwingungen in Getrieben. Während des Abwälzvorgangs der Zahnflanken tritt eine zeitabhängige Änderung der Torsionssteifigkeit der Welle auf. Zusätzlich mit der Auslenkung (Verspannung der Zahnräder) sind damit die Voraussetzungen für das Entstehen parametererregter Schwingungen gegeben.

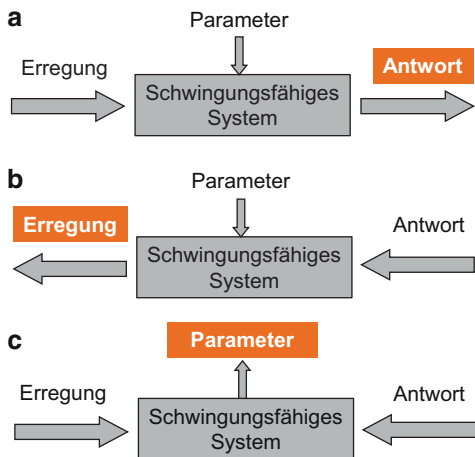
- Für die Lösung der Messaufgabe ist es vorteilhaft, die Verbindungen von der Ursache der Schwingung zu deren Erscheinungsbild zu kennen. Aus dem Erscheinungsbild (z. B. Zeitverlauf, Frequenzspektrum usw.) können Rückschlüsse auf den Entstehungsmechanismus (Ursache) gezogen werden. Damit kann die Messung auf die Messaufgabe optimal zugeschnitten werden (z. B. Aufnehmer, Signalverarbeitung). Kennt man Erscheinungsbild und Mechanismus, so kann gezielt auf den Schwingungsvorgang eingewirkt werden (z. B. Erhöhung der Förderleistung von Schwingförderern, Verringerung der Schwingungseinwirkung).

1.5 Systematisierung der Messaufgaben

Es wird nun ein schwingungsfähiges System betrachtet, welches durch äußere Kräfte bzw. Wege erregt wird (Abb. 1.4). Die *Schwingungsantwort* des Systems ist wiederum durch eine Zustandsgröße beschreibbar (z. B. Wege, Geschwindigkeit oder Beschleunigung). Die Verknüpfung zwischen den Zustandsgrößen am Eingang mit denen am Ausgang erfolgt durch die *Übertragungsfunktion*, welche die Parameter des schwingungsfähigen Systems – im einfachsten Fall Masse, Federkonstante und Dämpfung – beinhaltet. Die Übertragungsfunktion wird frequenzabhängig aufgefasst und in einen Amplitudenanteil und einen Phasenanteil zerlegt. Den Amplitudenanteil kann man sich als Verstärkung des Ausgangs gegenüber dem Eingang vorstellen. Der Phasenanteil ist ein Ausdruck für die Laufzeitdifferenz zwischen dem Ausgang und dem Eingang. Die Übertragungsfunktion verknüpft überdies die physikalischen Einheiten (z. B. Kraft am Eingang in N und Beschleunigung am Ausgang in m/s^2).

Einem Vorschlag von [4] folgend, lassen sich die Messaufgaben in drei Kategorien (Grundaufgaben) einteilen:

Abb. 1.4 Systematisierung der Messaufgaben. **a** Messung der Schwingungsantwort, **b** Messung der Erregung, **c** Ermittlung der Übertragungsfunktion



Messung der Schwingungsantwort

Diese Messaufgabe zielt auf die Messung von Zustandsgrößen am Ausgang des schwingungsfähigen Systems. Die Schwingungsantworten können anschließend mit zulässigen Grenzwerten verglichen werden. Grenzwerte können in unterschiedlicher Form vorliegen. Im einfachsten Falle liegen diese in einem Zahlenwert vor. Beispiel hierfür ist die Messung der Fundamentalschwingungen in der Zustandsüberwachung von Maschinen. Hierbei wird die Schwingungsantwort am Maschinenfundament gemessen, als Effektivwert angegeben und mit einem zulässigen Grenzwert verglichen. Dieses Beispiel verdeutlicht ebenfalls, dass die Erregerkräfte und Parameter des schwingungsfähigen Systems nicht Gegenstand der Messung sind. Die Grenzen zwischen Schwingungsantwort und Erregung sind hierbei fließend und damit auch von der Definition des schwingungsfähigen Systems abhängig. Zum Beispiel kann man den Zeitverlauf der Schwingungsantwort am Fundament auch als Erregung der Geschossdecke in einem Bauwerk auffassen.

Messung der Erregung

Die Schwingungsantwort eines Systems hängt von der Erregung (z. B. Kräfte) und der Übertragungsfunktion ab. Für die Dimensionierung und Berechnung von Maschinen haben die Lastannahmen als Eingangsgrößen des schwingungsfähigen Systems eine große Bedeutung. Mit Kenntnis der Lastannahmen wird dem Konstrukteur die Voraussetzung in die Hand gegeben, Maschinen und deren Komponenten so auszulegen, dass die Anforderungen hinsichtlich der Festigkeit und der Schwingungsantwort erfüllt werden. Die Erregungsgrößen haben für die Berechnung den Vorteil, unabhängig von schwingungsfähigen System und dessen Antworten vorzuliegen. Als Beispiel soll die Messung der Betriebslasten an einem Fahrwerk eines Kraftfahrzeuges dienen. Für den

Konstrukteur ist es von zentraler Wichtigkeit, den zeitlichen Verlauf der Kräfte und Momente am Rad für die Berechnung zu kennen. Damit kann einerseits die Dimensionierung zur Erfüllung der Festigkeitsanforderungen und andererseits die Abschätzung der Beschleunigungen als Schwingungsantwort erfolgen. Im realen Fahrbetrieb entziehen sich jedoch die Kräfte und Momente am Radaufstandspunkt einer unmittelbaren Messung. Aus diesem Grund werden z. B. die Fahrbahnunebenheiten von repräsentativen Streckenabschnitten digitalisiert und als Erregung verwendet. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, die Schwingungsantworten an Fahrwerksteilen unabhängig vom untersuchten Fahrzeug (d. h. dessen Übertragungsfunktion) berechnen zu können.

Ermittlung der Übertragungsfunktion

Zur Ermittlung der Übertragungsfunktion werden Ausgangs- und Eingangsgröße gemessen. Die Eigenschaften des schwingungsfähigen Systems als Funktion der Frequenz können hieraus berechnet werden. Die Übertragungsfunktion liefert Aussagen zu dem Verhalten des schwingungsfähigen Systems. Darauf aufbauend legt man ein mathematisches Modell zugrunde, damit aus der Übertragungsfunktion die Parameter im mathematischen Modell bestimmt werden können. Im einfachsten Fall kann das schwingungsfähige System aus einer Masse, einer Feder und einem Dämpfer angenommen werden. Für die Ermittlung der Parameter ist eine Reihe von Annahmen notwendig. Üblich ist z. B. die Annahme eines linearen und zeitinvarianten Systems (LTI System: linear time independent system) [2, 3]. Linearität legt in der Übertragungsfunktion z. B. fest, dass die Federkonstante proportional zum Weg ist und die Dämpferkonstante einem geschwindigkeitsproportionalen Ansatz folgt. Zeitinvarianz bedeutet, dass das schwingungsfähige System keiner zeitlichen Veränderung unterliegt. Damit errechnen sich dann die starre Masse, die wegproportionale Federkonstante und die geschwindigkeitsproportionale Dämpfungskonstante. Neben der Übertragungsfunktion existiert ebenfalls z. B. die Darstellung im Zeitbereich als Bewegungsgleichung oder im Zustandsraum. Aus der Untersuchung der schwingungsfähigen Systeme können dann Maßnahmen zu deren Beeinflussung abgeleitet werden. Erkennt man beispielsweise, dass die Erregungsfrequenz mit einer Eigenfrequenz des schwingungsfähigen Systems zusammenfällt, so kann durch gezielte Veränderung der Federkonstante oder der Masse (Leichtbau) die Eigenfrequenz verändert werden bzw. durch Erhöhung der Dämpfung die Amplituden der Schwingungsantwort verringert werden.

1.6 Planung und Konzept von Messeinrichtungen

Zur Lösung von Messaufgaben stehen dem Anwender eine breite Palette von Schwingungsaufnehmern und Messeinrichtungen zur Verfügung. Diese lassen sich grob in folgende Gruppen einteilen:

- Einzweck-Messgeräte bestehen aus einem Aufnehmer und der zugehörigen Signalverarbeitung. Diese Geräte werden oft für den mobilen Einsatz, z. B. für die Schwingungsüberwachung, verwendet. Die Anzeige des Ausgabewertes erfolgt bei handgehaltenen Messgeräten auf einem Display. In der Regel sind diese Messgeräte mit einer Computerschnittstelle oder einer Speicherfunktion für die Messdaten ausgerüstet. Alternativ kann die Signalaufbereitung als Schnittstelle an einem Notebook und die Darstellung des Ausgabewertes über eine Softwarelösung erfolgen.
- Labor-Messplätze sind aus Komponenten für den Aufnehmer und der Signalverarbeitung modular aufgebaut. Der Aufbau zielt darauf, eine Vielzahl unterschiedlicher und häufig wechselnder Messaufgaben lösen zu können. Die Messaufgaben sind hierbei üblicherweise nicht als Dauermessungen angelegt. Wegen des Aufbaues und der Stromversorgung ist der Einsatz auf die Laborumgebung beschränkt. Die Signalverarbeitung erfolgt über Computerschnittstellen bzw. als Netzwerklösung.
- Mobile Messplätze bestehen aus Komponenten für Aufnehmer und Signalverarbeitung und ermöglichen häufig wechselnde Messaufgaben in Fahrzeugen, im Betriebseinsatz, an Windkraftanlagen usw. Die Komponenten sind austauschbar, sodass je nach Messaufgabe unterschiedliche Aufnehmer und die zugehörige Signalverarbeitung verwendet werden kann. Die Messsignale werden aufgezeichnet und nach der Messung ausgewertet und interpretiert.
- Stationäre Messeinrichtungen sind für den Einsatz an einem festen Ort und in der Regel mit unveränderlichen Messaufgaben aufgebaut. Der Aufbau erfolgt z. B. über eine Festverdrahtung von Modulen auf einer sog. Hutschiene oder als Steckmodule mit einem Datenbussystem. Häufig sind die Messaufgaben als Langzeitmessung angelegt. Die Signalverarbeitung erfolgt über eine PC-Schnittstelle bzw. Netzwerklösung. Ebenso ist es möglich, dass die Module, z. B. in Prüfständen, eigenständige Überwachungs- und Steuerungsfunktionen ausführen.

Diese Einteilung in vier Gruppen ist nicht streng abgetrennt, es gibt fließende Übergänge zwischen den Gruppen. Beispielsweise können stationäre Messeinrichtungen modular mit hochwertiger Messtechnik aufgebaut werden, sodass wechselnde Messaufgaben ausgeführt werden können und die Messeinrichtungen damit die Aufgaben der Labor-Messplätze erfüllen.

Die Gruppen der Messeinrichtungen lassen sich systematisieren, wenn die Kategorien Mobilität der Messtechnik über der Flexibilität als Fähigkeit, unterschiedliche Messaufgaben aufgetragen wird (Abb. 1.5).

In der Phase der Planung und Konzeptfindung sind für die Auswahl der Messtechnik zusätzlich folgende Punkte in die Betrachtung einzubeziehen [1, 3, 5, 6, 7, 8, 9] (Tab. 1.1).

		Flexibilität	
		gering	hoch
Mobilität	gering	Fest installierte Messeinrichtung (z. B. Hutschienenmodule)	Vielzweck-Labormessplätze (z. B. netzbetriebener FFT-Analysator)
	hoch	Einzweck-Messeinrichtung (z. B. Taschengeräte, Aufnehmer mit USB-Schnittstelle)	modular aufgebaute, mobile Messplätze (z. B. modular konfigurierbare Messplätze mit Batteriespeisung)

Abb. 1.5 Flexibilität und Mobilität als Merkmale der Messtechnik

Tab. 1.1 Anforderungen an die Messtechnik nach [10]

Anforderung	Art
Umfeld	Industrienumgebung Labor Prüfstand Fahrzeug Temperaturen Platz Schwingungen, Stöße
Personalqualifikation	Ingenieur Messtechniker Techniker Bediener
Eingangs- und Ausgangskanäle	Art und Anzahl Erweiterungsfähigkeit
Messwertverarbeitung	Netzwerk und Schnittstellen (LAN, USB, CAN ...) Aufzeichnung und Anzeige (Datenlogger, Display ...) Computer (PC, Notebook ...)

Literatur

- 1. DIN 1311-1: Schwingungen und Schwingungsfähige Systeme. Teil 1: Grundbegriffe, Einteilung (2000)
- 2. Magnus, K., Popp, K., Sextro, W.: Schwingungen. Springer Vieweg, Wiesbaden (2016)
- 3. Zollner, M.: Frequenzanalyse. Autoren-Selbstverlag (1999)

4. Holzweißig, F., Meltzer, G.: Meßtechnik in der Maschinendynamik. VEB Fachbuchverlag, Leipzig (1973)
5. Piersol, A.: Vibration data analysis. In: Piersol, A., Paez, T. (Hrsg.) Harris' Shock and Vibration Handbook, Kap. 19. McGraw-Hill Education, New York (2009)
6. Lerch, R.: Elektrische Messtechnik. Springer, Berlin (2016)
7. Niebuhr, J., Lindner, G.: Physikalische Messtechnik mit Sensoren. Oldenbourg, München (2011)
8. Schrüfer, E., Reindl, L.M., Zagar, B.: Elektrische Messtechnik: Messung elektrischer und nichtelektrischer Größen. Carl Hanser, München (2014)
9. Trentmann, W.: PC-Messtechnik und rechnergestützte Messwertverarbeitung. In: Hoffmann, J. (Hrsg.) Handbuch der Messtechnik, S. 629–661. Carl Hanser, München (2012)
10. BMC Messsysteme: Ihre Anwendung (2014). <http://www.bmcm.de/index.php/de/ihre-anwendung.html>. Zugegriffen: 14 Juli 2014

Schwingungen im Zeit- und Frequenzbereich

2

- Dieses Kapitel behandelt die Grundlagen der Beschreibung der kinematischen Größen Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung. Diese Größen beschreiben die Bewegungsvorgänge in untersuchten schwingungsfähigen Systemen sowie in Schwingungsaufnehmern. Damit haben diese Zusammenhänge fundamentale Bedeutung für die Berechnung sowie für die Auswertung und Interpretation von Messungen. Anhand der harmonischen Schwingung werden die Größen in reeller und komplexer Schreibweise eingeführt und im Frequenzbereich dargestellt. Anschließend erfolgt eine Erweiterung auf transiente und stochastische Schwingungen.

2.1 Harmonische Schwingungen

Als einführendes Beispiel einer harmonischen Schwingung soll der Weg-Zeit-Verlauf eines Wischerblattes an einem Scheibenwischer herangezogen werden (Abb. 2.1). In der Parallelprojektion auf eine Gerade senkrecht zur Projektionsrichtung bewegt sich ein Punkt auf dem Wischerblatt linear hin und her. Der Weg als Zustandsgröße nimmt zeitlich zu und ab, somit ist die Definition einer Schwingung erfüllt. Trägt man den Weg des Punktes über die Zeit auf, so erhält man – sofern der Scheibenwischer im Dauerbetrieb arbeitet – eine harmonische Schwingung.

Der Zeitverlauf der Auslenkung x einer harmonischen Schwingung wird durch die Funktion

$$x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (2.1)$$

beschrieben [1–4]. Diese Funktion beschreibt zum Zeitpunkt t den Weg $x(t)$ (Abb. 2.1) und wird auch als *Weg-Zeit-Funktion* bezeichnet.

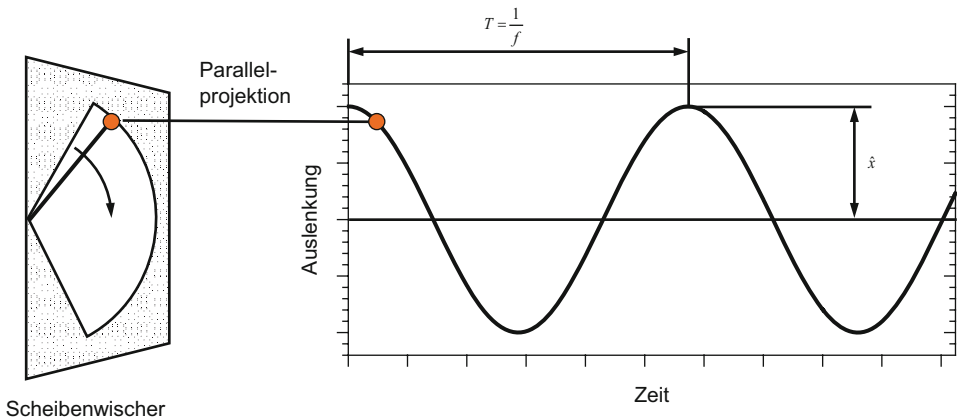


Abb. 2.1 Wischerblatt eines Scheibenwischers als Beispiel einer harmonischen Schwingung

Viele Schwingungsvorgänge in der Technik können durch harmonische Schwingungen hinreichend gut (d. h. als eine brauchbare Näherung) beschrieben werden. Für das Beispiel des Scheibenwischers ist die Beschreibung über harmonische Schwingungen nicht möglich, wenn sich die Wischerblätter ungleichförmig auf der Scheibe bewegen („rubbeln“). Auch in diesem Fall liefert die Beschreibung mittels einer harmonischen Schwingung einen Ausgangspunkt für weitergehende Betrachtungen. Aus diesem Grund hat die harmonische Schwingung eine herausragende Bedeutung und soll exemplarisch behandelt werden.

In Gl. 2.1 sind folgende Größen enthalten:

- die *Amplitude* $\hat{x}$ der Schwingung. Die Cosinus-Funktion kann Werte zwischen -1 und 1 annehmen. Die Amplitude ist die maximale Auslenkung vom Wert 0 der Cosinus-Funktion aus gesehen.
- die *Kreisfrequenz* ω . Zwischen der Frequenz f und der Kreisfrequenz ω besteht der Zusammenhang:

$$\omega = 2\pi f. \quad (2.2)$$

Die Kreisfrequenz ω der Schwingung ist also die Frequenz f , die auf den Kreisumfang des Einheitskreises 2π bezogen wird.

- Zur Unterscheidung wird üblicherweise die Frequenz in Hz und die Kreisfrequenz in $1/s$ bzw. rad/s angegeben.

Frequenz f und *Periodendauer* T der Schwingung sind umgekehrt proportional zueinander:

$$T = \frac{1}{f}. \quad (2.3)$$

Einer Periodendauer von $T = 0,5 \text{ s}$ entspricht also eine Frequenz $f = 2 \text{ Hz}$ (2 volle Schwingungen pro Sekunde). Schließlich erhält man die Kreisfrequenz ω

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.4)$$

Für einen Zeitpunkt $t = 0$ erhält man im Argument den *Nullphasenwinkel* φ_0 . Eingesetzt in Gl. 2.1 ergibt sich damit die Auslenkung $x(0) = \hat{x} \cdot \cos(\varphi_0)$ für den Zeitpunkt $t = 0$, die den Nullphasenwinkel anschaulich illustriert. Der Phasenwinkel φ kann als Argument der Cosinus-Funktion aufgefasst werden und errechnet sich zu:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0. \quad (2.5)$$

Durch die Anwendung der Additionstheoreme kann die Gl. 2.1 auch in folgende Form überführt werden:

$$x(t) = \hat{x}_C \cdot \cos(\omega t) + \hat{x}_S \cdot \sin(\omega t). \quad (2.6)$$

Diese Gleichung enthält keinen Phasenwinkel, jedoch die Amplitude des Cosinus-Anteils $\hat{x}_C$ und die Amplitude des Sinus-Anteils $\hat{x}_S$. Durch Quadrieren von Gl. 2.6 leitet sich die Beziehung zur Amplitude $\hat{x}$ her:

$$\hat{x}^2 = \hat{x}_C^2 + \hat{x}_S^2.$$

Aus Gl. 2.6 ist ebenfalls ersichtlich, dass die Beschreibung anstatt der Cosinus-Funktion auch mit der Sinus-Funktion möglich ist und auch in einem Teil der Literatur (z. B. [4, 5]) in dieser Form behandelt wird:

$$x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = \hat{x} \cdot \sin\left(\omega t + \underbrace{\varphi_0 + 90^\circ}_{\varphi_{0S}}\right). \quad (2.7)$$

Durch Einsetzen von $t = 0$ und $\varphi_0 = 0$ erhält man den Wert 1 für die Cosinus-Funktion. Alternativ zur Schreibweise $\varphi_0 + 90^\circ$ kann ein Nullphasenwinkel φ_{0S} verwendet werden, der auf die Sinus-Funktion bezogen ist und nur mit dieser verwendet werden darf. Wie man sich ebenfalls leicht überzeugen kann, gilt $\hat{x} \cdot \cos(\omega t - 90^\circ) = \hat{x} \cdot \sin(\omega t)$, d. h. die Sinus-Funktion ist gegenüber der Cosinus-Funktion um -90° phasenverschoben.

Für das o. g. Beispiel des Scheibenwischers ist es neben der Weg-Zeit-Funktion ebenfalls von großer Bedeutung, die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion und die Beschleunigungs-Zeit-Funktion zu kennen. Die Schwinggeschwindigkeit wird hierbei als *Schnelle* bezeichnet, um Verwechslungen mit der Geschwindigkeit einer sich ausbreitenden Welle vorzubeugen. Für die harmonische Schwingung erhält man die Zeitfunktion der Schnelle $\dot{x}(t)$ durch formales Ableiten der Weg-Zeit-Funktion (Gl. 2.1):

$$\dot{x}(t) = -\hat{x} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \cdot \omega. \quad (2.8)$$

Nochmaliges Ableiten von Gl. 2.8 führt auf die Beschleunigungs-Zeit-Funktion $\ddot{x}(t)$:

$$\ddot{x}(t) = -\hat{x} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \cdot \omega^2 = -x(t) \cdot \omega^2. \quad (2.9)$$

Für die harmonische Schwingung kann man also mit der Kreisfrequenz ω die Amplituden der Bewegungsgrößen Weg, Schnelle und Beschleunigung umrechnen. Das Minuszeichen in Gl. 2.8 und 2.9 für Winkel $\varphi_0 = 0$ besagt, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Maximum der Weg-Zeit-Funktion vorliegt und die Bewegungsumkehr hin zu Punkt mit den Koordinaten $x = 0$ erfolgt. Der einmaligen Ableitung entspricht also für die Amplituden die Multiplikation mit $-\omega$, der zweimaligen Differentiation eine Multiplikation mit $-\omega^2$. Ebenso entspricht einer Integration durch die Division durch $-\omega$ und einer zweimaligen Integration eine Division durch $-\omega^2$.

Für die Amplituden der Schnelle und Beschleunigung werden die Sinus- bzw. Cosinus-Funktion durch den Wert -1 ersetzt:

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{x} \cdot \underbrace{\sin(\omega t + \varphi_0)}_{-1} \cdot \omega = \hat{x} \cdot \omega = \hat{x} \cdot 2\pi f \quad (2.10)$$

$$\ddot{\hat{x}} = -\hat{x} \cdot \underbrace{\cos(\omega t + \varphi_0)}_{-1} \cdot \omega^2 = \hat{x} \cdot \omega^2 = \hat{x} \cdot 4\pi^2 f^2. \quad (2.11)$$

Beispiel

In der Schwingprüfung von Anbauteilen soll eine Beschleunigungsamplitude von $\pm 20g$ bei einer Frequenz von 30 Hz erreicht werden. Wie groß ist die Wegamplitude an dem Schwingprüfsystem?

Die Wegamplitude wird durch Umstellen der Gl. 2.11 errechnet:

$$\hat{x} = \frac{\ddot{\hat{x}}}{4\pi^2 f^2} = \frac{20 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{4\pi^2 \cdot 30^2 \frac{1}{\text{s}^2}} = 0,0055 \text{ m} = 5,5 \text{ mm}.$$

2.2 Zeigerdiagramm

Für die Darstellung von Schwingungsvorgängen und deren Lösung hat sich deren mathematische Behandlung als *Zeiger* in der komplexen Zahlenebene bewährt [4–6]. Damit ist eine übersichtliche Darstellung und durch die Anwendung der Rechenregeln für komplexe Zahlen eine einfache Lösung von Schwingungsgleichungen möglich. Hierbei stellt man sich die harmonische Schwingung als Kreisbewegung eines Punktes und dessen Parallelprojektion auf die reelle Achse (d. h. Abszisse) vor (Abb. 2.2). Die Position des Punktes wird über die Spitze eines rotierenden Zeigers mit der Länge der Amplitude $\hat{x}$ erfasst. Die Projektion auf die reelle Achse wird als *Realteil* $\text{Re}(\underline{x})$ bezeichnet, der senkrecht dazu stehende Anteil *Imaginärteil* $\text{Im}(\underline{x})$ ergibt sich durch Projektion auf die imaginäre Achse. Zur Kennzeichnung der komplexen Größe wird der Zeiger unterstrichen.

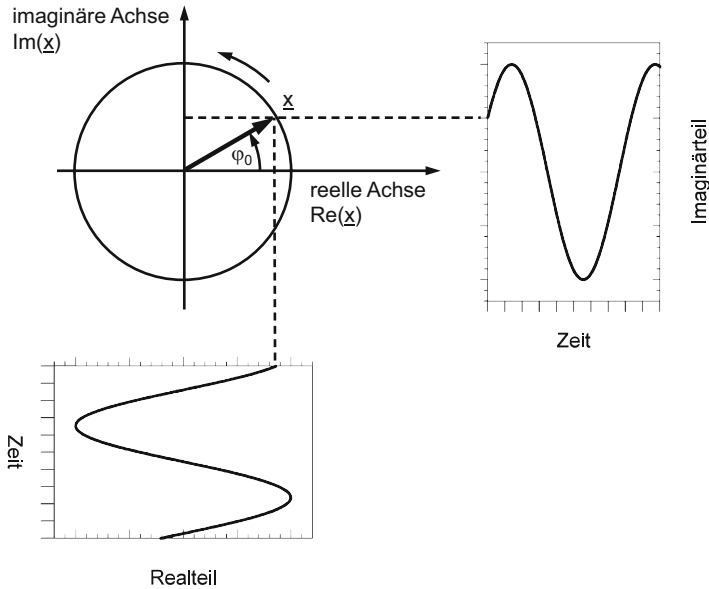


Abb. 2.2 Darstellung einer harmonischen Schwingung in der komplexen Zahlenebene

Somit beschreibt der Zeiger $\underline{x}(t)$ in der komplexen Zahlenebene die harmonische Schwingung wie folgt:

$$\underline{x}(t) = \text{Re}(\underline{x}) + j \text{Im}(\underline{x}) = \hat{x} \cdot [\cos(\omega t + \varphi_0) + j \sin(\omega t + \varphi_0)]. \quad (2.12)$$

Die imaginäre Einheit j ist als $j^2 = -1$ definiert. Der Zeiger rotiert im Gegenuhrzeigersinn, ebenso sind alle Winkel im mathematisch positiven Richtungssinn festgelegt. Der Nullphasenwinkel φ_0 ist der Winkel zwischen der reellen Achse und dem Zeiger zum Zeitpunkt $t = 0$. Zum Zeitpunkt $t > 0$ dreht für Kreisfrequenz $\omega > 0$ der Zeiger um ωt weiter. Für jeden definierten Zeitpunkt sind Real- und Imaginärteil in den Projektionen auf die Achsen ablesbar. Die betrachteten kinematischen Größen sind reell und weisen, auch bei Benutzung der komplexen Rechnung, nur einen Realteil auf. Der Imaginärteil existiert lediglich in der mathematischen Behandlung.

Unter Benutzung der Exponentialform schreibt man für Gl. 2.12 verkürzt:

$$\underline{x}(t) = \hat{x} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_0)}. \quad (2.13)$$

Die künftigen Betrachtungen vereinfachen sich, da der Betrag des Exponentialausdruckes den Wert $|e^{j(\omega t + \varphi_0)}| = 1$ annimmt. Schließlich kann in Gl. 2.13 die Amplitude $\hat{x}$ durch die sog. komplexe Amplitude ersetzt werden. Die *komplexe Amplitude* $\underline{\hat{x}}$ beschreibt die Anfangslage des Zeigers bei $t = 0$, der Term $e^{j\omega t}$ wird als *Zeitfunktion* bezeichnet:

$$\underline{x}(t) = \underline{\hat{x}} \cdot e^{j\varphi_0} e^{j\omega t} = \underline{\hat{x}} \cdot e^{j\omega t}. \quad (2.14)$$

Die komplexe Amplitude $\hat{\underline{x}}$ enthält sowohl die Amplitude $\hat{x}$ als auch den Nullphasenwinkel φ_0 . Zwischen der komplexen Amplitude und dem Betrag des Zeigers als Ausdruck für die Amplitude besteht folgende Beziehung:

$$|\hat{\underline{x}}| = \sqrt{(\operatorname{Re}(\underline{x}))^2 + (\operatorname{Im}(\underline{x}))^2} = \hat{x}. \quad (2.15)$$

Für den Nullphasenwinkel gilt:

$$\tan \varphi_0 = \frac{\operatorname{Im}(\hat{\underline{x}})}{\operatorname{Re}(\hat{\underline{x}})}. \quad (2.16)$$

Die Vorteile beim Rechnen sollen abschließend durch die Herleitung der Schnelle und Geschwindigkeit dargestellt werden (Abb. 2.3).

Durch formale Differentiation nach der Zeit erhält man:

$$\dot{\underline{x}}(t) = j\omega \cdot \underline{x}(t) = j\omega \cdot \hat{x} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_0)}. \quad (2.17)$$

Dies entspricht einer Multiplikation der Auslenkung mit $j\omega$. Nochmalige Ableitung führt auf die Beschleunigung, was äquivalent zur Multiplikation der Auslenkung mit $-\omega^2$ ist:

$$\ddot{\underline{x}}(t) = (j\omega)^2 \cdot \underline{x}(t) = -\omega^2 \cdot \hat{x} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_0)}. \quad (2.18)$$

Beispiel

Für die Ort-Zeit-Funktion $x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$ mit den folgenden Zahlenwerten $\hat{x} = 1 \text{ mm}$, $f = 2,5 \text{ Hz}$ und $\varphi_0 = 30^\circ$ sollen die Maxima der Schnelle und Beschleunigung berechnet werden.

Aus der Frequenz f wird die Periodendauer $T = 1/f = 0,4 \text{ s}$ berechnet. Diese Periodendauer ist als der Abstand der Maxima in Abb. 2.4 ablesbar.

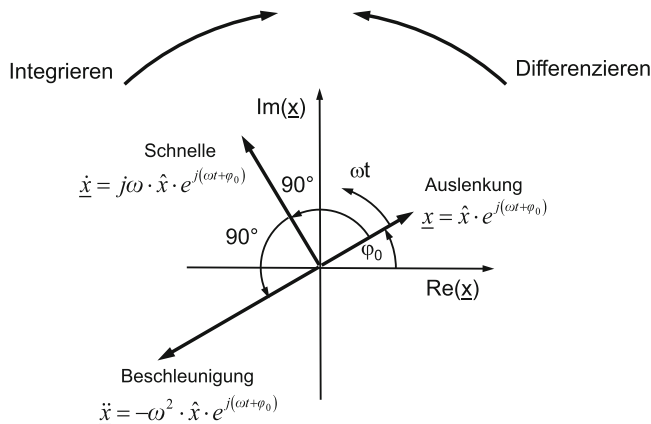


Abb. 2.3 Differentiation und Integration in Zeigerdarstellung

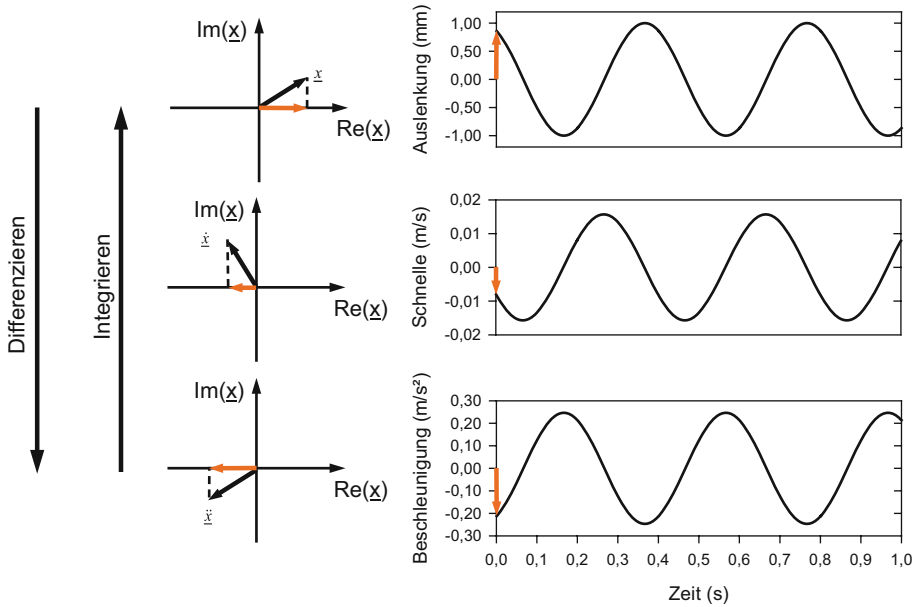


Abb. 2.4 Differentiation und Integration in Zeigerdarstellung (schematisch) und im Zeitverlauf

Mit der Frequenz f wird die Kreisfrequenz errechnet

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 2,5 \frac{1}{s} = 15,71 \frac{1}{s}.$$

Somit ergibt sich die Amplitude der Schnelle zu

$$\hat{x} \cdot \omega = 10^{-3} \text{ m} \cdot 15,71 \frac{1}{s} = 0,016 \frac{\text{m}}{s}.$$

Die Beschleunigungsamplitude wird in gleicher Vorgehensweise berechnet

$$\hat{\ddot{x}} = \hat{x} \cdot \omega^2 = 10^{-3} \text{ m} \cdot 15,71^2 \frac{1}{s^2} = 0,25 \frac{\text{m}}{s^2}.$$

Diese Maxima können der Darstellung in Abb. 2.4 entnommen werden.

In der komplexen Zahlenebene bedeutet die Ableitung, dass der Zeiger den Betrag $\hat{x} \cdot \omega$ erhält und um $+90^\circ$ gedreht wird. Im Zeitbereich ist für $t = 0$ der Realteil des Zeigers aufgetragen (Abb. 2.4).

Eine zweimalige Differentiation (Abb. 2.4) entspricht im Zeigerdiagramm einer weiteren Drehung des Schnelle-Zeigers um $+90^\circ$. Der Zeiger hat den Betrag $\hat{x} \cdot \omega^2$ und ein negatives Vorzeichen. Der Pfeil in der Zeitdarstellung zeigt diesen Sachverhalt wiederum für $t = 0$. Im Gegensatz zum Differenzieren im Zeitbereich kann mit der Zeigerdarstellung sofort die zweite Ableitung gebildet werden und der Wechsel zwischen Cosinus- und Sinus-Funktion entfällt.

Für eine Integration muss der Zeiger durch $j\omega$ dividiert werden, für eine zweimalige Integration erfolgt die Division durch $-\omega^2$. Die Zusammenhänge sind in der Zeitdarstellung und als Zeiger zusammenfassend in Abb. 2.4 verdeutlicht.

- In der Messpraxis findet die Multiplikation bzw. Division mit der Kreisfrequenz für harmonische Schwingungen Anwendung, wenn Amplituden umgerechnet werden sollen (z. B. Messung der Beschleunigungsamplitude und Berechnung der Wegamplitude).

2.3 Darstellung im Zeitbereich und Frequenzbereich

2.3.1 Begriffe

Die Grundlagen der Fourier-Transformation geht auf die historische Leistung von Jean Baptiste Joseph Baron de Fourier (1768–1830) zurück, der 1822 in seinem Buch „Analytische Theorie der Wärme“ die Zerlegung beliebiger Funktionen in harmonische Schwingungen für thermodynamische Ausgleichsvorgänge beschrieb. Die Übertragung von Ergebnissen aus der Thermodynamik in die Signalverarbeitung darf als gelebtes Beispiel für einen fachübergreifenden Erkenntnistransfer gelten.

Die Darstellung der *Zeitfunktion* $x(t)$ in der geläufigen Form (Zeit t auf der Abszisse, Funktionswert x auf der Ordinate) stellt die Funktion im *Zeitbereich* (time domain) dar. Stellt man über der Frequenz nun die Amplitude $\hat{x}$ oder den Effektivwert $\tilde{x}$ dar, so spricht man vom *Spektrum* und von der dort dargestellten Funktion als *Spektralfunktion*. Die Darstellung der *Spektralfunktion* bezeichnet man als Darstellung im *Frequenzbereich* (frequency domain) oder *Spektralbereich*. Die *Fourier-Transformation* ist die Verknüpfung zwischen Zeitbereich und Frequenzbereich und ist als übergeordneter Begriff zu verstehen, der die *Analyse* und *Synthese* umfasst. Analyse bedeutet das Zerlegen der Zeitfunktion in harmonische Schwingungen. Wird ein Spektrum zu einer Zeitfunktion erstellt, so spricht man von der *Frequenzanalyse* oder *Spektralanalyse*. Unter *Synthese* wird das Zusammensetzen (Überlagern) der einzelnen Harmonischen zu einer Zeitfunktion verstanden. Wird aus einer Zeitfunktion ein Spektrum gebildet und daraus die Zeitfunktion rekonstruiert, so wird dies als *Resynthese* bezeichnet [1, 5–10].

Verkürzend wird als Fourier-Transformation die Transformation vom Zeitbereich in den Frequenzbereich verstanden. Da das Signal im Zeitbereich gemessen wird und anschließend in den Frequenzbereich transformiert wird, findet man auch den Begriff der „Hintransformation“. Die Transformation vom Frequenzbereich zurück in den Zeitbereich wird als „Rücktransformation“ oder *inverse Fourier-Transformation* bezeichnet.

Für die Anwendung der Fourier-Transformation muss nach den Kriterien periodisch oder aperiodisch sowie kontinuierlich und diskret unterschieden werden. Hierfür gibt es folgende Zuordnung:

1. Eine periodische kontinuierliche Zeitfunktion wird mit der Fourier-Reihe in ein diskretes nichtperiodisches Linienspektrum transformiert (Abschn. 2.3.2).
2. Eine einmalige kontinuierliche Zeitfunktion wird mit der Fourier-Transformation in ein kontinuierliches nichtperiodisches Spektrum transformiert (Abschn. 2.3.3).
3. Eine einmalige diskrete Zeitfunktion wird mit der zeitdiskreten Fourier-Transformation (DTFT) in ein kontinuierliches periodisches Spektrum transformiert.
4. Eine diskrete Zeitfunktion wird mit der diskreten Fourier-Transformation (DFT) in ein diskretes periodisches Spektrum transformiert (Abschn. 14.4).

Die Zusammenhänge sind als Gegenüberstellung der Eigenschaften von Zeit- und Spektralfunktion nochmals in Abb. 2.5 dargestellt.

Die Fourier-Reihe und die Fourier-Transformation haben eine grundlegende Bedeutung für die Darstellungen im Frequenzbereich und werden deshalb in den folgenden Abschnitten behandelt. In der modernen Messpraxis liegen die Zeitfunktionen nach der Abtastung in zeitdiskreter Form vor und werden mit der diskreten Fourier-Transformation (DFT) bzw. mit dem effektiven Algorithmus der Fast Fourier Transform (FFT) in ein diskretes Spektrum transformiert. Wegen der besonderen Bedeutung für die Signalverarbeitung wird die DFT in Abschn. 14.4 ausführlich dargestellt.

2.3.2 Fourier-Reihe

Mittels Fourier-Analyse wird die periodische Schwingung $x(t)$ in eine Summe harmonischer Teilschwingungen zerlegt. Die periodische Schwingung hat die Periodendauer T und die Grundkreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$. Eine Harmonische ist in diesem Zusammenhang

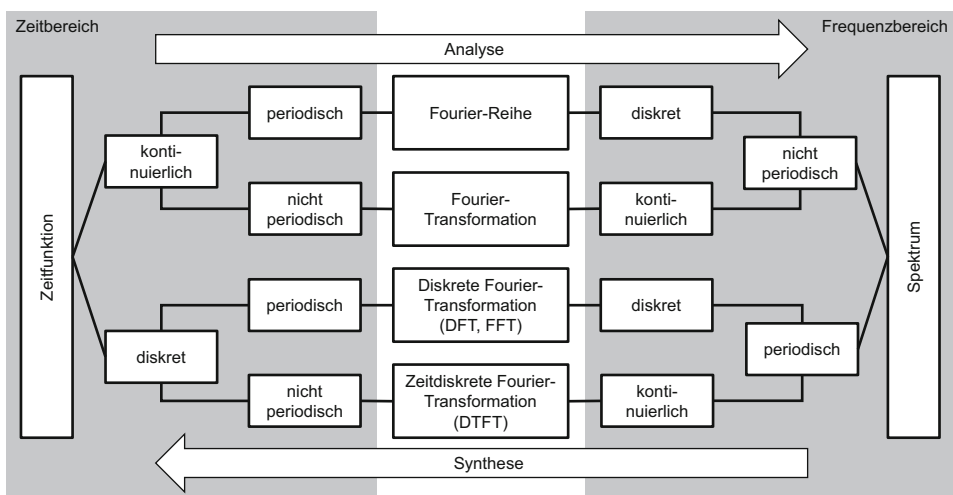


Abb. 2.5 Übersicht über die Transformationen zwischen Zeit- und Frequenzbereich

eine Cosinus-Funktion einer Kreisfrequenz $k\omega$, die ein ganzzahliges Vielfache k der Grundkreisfrequenz ω ist. In reeller Darstellung schreibt sich diese Summe wie folgt:

$$x(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{x}_k \cdot \cos(k\omega t + \varphi_{0k}). \quad (2.19)$$

In Gl. 2.19 stellt x_0 den *arithmetischen Mittelwert* (Gleichanteil) dar. Die periodische Schwingung wird in eine unendliche Summe von k Harmonischen zerlegt. In der praktischen Ausführung begnügt man sich mit einer endlichen Anzahl von Harmonischen k als Näherung für die Funktion $x(t)$. Für $k = 1$ erhält man die Grundkreisfrequenz ω . Der Zähler k ist die Ordnung der harmonischen Teilschwingungen. Die k -te Harmonische wird durch die Amplitude $\hat{x}_k$ und den Nullphasenwinkel φ_{0k} beschrieben. Trägt man die Amplituden $\hat{x}_k$ über der Kreisfrequenz $k\omega$ bzw. Frequenz der Harmonischen $k\omega/(2\pi)$ auf, so erhält man das Spektrum.

Wird für die Harmonischen die gleichwertige Darstellung mit Sinus- und Cosinus-Funktion gewählt, so erhält man für die Gl. 2.19:

$$x(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{kc} \cos(k\omega t) + x_{ks} \sin(k\omega t)). \quad (2.20)$$

In dieser Darstellungsform werden x_{kc} und x_{ks} als *Fourier-Koeffizienten* der k . Ordnung bezeichnet. Die Fourier-Koeffizienten lassen sich nach folgenden Gleichungen berechnen:

$$x_{kc} = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega t) dt \quad (2.21)$$

$$x_{ks} = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega t) dt. \quad (2.22)$$

Mit Gl. 2.21 und 2.22 erhält man dann für die Amplituden

$$\hat{x}_k = \sqrt{x_{kc}^2 + x_{ks}^2} \quad (2.23)$$

und den Phasenwinkel

$$\varphi_{0k} = -\arctan \frac{x_{ks}}{x_{kc}}. \quad (2.24)$$

Damit können beide Darstellungen ineinander überführt werden.

Beispiel

Gegeben ist die reelle Funktion $x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^5 \left(\frac{1}{k} \cos(k\omega t) \right)$ (modifiziert nach [9]).

Für diese Funktion sind die Amplituden und die Harmonischen anzugeben.

Durch einen Koeffizientenvergleich mit Gl. 2.21 erhält man:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_0 + \sum_{k=1}^5 \hat{x}_k \cdot \cos(k\omega t + \varphi_{0k}) \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2}}_{x_0} + \underbrace{1}_{\hat{x}_1} \cdot \cos(\omega t) + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\hat{x}_2} \cdot \cos(2 \cdot \omega t) + \underbrace{\frac{1}{3}}_{\hat{x}_3} \cdot \cos(3 \cdot \omega t) \\
 &\quad + \underbrace{\frac{1}{4}}_{\hat{x}_4} \cdot \cos(4 \cdot \omega t) + \underbrace{\frac{1}{5}}_{\hat{x}_5} \cdot \cos(5 \cdot \omega t).
 \end{aligned}$$

Zur Beschreibung der gegebenen Funktion genügen die fünf harmonischen Teilschwingungen mit der Ordnung $k = 1$ bis 5 (und der Gleichanteil). Durch die gewählte Aufgabenstellung ist der Nullphasenwinkel φ_{0k} null für die fünf harmonischen Teilschwingungen. Die graphische Auftragung ist in Abb. 2.6 ersichtlich.

Da sich die komplexe Rechnung in der Schwingungstechnik als sinnvoll erwiesen hat, soll nun die Fourier-Analyse der Funktion $x(t)$ in der komplexen Zahlenebene erfolgen. Durch Anwenden der Eulerschen Formel werden die Cosinus- und Sinusanteile wie folgt ausgedrückt:

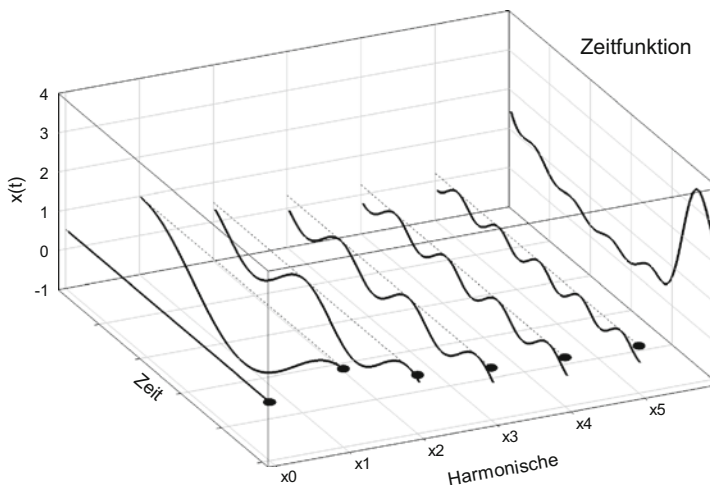


Abb. 2.6 Darstellung der periodischen Funktion $x(t)$ im Zeit- und Frequenzbereich

$$\cos k\omega t = \frac{1}{2} (e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}) \quad (2.25)$$

$$\sin k\omega t = \frac{1}{2j} (e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}). \quad (2.26)$$

Durch Einsetzen in Gl. 2.20 und Umordnen der Terme erhält man:

$$x(t) = \underbrace{x_0}_{\underline{X}_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}(x_{kc} - jx_{ks})}_{\underline{X}_k} e^{jk\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}(x_{kc} + jx_{ks})}_{\underline{X}_{-k}} e^{-jk\omega t}. \quad (2.27)$$

Zur Abkürzung führt man die komplexen Amplituden $\underline{X}_k$ und $\underline{X}_{-k}$ ein. Lässt man nun in der zweiten Summe den Summationsindex k von $-\infty$ bis null laufen, fällt das Minuszeichen im Exponentialterm weg und man kann damit nach Zusammenfassen der Terme schreiben:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{X}_k e^{jk\omega t}. \quad (2.28)$$

Die komplexen Amplituden $\underline{X}_k$ lassen sich wie folgt entwickeln:

$$\underline{X}_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega t} dt. \quad (2.29)$$

In Gl. 2.27 erhält man das zunächst paradoxe Ergebnis, über „negative“ Frequenzen der Harmonischen zu summieren. Die Lösung dieses scheinbaren Widerspruches ergibt sich aus der Überlegung, dass die Funktion $x(t)$ reell ist und zunächst keinen Imaginärteil enthält. Wie Gl. 2.25 anhand der reellen Cosinus-Funktion zeigt, kann diese Funktion als Summe zweier sog. konjugiert komplexer Funktionen aufgefasst werden. Im Zeigerdiagramm entspricht das zwei Zeigern, die spiegelbildlich zur x -Achse mit $+\omega$ und $-\omega$ im gegenläufigen Drehsinn umlaufen. Die komplexen Amplituden $\underline{X}_k$ sind dann ebenfalls konjugiert komplex zu den Amplituden $\underline{X}_{-k}$. Zur Kennzeichnung der konjugiert komplexen Amplituden erhalten diese einen Stern (*) und man schreibt:

$$\underline{X}_k^* = \underline{X}_{-k}. \quad (2.30)$$

Zwischen den reellen Amplitude $\hat{x}_k$ und den komplexen Amplituden $\underline{X}_k$ und $\underline{X}_k^*$ besteht für $k > 0$ folgender Zusammenhang:

$$\hat{x}_k = 2|\underline{X}_k| = 2\sqrt{\underline{X}_k \cdot \underline{X}_k^*}. \quad (2.31)$$

Die komplexe Fourier-Reihe liefert folglich komplexe Amplituden, die in einem Frequenzbereich von $-k\omega$ bis $+k\omega$ aufgetragen werden können. Diese Auftragung wird

als *zweiseitiges Linienspektrum* bezeichnet, in dem jeweils die Hälfte des Amplitudenwertes bei $-k\omega$ und bei $k\omega$ enthalten ist. Dies erklärt den Vorfaktor 2 in Gl. 2.31 bei der Umrechnung des zweiseitigen Spektrums in reelle Amplituden. Üblicher als das zweiseitige Spektrum ist in der Schwingungstechnik die Auftragung als Amplitude und Phase über der Frequenz (einseitiges Spektrum).

- Durch die Entwicklung der Fourier-Reihe erhält man aus einer kontinuierlichen und periodischen Zeitfunktion $x(t)$ ein diskretes Linienspektrum. Da sich die Zeitfunktion nach der Periodendauer T wiederholt, ist die Analyse eines Zeitabschnittes der Länge T ausreichend. Im diskreten Spektrum stehen die Linien in ganzzahligem Verhältnis.

2.3.3 Fourier-Transformation

Nun soll der Fall betrachtet werden, für den keine Periodizität in der Zeitfunktion $x(t)$ vorliegt. Hier kann man sich z. B. einen einzelnen Rechteck-Impuls vorstellen. Dieser Impuls hat keine endliche Periodendauer T und ist somit nicht durch die Fourier-Reihe zu beschreiben. Um diesen Fall mittels Fourier-Transformation behandeln zu können, nutzt man die Hilfsvorstellung, dass sich der Impuls nach unendlich langer Periodendauer $T \rightarrow \infty$ wiederholt. Diese Betrachtung ist allerdings nicht nur auf Impulse beschränkt, sondern gilt z. B. auch für stationäre stochastische Schwingungen.

Mit unendlich langer Periodendauer strebt die Zahl der Harmonischen gegen unendlich ($k \rightarrow \infty$) und der Abstand zwischen zwei Harmonischen geht über zu $d\omega$. Damit muss die Summation in Gl. 2.28 durch eine Integration ersetzt werden:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.32)$$

Mit Übergang von der Summation zur Integration findet ebenfalls ein Übergang von den komplexen Amplituden X_k zu der kontinuierlichen komplexen *Spektralfunktion* $X(j\omega)$ statt, die für alle Kreisfrequenzen ω definiert ist. Die berechnet sich mit dem sog. *Fourier-Integral* wie folgt:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.33)$$

Die Division durch 2π in Gl. 2.32 ergibt sich durch die Integration über $d\omega = 2\pi df$. Die Zuordnung des $1/2\pi$ Terms zu Gl. 2.32 bzw. 2.33 handhabt die Literatur nicht einheitlich (Diskussion hier zu z. B. in [8, 10]). Die Funktion $X(j\omega)$ ist von $-\infty < \omega < +\infty$ definiert und wird als *zweiseitiges komplexes kontinuierliches Fourier-Spektrum* bezeichnet. Die Spektralfunktion ist eine Funktion der Frequenz und wird im Gegensatz zur Zeitfunktion

$x(t)$ durch einen Großbuchstaben X dargestellt. Die hier gewählte Darstellung $X(j\omega)$ soll durch eine komplexe Größe symbolisieren, die vom komplexen Frequenzargument $j\omega$ abhängt. Ebenfalls ist das Symbol $\underline{X}$ möglich, wenn die Abhängigkeit von der Frequenz erkennbar ist. Ebenso sind die gleichwertigen Darstellungen als $X(f)$, $X(\omega)$ für die Amplituden und $\underline{X}(f)$, $\underline{X}(j\omega)$ oder $\underline{X}(\omega)$ für die komplexe Spektralfunktion anzutreffen.

Die komplexe Spektralfunktion $X(j\omega)$ kann als Real- und Imaginärteil dargestellt werden. Die übliche Darstellung ist jedoch eine Darstellung als Amplitudenspektrum (Betragsspektrum) $|X(j\omega)|$ und Phasenspektrum $\varphi(\omega)$:

$$X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}. \quad (2.34)$$

Das Amplitudenspektrum $|X(j\omega)|$ bzw. das Phasenspektrum $\varphi(\omega)$ stellen die Amplitude bzw. den Phasenwinkel über der Kreisfrequenz ω bzw. Frequenz f dar. Da die Zeitfunktionen reelle Größen sind, gilt für die konjugiert komplexe Größe $X^*(j\omega)$ analog zu Gl. 2.31 die Symmetriebeziehung:

$$X^*(j\omega) = X(-j\omega). \quad (2.35)$$

Um die Einheit der Spektralfunktion zu erhalten, wird in Gl. 2.33 die Zeitfunktion $x(t)$ z. B. in Meter eingesetzt. Die Integration über der Zeit ergibt daraus die Spektralfunktion mit der Einheit ms bzw. m/Hz. Aus diesem Grund nennt man das Amplitudenspektrum auch *spektrale Amplitudendichte* oder *Spektraldichte*. Mit der Formulierung der spektralen Amplitudendichte umgeht man in der Spektralfunktion auch das Problem, welches sich aus der unendlich großen Anzahl der Spektrallinien ergibt: die Linien liegen unendlich dicht, deren Amplituden gehen jedoch gegen null. Erst der Quotient von Amplitude und Abstand liefert einen von null verschiedenen Wert. Allerdings darf dieser Wert nicht als Differentialquotient (Steigung) fehlinterpretiert werden [6].

Beispiel

Gegeben ist ein einzelner Rechteckimpuls mit einer Amplitude $\hat{x} = 1$ und einer Impulsdauer τ (Abb. 2.7a). Mit Gl. 2.34 lässt sich das Fourier-Spektrum berechnen. Hierbei muss nur innerhalb der Grenzen von $-\tau/2$ bis $+\tau/2$ integriert werden, da außerhalb der Impulsdauer die Amplitude null beträgt:

$$X(j\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} \hat{x} \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{\hat{x}}{-j\omega} \left[e^{-j\omega t} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} = \frac{\hat{x}}{j\omega} \left[e^{j\omega t} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} = \frac{\hat{x}}{j\omega} \left[e^{j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} \right]. \quad (2.36)$$

Nach Umordnen der Terme können gem. Gl. 2.25 die Exponentialterme durch eine Sinus-Funktion ersetzt werden:

$$X(j\omega) = \frac{2\hat{x}}{\omega} \frac{\left[e^{j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} \right]}{2j} = \frac{2\hat{x}}{\omega} \sin\left(\omega \frac{\tau}{2}\right). \quad (2.37)$$

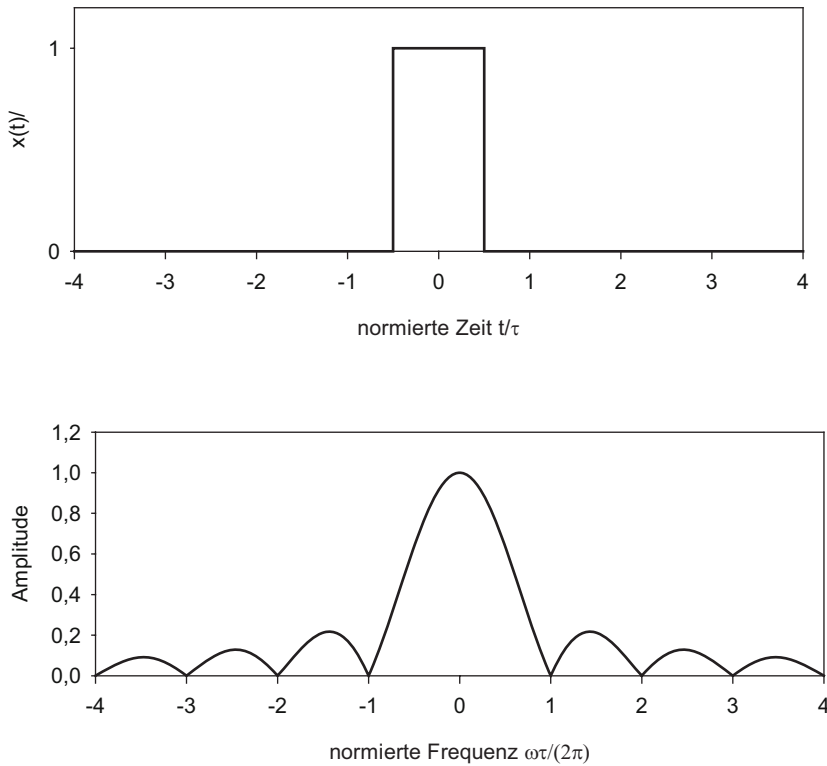


Abb. 2.7 Frequenzanalyse eines einzelnen Rechteckimpulses. Zeitbereich **a**, Frequenzbereich **b**

Erweitern mit τ und weiteres Umformen mit $\omega = 2\pi f$ führt auf die folgende Gleichung:

$$X(j\omega) = \frac{2\hat{x}\tau}{\omega\tau} \sin\left(\omega\frac{\tau}{2}\right) = \hat{x}\tau \frac{\sin\left(\omega\frac{\tau}{2}\right)}{\omega\frac{\tau}{2}} = \hat{x}\tau \operatorname{si}\left(\omega\frac{\tau}{2}\right). \quad (2.38)$$

Die Funktion $\sin(x)/x$ wird als *si-Funktion* oder *Spaltfunktion* bezeichnet. Das Argument $\omega\tau/2$ ist dimensionslos und kann als eine mit der Impulsdauer τ normierte Kreisfrequenz ω aufgefasst werden.

Das reelle Amplitudenspektrum zeigt für den Rechteckimpuls einen Verlauf, der in Abb. 2.7b dargestellt ist. Da die si-Funktion selbst dimensionslos ist, erhält man z. B. mit $\tau = 0,005 \text{ s}$ und $\hat{x} = 2 \text{ mm}$ im Ausdruck $\hat{x}\tau$ einen Zahlenwert $\hat{x}\tau = 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}$ (bzw. m/Hz). Dieser Zahlenwert entspricht:

- im Frequenzbereich: Schnittpunkt der Spektralfunktion mit der Ordinatenachse bei $\omega = 0$ sowie
- im Zeitbereich: Fläche unter dem Rechteckimpuls (Integral).

Bei ganzzahligen Vielfachen von π hat das Amplitudenspektrum der si-Funktion Nullstellen. Mit dem Zahlenwert $\tau = 0,005$ s erhält man für die erste Nullstelle der si-Funktion $2\pi f\tau/2 = \pi \rightarrow f = 1/\tau = 200$ Hz. Weitere Nullstellen liegen bei ganzzahligen Vielfachen, also 400 Hz, 600 Hz usw.

Zunächst soll betrachtet werden, welche Rolle die Nullstellen der si-Funktion bei Erregung eines schwingungsfähigen Systems mit einem Rechteckimpuls haben. Für die Frequenzen an den Nullstellen der si-Funktion ist die Erregung des schwingungsfähigen Systems sehr klein. Für die Messung von Übertragungsfunktionen (Abschn. 14.5) führt dies zu Ausdrücken in der Gestalt „null durch null“; es liegen bei diesen Frequenzen meist keine praktisch verwertbaren Ergebnisse vor.

Verkürzt man im Zeitbereich bei gleichem Flächeninhalt des Impulses die Zeitdauer τ , so steigt die Amplitude $\hat{x}$ an. Je schmaler der Rechteckimpuls ist, desto flacher und breiter verläuft das Spektrum bis zur ersten Nullstelle.

- Für den theoretischen Grenzfall des *Dirac-Stoßes* geht die Impulsdauer gegen null ($\tau \rightarrow 0$) und wächst die Amplitude ins Unendliche. Man erhält für $\omega\tau/2 \ll 1$ einen praktisch konstanten Verlauf der Spektralfunktion mit $X(j\omega) = \hat{x}\tau$. Das hat zur Konsequenz, dass Impulse mit kurzer Impulsdauer τ
- ein breites Frequenzband zur Übertragung und Signalanalyse benötigen (Anforderungen an die Messtechnik Kap. 10),
 - ein schwingungsfähiges System in einem breiten Frequenzband anregen (Übertragungsfunktion Abschn. 14.5). Dies wird beispielsweise zur Ermittlung der Schwingungsantwort von Strukturen durch Anregung mit kurzzeitigen Rechteckimpulsen (z. B. Hammerschlag) genutzt.

Literatur

1. DIN 1311-1: Schwingungen und Schwingungsfähige Systeme. Teil 1: Grundbegriffe, Einteilung (2000)
2. Blake, R.E.: Basic Vibration Theory. In: Piersol, Paez (Hrsg.) Harris' Shock and Vibration Handbook, S. 2.1–2.32. McGraw-Hill Education, New York (2009)
3. Gross, D., Hauger, W., Schröder, J., Wall, W.A.: Technische Mechanik 3 Kinetik. Springer Vieweg, Berlin/Heidelberg (2015)
4. Jäger, H., Mastel, R., Knaebel, M.: Technische Schwingungslehre. Springer Vieweg, Wiesbaden (2016)
5. Magnus, K., Popp, K., Sextro, W.: Schwingungen. Springer Vieweg, Wiesbaden (2016)
6. Zollner, M.: Frequenzanalyse. Autoren-Selbstverlag, Regensburg (1999)
7. Broch, J.: Mechanical vibration and shock measurements. Brüel & Kjaer, Naerum (1984)
8. Butz, T.: Fouriertransformation für Fußgänger. Springer Vieweg, Wiesbaden (2012)
9. Heymann, J., Lingener, A.: Experimentelle Festkörpermechanik. VEB Fachbuchverlag, Leipzig (1986)
10. Hoffmann, R.: Grundlagen der Frequenzanalyse Bd. 620. expert verlag, Renningen (2011)

- Das Kapitel stellt die Grundlagen der freien Schwingung anhand der Translationsschwingung und Rotationsschwingung dar. Die Dämpfung wird als Bauteildämpfung und Reibungsdämpfung behandelt. Damit werden die Grundlagen für die erzwungenen Schwingungen und Darstellung als Übertragungsfunktion geschaffen. Zahlreiche Beispiele und Abbildungen veranschaulichen die Thematik und tragen zum praxisnahen Verständnis bei.

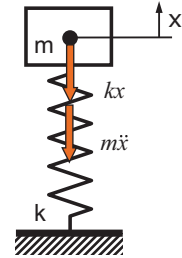
3.1 Translationsschwingungen

Das schwingungsfähige System in Abb. 3.1 besteht aus einer Masse m und einer masselosen Feder mit der Federkonstante k (Einheit N/m). Die Auslenkung um die statische Gleichgewichtslage wird mit der Koordinate x beschrieben. Da die mathematische Beschreibung der Bewegung mit einer Koordinate erfolgt, spricht man von einem Schwinger mit einem Freiheitsgrad [1–4]. Durch Auslenkung der Masse wird auf die Feder die Rückstellkraft $F_{\text{elast}}(x) = kx$ ausgeübt. Auf die Masse wirkt die d'Alembert'sche Trägheitskraft $F_T(x) = m\ddot{x}$.

Nach Freischneiden der Masse wird das Kräftegleichgewicht am zentralen ebenen Kraftsystem im Schwerpunkt wie folgt aufgeschrieben:

$$-m\ddot{x} - kx = 0. \quad (3.1)$$

Da sowohl der Weg als auch die Beschleunigung als Zustandsgröße linear mit den Kraftgrößen verknüpft ist und keine Zeitabhängigkeit von Masse und Federkonstante besteht, liegt ein lineares, zeitinvariantes System (LTI: linear time-invariant system) (vgl. Abschn. 1.1) vor. Die Gl. 3.1 stellt die *Bewegungs-Differenzialgleichung* des schwingungsfähigen Systems dar.

Abb. 3.1 Translationsschwinger

Zur eindeutigen Beschreibung der harmonischen Schwingung zum Zeitpunkt t ist neben der Auslenkung noch eine weitere Größe, z. B. die Geschwindigkeit, erforderlich. In diesem Falle wird der Nullphasenwinkel $\varphi_0 = 0$ festgelegt. Damit erhält man als zweite Größe zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Schnelle $\dot{x}(0) = 0$. Nun wird als komplexe Ansatzfunktion die Gl. 2.14

$$\underline{x}(t) = \hat{x}e^{j\omega_0 t}, \quad (3.2)$$

bzw. deren zweite Ableitung

$$\underline{\ddot{x}}(t) = -\omega_0^2 \hat{x}e^{j\omega_0 t} \quad (3.3)$$

in die mit (-1) multiplizierte Gl. 3.1 eingesetzt:

$$k \cdot \hat{x}e^{j\omega_0 t} - \omega_0^2 m \cdot \hat{x}e^{j\omega_0 t} = 0. \quad (3.4)$$

Neben der trivialen Lösung (Amplitude $\hat{x} = 0$) erhält man eine weitere, sinnvolle Lösung, indem der Klammerausdruck null wird.

$$\left[k - \omega_0^2 m \right] \hat{x}e^{j\omega_0 t} = 0 \quad (3.5)$$

Als Lösung beschreibt die *Eigenkreisfrequenz* ω_0 in Verbindung mit Gl. 3.2 die Eigenschwingung des ungedämpften Systems:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.6)$$

Die *Eigenfrequenz* f_0 und die Periodendauer T erhält man aus den Gln. 2.4 und 2.5. In Gl. 3.6 gehen lediglich Federsteifigkeit und Masse ein. Daraus folgt unmittelbar, dass für ein lineares System mit linearer Rückstellung

- die Eigenkreisfrequenz ω_0 unabhängig von Anfangsauslenkung bzw. der Amplitude ist. Es ist ein Hinweis auf Nichtlinearitäten im schwingungsfähigen System, wenn sich mit Änderung der Amplitude die Eigenkreisfrequenz ebenfalls ändert.
- die Eigenkreisfrequenz ω_0 unabhängig von der statischen Ruhelage des schwingungsfähigen Systems ist. Eine Veränderung der Federvorspannung bewirkt (bei linearer Federkennlinie) also keine Änderung der Eigenkreisfrequenz.

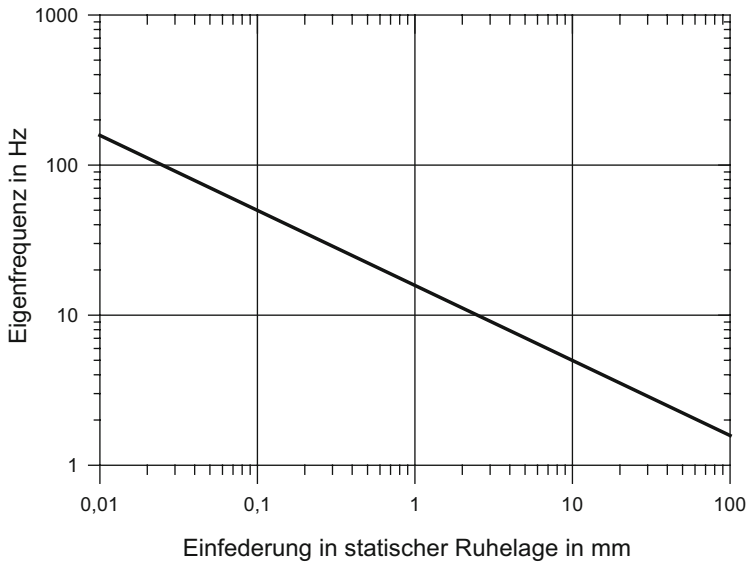


Abb. 3.2 Zusammenhang zwischen Einfederung in der statischen Ruhelage und Eigenfrequenz

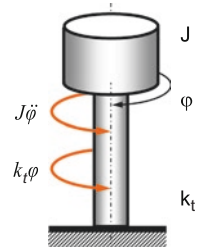
Die Eigenfrequenz lässt sich aus der statischen Einfederung von Maschinenfundamenten und Fahrzeugen abschätzen (Abb. 3.2). Die Einfederung in der statischen Ruhelage $x_{st} = mg/k$ ist die Verformung der Feder durch die Belastung mit der Gewichtskraft mg . Durch Erweitern des Zählers und Nenners in Gl. 3.6 mit der Erdbeschleunigung g schreibt sich der Zusammenhang zur Eigenfrequenz f_0 wie folgt:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\frac{g}{g}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{x_{st}}} \quad (3.7)$$

Häufig wird für Maschinenfundamente eine geringe Eigenfrequenz f_0 angestrebt. Dies führt zu einer möglichst geringen Federkonstante k und damit wird die Einfederung x_{st} in der statischen Ruhelage größer, was wiederum unerwünscht und aus konstruktiver Sicht oftmals nicht realisierbar ist. Andererseits lässt sich auf diesem Wege bereits aus der Einfederung in der statischen Ruhelage die Eigenfrequenz abschätzen.

3.2 Rotationsschwingungen

Als Beispiel für Rotationsschwingungen soll ein schwingungsfähiges 1-Freiheitsgrad-System mit *Massenträgheitsmoment* J um die Rotationsachse und einer masselosen Feder nach DIN 1311–2 [1] mit der linearen Drehfederkonstante k_t dienen (Abb. 3.3).

Abb. 3.3 Rotationsschwinger

Das schwingungsfähige System führt Rotationsschwingungen um die feste z -Achse mit der Koordinate $\varphi(t)$ aus. Durch Freischneiden und Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen erhält man:

$$-J\ddot{\varphi} - k_t\varphi = 0. \quad (3.8)$$

Durch einen Koeffizientenvergleich mit Gl. 3.1 erhält man sofort die Lösung für die Eigenkreisfrequenz ω_0 :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_t}{J}}. \quad (3.9)$$

Zwischen Translations- und Rotationsschwingungen besteht also eine Analogie, durch die sich die Ergebnisse des Translationsschwingers auf den Rotationsschwinger übertragen lassen.

Für den Sonderfall einer Welle mit Vollkreisquerschnitt, der über der Länge l der Welle konstant ist, lässt sich die Drehfederkonstante k_t mit dem Schubmodul G des Werkstoffes und dem polaren Flächenmoment 2. Ordnung I_p wie folgt berechnen:

$$k_t = \frac{GI_p}{l}. \quad (3.10)$$

Die Eigenkreisfrequenz ω_0 errechnet sich dann zu:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{GI_p}{IJ}}. \quad (3.11)$$

Ersetzt man die Eigenkreisfrequenz ω_0 durch die Periodendauer T_0 nach Gl. 2.5 und stellt die Gleichung nach J um, so erhält man:

$$J = \frac{T_0^2}{4\pi^2} \frac{GI_p}{l}. \quad (3.12)$$

Mit Gl. 3.12 lässt sich das Massenträgheitsmoment mit der gemessenen Periodendauer der Schwingung T_0 errechnen. Hierfür wird in einem Drehschwingungsversuch die zu untersuchende Struktur (Bauteil, System) an der Drehstabfeder mit bekannter Federkonstante aufgehängt und in Schwingungen versetzt [5].

3.3 Freie gedämpfte Schwingungen

In der Praxis stets auftretende Bewegungswiderstände bewirken ein Abklingen der Schwingung. Diese als *Dämpfung* bezeichnete Eigenschaft des schwingungsfähigen Systems setzt sich zusammen aus der Werkstoffdämpfung, der Bauteildämpfung der Konstruktion, der Lagerdämpfung, der Umgebungsdämpfung durch umgebende Medien (Luft, Öl, Wasser usw.) sowie der im engeren Sinne verstandenen Dämpfung durch Schwingungsdämpfer. DIN 1311–2 [1] spricht von dissipativen Strukturelementen. Eine Dämpfung tritt demnach auf, wenn dissipative Strukturelemente die Energiesumme in den Energiespeichern des schwingungsfähigen Systems vermindern.

Als einfach zu handhabender Ansatz für die mathematische Beschreibung der Dämpfung wird ein linearer Zusammenhang zwischen Dämpfungskraft F_{diss} und Geschwindigkeit (Schnelle) angenommen:

$$F_{\text{diss}}(\dot{x}) = d\dot{x}. \quad (3.13)$$

Die Dämpfungskonstante d wird in Ns/m angegeben. Dieser lineare Zusammenhang mit der Geschwindigkeit wird als *geschwindigkeitsproportionale* bzw. *viskose Dämpfung* bzw. nach DIN 1311–2 als Bauteildämpfung bezeichnet und kann zur Beschreibung der Material-, Bauteil- und Flüssigkeitsdämpfung herangezogen werden. Nichtlineare Dämpfungseinflüsse durch z. B. turbulente Strömungen und trockene Reibung (Coulombsche Reibung) können hingegen mit Gl. 3.13 nicht beschrieben werden.

Bei Auslenkung um die statische Gleichgewichtslage lässt sich die Kräftebilanz in einem schwingungsfähigen System (Abb. 3.4) wie folgt aufschreiben:

$$-m\ddot{x} - d\dot{x} - kx = 0. \quad (3.14)$$

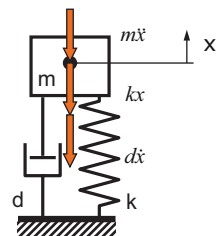
Durch Einsetzen der Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems $\omega_0^2 = k/m$ und der *Abklingkonstante* $\delta = d/(2m)$ in Gl. 3.14 erhält man

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.15)$$

Für die weitere Rechnung wird als dimensionslose Größe der *Dämpfungsgrad* ϑ (auch als Lehr'sches Dämpfungsmaß D bezeichnet) eingeführt:

$$\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0}. \quad (3.16)$$

Abb. 3.4 Translationsschwinger mit Dämpfung



Als Lösungsansatz für diese Differenzialgleichung 2. Ordnung wird die Funktion $x(t) = Ae^{\lambda t}$ und deren Ableitungen $\dot{x}(t) = A\lambda e^{\lambda t}$ und $\ddot{x}(t) = A\lambda^2 e^{\lambda t}$ in Gl. 3.14 eingesetzt:

$$\underbrace{A\lambda^2 e^{\lambda t}}_{\ddot{x}} + 2\delta \underbrace{A\lambda e^{\lambda t}}_{\dot{x}} + \omega_0^2 \underbrace{Ae^{\lambda t}}_x = 0. \quad (3.17)$$

Durch Heraus Kürzen von $Ae^{\lambda t}$ in Gl. 3.17 erhält man die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (3.18)$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösung für die beiden Eigenwerte λ :

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \quad (3.19)$$

In Abhängigkeit welchen Zahlenwert der Wurzel Ausdruck in Gl. 3.19 annimmt, nimmt die Lösung unterschiedliche Form an. In der DIN 1311-2 werden folgende Fälle unterschieden, die in Tab. 3.1 zusammengefasst sind.

Der messtechnisch häufig auftretenden Fall des Dämpfungsgrades $0 < \vartheta < 1$ soll hier näher untersucht werden. Aus der Lösung der Differenzialgleichung ist zu entnehmen, dass die Schwingungen mit $Ae^{-\delta t}$ als Einhüllende abklingen. Die Dämpfung verringert die *Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems* ω_d um einen konstanten Faktor:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \vartheta^2}. \quad (3.20)$$

Die Schwingung ist streng genommen nicht periodisch, da die Amplituden zwischen zwei Nulldurchgängen abnehmen. Da die Amplitude im betrachteten Fall nur geringfügig innerhalb einer Periode abklingt, wird die gedämpfte Schwingung als *quasi-harmonische Schwingung* bezeichnet. Aufgrund der festen Periodendauer wird die Quasi-Periodendauer T_d definiert:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \vartheta^2}}. \quad (3.21)$$

Durch Normierung mit ω_0 und unter Benutzung von Gl. 3.16 kann die Gl. 3.21 in die Form einer Kreisgleichung gebracht werden:

$$\left(\frac{\omega_d}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2 = 1. \quad (3.22)$$

Die grafische Auftragung von Gl. 3.22 in Abb. 3.5 zeigt, dass bei schwacher Dämpfung $\delta/\omega_0 \rightarrow 0$ das Verhältnis ω_d/ω_0 gegen den Wert 1 strebt, die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems ω_0 also als Näherung für die Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems ω_d gelten kann.

Der mit der Ordinatenachse eingeschlossene Winkel wird als *Dämpfungswinkel* Θ bezeichnet und ist analog zum Polwinkel in der Elektrotechnik definiert [6].

Tab. 3.1 Lösungen der Differenzialgleichung für die freie gedämpfte Schwingung

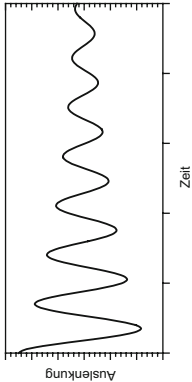
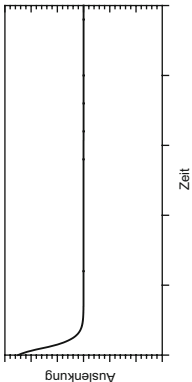
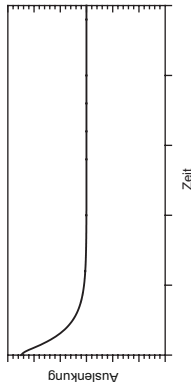
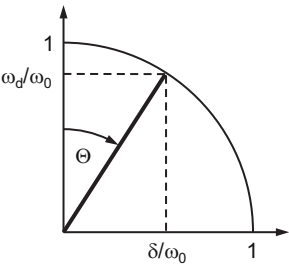
Bezeichnung nach DIN 1311-2	Dämpfungsgrad ϑ	Eigenwerte	Lösung der Differenzialgleichung	Weg-Zeit-Funktion
Schwach gedämpft	$\vartheta \ll 1$	Komplex $\lambda_{1,2} = -\delta \pm j\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$	$x(t) = Ae^{-\delta t}[\cos(\omega_d t + \varphi_0)]$ mit $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0\sqrt{1 - \vartheta^2}$ A und φ_0 aus Anfangsbedingungen	
Stark gedämpft	$\vartheta < 1$			
Aperiodischer Grenzfall	$\vartheta = 1$	Reell, negativ $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$	$x(t) = (A_1 t + A_2)e^{-\delta t}$ A_1 und A_2 aus Anfangsbedingungen	
Sehr starke Dämpfung	$\vartheta \geq 1$	Reell, negativ $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$	$x(t) = (A_1 e^{\lambda_{1,t}} + A_2 e^{\lambda_{2,t}})$ A_1 und A_2 aus Anfangsbedingungen	

Abb. 3.5 Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems und Dämpfungswinkel



Unter Benutzung des Dämpfungsgrades aus Gl. 3.16 ergeben sich die Zahlenwerte in Tab. 3.2.

Zur Beschreibung der Dämpfung dient ebenfalls das *logarithmische Dekrement* Λ , welches als der natürliche Logarithmus zweier aufeinander folgender Schwingungsmaxima definiert ist (vgl. Abb. 3.6):

$$\Lambda = \ln \left(\frac{x_k(t)}{x_{k+1}(t + T_d)} \right). \tag{3.23}$$

Die beiden Schwingungsmaxima sind um 2π phasenverschoben. Das Einsetzen der Weg-Zeit-Funktion $x(t) = Ae^{-\delta t}[\cos(\omega_d t + \varphi_0)]$ in Gl. 3.23 sowie nachfolgender Vereinfachung mit $\omega_d T_d = 2\pi$ kürzen sich neben A die Cosinus-Terme aufgrund deren Periodizität mit 2π heraus:

Tab. 3.2 Einfluss des Dämpfungsgrades ϑ auf das Verhältnis Eigenkreisfrequenz des gedämpften zum ungedämpften System ω_d/ω_0 sowie Dämpfungswinkel Θ

ϑ	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5	0,7
ω_d/ω_0	0,9999	0,9998	0,9987	0,9950	0,9798	0,8660	0,7141
Θ in Grad	0,6	1,1	2,9	5,7	11,3	26,6	35,0

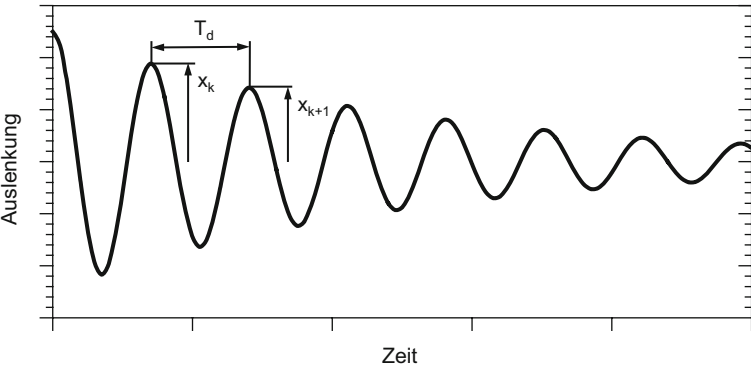


Abb. 3.6 Definition des logarithmischen Dekrements an der schwach gedämpften Schwingung

$$\Lambda = \ln \left(\frac{Ae^{-\delta t} [\cos(\omega_d t + \varphi_0)]}{Ae^{-\delta(t+T_d)} [\cos(\omega_d(t+T_d) + \varphi_0)]} \right) = \ln e^{\delta T_d} = \delta T_d = \delta \frac{2\pi}{\omega_d}. \quad (3.24)$$

Ebenfalls kann die Dämpfung über den *Verlustfaktor* ψ beschrieben werden, der nach DIN 1311-2¹ als Verhältnis der aus dem System durch Dissipation, Fortleitung oder Abstrahlung herausgeführten Energie E_v und dem Maximum der potenziellen Energie E_r definiert ist:

$$\Psi = \frac{E_v}{E_r}. \quad (3.25)$$

Die Auftragung der Kraft über die Verformung eines Bauteils zeigt infolge der Dämpfung zwischen Belastung und Entlastung ein unterschiedliches Materialverhalten (Abb. 3.7). Im eingeschwungenen, d. h. stationären Zustand stellt die zwischen beiden Kurvenästen eingeschlossene Fläche (Hysteresese) den Verlust der mechanischen Energie pro Schwingenspiel E_v (am Bauteil verrichtete Dämpfungs- oder Verlustarbeit) dar. Während der maximalen Belastung wird die Formänderungsenergie E_r im Bauteil gespeichert. Dies ist die potenzielle Energie pro Schwingenspiel und entspricht der Dreiecksfläche mit dem Flächeninhalt $E_r = \frac{1}{2} k x_k^2$. Für den zunächst unbekannten Flächeninhalt der Hysteresekurve E_v wird in Gl. 3.25 eine Näherung aus den Maxima der Hysteresese getroffen. Hierbei wird E_v als Differenz der potenziellen Energie an den Stellen zweier aufeinander folgenden Maxima k und $k+1$ ausgedrückt und auf Energie E_r im $k+1$. Maximum bezogen:

$$\Psi = \frac{E_v}{E_r} = \frac{E_k - E_{k+1}}{E_{k+1}} = \frac{\frac{1}{2} k x_k^2 - \frac{1}{2} k x_{k+1}^2}{\frac{1}{2} k x_{k+1}^2} = \frac{\frac{1}{2} k x_k^2}{\frac{1}{2} k x_{k+1}^2} - 1 = \frac{x_k^2}{x_{k+1}^2} - 1. \quad (4.26)$$

Für den Ansatz in Gl. 3.26 wird linear-elastisches Materialverhalten mit einer Steifigkeit k und eine lineare Rückstellkraft vorausgesetzt. Die Form der Hystereseschleife und deren eingeschlossene Fläche gehen aufgrund des Ansatzes nicht in die Berechnung ein. Es wird vielmehr die Zunahme des Verlustfaktors ψ über ein Schwingenspiel berechnet. Die Normierung auf das $k+1$. Maximum erfolgt wegen der späteren Linearisierung. Setzt man $x_k/x_{k+1} = e^\Lambda$ aus Gl. 3.23 ein, so folgt:

$$\Psi = (e^\Lambda)^2 - 1 = e^{2\Lambda} - 1.$$

Nach Logarithmieren kann dieser Zusammenhang für kleine ψ linearisiert werden, indem eine Reihenentwicklung nach dem ersten Term abgebrochen wird ($\ln(\Psi + 1) \approx \Psi$):

$$\Psi = 2\Lambda. \quad (3.27)$$

¹DIN 1311-2 verwendet als Formelzeichen η , welches wegen der Gefahr der Verwechslung mit dem Abstimmungsverhältnis hier nicht verwendet wird.

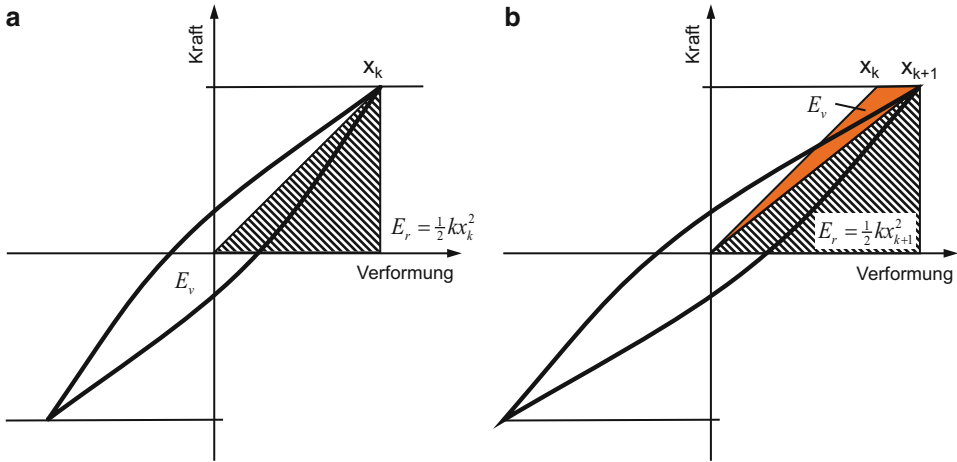
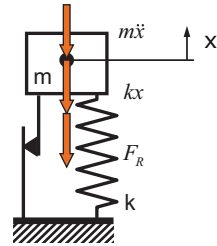


Abb. 3.7 Hysteresekurve eines Bauteils unter Belastung mit konstanter Kraftamplitude. **a** Definition des Verlustfaktors ψ im k . Maximum, **b** Näherung für E_v mit dem $k + 1$. Maximum

Abb. 3.8 Translationsschwinger mit Coulombscher Reibung



Die Eigenfrequenz und die Dämpfung der freien gedämpften Schwingung kann durch verschiedene Kenngrößen ausgedrückt werden, die ineinander überführt werden können. Die Umrechnung verschiedener Kenngrößen ist in Tab. 3.3 zusammengestellt.

Unter trockener Reibung (Coulombsche Reibung) kann der Ansatz einer konstanten Reibkraft F_R für die mathematische Beschreibung der Dämpfung dienen (Abb. 3.8). Da die Reibkraft stets entgegen der Bewegungsrichtung wirkt, muss für jede Halbschwingung eine gesonderte Schwingungsdifferentialgleichung aufgestellt werden [4]:

$$\begin{aligned} \dot{x} > 0 : -m\ddot{x} - kx &= +F_R \\ \dot{x} < 0 : -m\ddot{x} - kx &= -F_R. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Beide Gleichungen unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen der Störglieder F_R . Die Lösung beider inhomogenen Differenzialgleichungen muss getrennt für die positiven Halbschwingungen mit $\dot{x} > 0$ und die negativen Halbschwingungen $\dot{x} < 0$ erfolgen und lautet:

Tab. 3.3 Eigenfrequenz und die Dämpfung der freien gedämpften Schwingung für Dämpfungsgrade $0 < \vartheta < 1$

	Dämpfungskoeffizient d	Abklingkoeffizient δ	Dämpfungsgrad ϑ	Logarithmisches Dekrement Λ	Dämpfungs- winkel Θ	Verlustfaktor ψ
Eigenfrequenz der gedämpften Schwingung ω_d	$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{d}{2m}\right)^2}$	$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$	$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \vartheta^2}$	$\omega_d = \frac{2\pi\omega_0}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}}$	$\omega_d = \omega_0 \cos \Theta$	$\omega_d = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\psi}{4\pi}\right)^2}}$
Dämpfungs- koeffizient d	1	$d = 2m\delta$	$d = 2\sqrt{km}\vartheta$	$d = \frac{2\sqrt{km}\Lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}}$	$d = 2\sqrt{km} \sin \Theta$	$d = \frac{\sqrt{km}\psi}{2\pi\sqrt{1 + \left(\frac{\psi}{4\pi}\right)^2}}$
Abklingkoeffizient δ	$\delta = \frac{d}{2m}$	1	$\delta = \vartheta\omega_0$	$\delta = \frac{\omega_0\Lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}}$	$\delta = \omega_0 \sin \Theta$	$\delta = \frac{\omega_0\psi}{4\pi\sqrt{1 + \left(\frac{\psi}{4\pi}\right)^2}}$
Dämpfungsgrad ϑ	$\vartheta = \frac{d}{2\sqrt{km}}$	$\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0}$	1	$\vartheta = \frac{\Lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}}$ $\vartheta = \frac{\Lambda}{2\pi} (*)$	$\vartheta = \sin \Theta$	$\vartheta = \frac{\psi}{4\pi} (*)$
Logarithmisches Dekrement Λ	$\Lambda = \frac{\pi \frac{d}{\sqrt{km}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{d}{2\sqrt{km}}\right)^2}}$ $\Lambda = \pi \frac{d}{\sqrt{km}} *$	$\Lambda = \frac{2\pi \frac{\delta}{\omega_0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2}}$ $\Lambda = 2\pi \frac{\delta}{\omega_0} (*)$	$\Lambda = \frac{2\pi\vartheta}{\sqrt{1 - \vartheta^2}}$ $\Lambda = 2\pi\vartheta (*)$	1	$\Lambda = 2\pi \tan \Theta$	$\Lambda = \frac{1}{2}\psi (*)$
Dämpfungswinkel Θ	$\Theta = \arctan \frac{\frac{d}{\sqrt{km}}}{\pi \sqrt{1 - \left(\frac{d}{2\sqrt{km}}\right)^2}}$	$\Theta = \arctan \frac{\frac{\delta}{\omega_0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2}}$	$\Theta = \arctan \frac{\vartheta}{\sqrt{1 - \vartheta^2}}$ $\Theta = \arcsin \vartheta (*)$	$\Theta = \arctan \frac{\Lambda}{2\pi}$	1	$\Theta = \arctan \frac{\psi}{4\pi}$
Verlustfaktor ψ	$\psi = \frac{2\pi \frac{d}{\sqrt{km}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{d}{2\sqrt{km}}\right)^2}}$	$\psi = \frac{4\pi \frac{\delta}{\omega_0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2}}$	$\psi = \frac{4\pi\vartheta}{\sqrt{1 - \vartheta^2}}$	$\psi = 2\Lambda$	$\psi = 4\pi \tan \Theta$	1

(*) Näherung für kleine Dämpfungen

$$\begin{aligned}\dot{x} > 0 : x(t) &= A_1[\cos(\omega_0 t + \varphi_0)] - \frac{F_R}{k} \\ \dot{x} < 0 : x(t) &= A_2[\cos(\omega_0 t + \varphi_0)] + \frac{F_R}{k}.\end{aligned}\tag{3.29}$$

Die Konstanten A_1 und A_2 gelten nur in der betrachteten Halbschwingung und sind aus den jeweiligen Anfangsbedingungen zu ermitteln. Die Eigenkreisfrequenz und Periodendauer entspricht der des ungedämpften Schwingers. Bei jeder halben Schwingung verringert sich die Amplitude um den konstanten Betrag F_R/k . Wenn die Amplitude kleiner als F_R/k geworden ist, kommt die Masse zum Stillstand (Abb. 3.8).

Literatur

1. DIN 1311–2: Schwingungen und Schwingungsfähige Systeme. Teil 2: Lineare, zeitinvariante schwingungsfähige Systeme mit einem Freiheitsgrad (2002)
2. Blake, R.E.: Basic vibration theory. In: Piersol, P. (Hrsg.) Harris' Shock and Vibration Handbook, Chapter 2. McGraw-Hill Education, New York (2009)
3. Gross, D., Hauger, W., Schröder, J., Wall, W.A.: Technische Mechanik 3 Kinetik. Springer Vieweg, Berlin (2015)
4. Jäger, H., Mastel, R., Knaebel, M.: Technische Schwingungslehre. Springer Vieweg, Wiesbaden (2016)
5. Dresig, H., Holzweißig, F.: Maschinendynamik. Springer Vieweg, Berlin (2016)
6. Zollner, M.: Frequenzanalyse. Autoren-Selbstverlag, Regensburg (1999)

- Unter der äußeren Einwirkung von periodischen Kräften und Bewegungen werden in einem schwingungsfähigen System erzwungene Schwingungen erregt. Dieser in der Praxis bedeutsame Fall tritt einerseits an den Messobjekten wie z. B. Bauteilen, Fahrzeugen, Fundamenten, Bauwerken usw. auf, ebenso können sind Schwingungsaufnehmer selbst schwingungsfähige Systeme. Damit bilden diese Betrachtungen die Grundlage für die Planung von Messaufgaben und dem Verständnis deren Ergebnisse. Anhand der Federkrafterregung werden Grundbegriffe sowie das Konzept der Übertragungsfunktionen entwickelt. Die Darstellung im Bode- und Nyquist-Diagramm wird erläutert, anschließend werden weitere Erregungsarten behandelt.

4.1 Federkrafterregung mit konstanter Kraftamplitude

Unter Einwirkung einer Erregerkraft F soll die Schwingungsantwort x in dem schwingungsfähigen System (Abb. 4.1) untersucht werden [1–6].

Ein Kräftegleichgewicht am Schwerpunkt in vertikaler Richtung führt auf die inhomogene Differenzialgleichung:

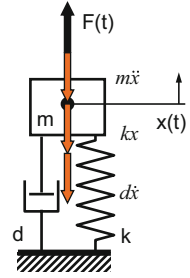
$$-m\ddot{x} - d\dot{x} - kx = -F(t). \quad (4.1)$$

Die Erregerkraft wird als harmonische Funktion mit veränderlicher *Erregerkreisfrequenz* Ω und der Amplitude $\hat{F}$ angesetzt. In Polarform lautet diese

$$\underline{F}(t) = \hat{F} \cdot e^{j\Omega t} \quad (4.2)$$

Der Nullphasenwinkel wird zu null angenommen, dies vereinfacht die Lösung. Die Kraft ist nicht von der Schwingungsantwort abhängig, es findet also keine Rückwirkung des

Abb. 4.1 Translationsschwinger unter Kräfteerregung



schwingungsfähigen Systems auf die Kraft statt. Die Schwingungsantwort x und deren Ableitungen werden als Zeiger mit dem Phasenwinkel ς unter Benutzung von Gl. 2.14, 2.18 und 2.19 angesetzt:

$$\begin{aligned}\underline{x}(t) &= \hat{x} \cdot e^{j(\Omega t - \varsigma)} \\ \dot{\underline{x}}(t) &= j\Omega \hat{x} e^{j(\Omega t - \varsigma)} \\ \ddot{\underline{x}}(t) &= -\Omega^2 \hat{x} e^{j(\Omega t - \varsigma)}.\end{aligned}\quad (4.3)$$

In der Praxis ist meistens der *stationäre Bewegungszustand* des Systems interessant, der sich nach dem Abklingen aller Einschwingvorgänge unter der periodisch wirkenden Erregerkraft einstellt. Als Lösung der Differenzialgleichung ist deshalb eine Partikulärlösung der inhomogenen Differenzialgleichung Gl. 4.1 gesucht, die man durch Einsetzen der Gl. 4.2 und 4.3 erhält:

$$-\Omega^2 m \hat{x} e^{j(\Omega t - \varsigma)} + j\Omega d \hat{x} e^{j(\Omega t - \varsigma)} + k \hat{x} \cdot e^{j(\Omega t - \varsigma)} = \hat{F} e^{j\Omega t}. \quad (4.4)$$

Nach Zusammenfassung der Terme und Ausklammern der komplexen Amplitude ergibt sich:

$$\left[-\Omega^2 m + k + j\Omega d \right] \hat{x} e^{j(\Omega t - \varsigma)} = \hat{F} e^{j\Omega t}. \quad (4.5)$$

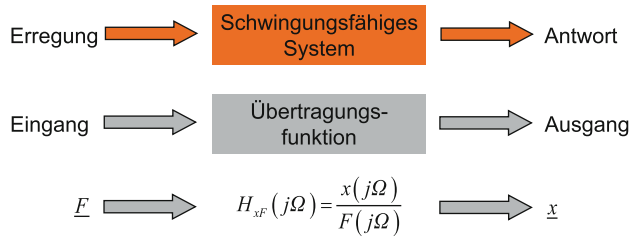
Nun wird der Zeiger $\underline{x}(t)$ in die Zeitfunktion $e^{j\Omega t}$ und komplexe Amplitude $\hat{x}$ aufgespalten:

$$\underline{x}(t) = \hat{x} e^{j(\Omega t - \varsigma)} = \hat{x} e^{-j\varsigma} e^{j\Omega t} = \underline{\hat{x}} e^{j\Omega t}. \quad (4.6)$$

Die komplexe Amplitude $\hat{x}$ beinhaltet den Phasenwinkel ς . Durch Einsetzen von Gl. 4.6 in Gl. 4.5 hebt sich der Term $e^{j\Omega t}$ auf der linken und rechten Seite der Gleichung heraus und lautet:

$$\underline{\hat{x}} = \hat{F} \left[\frac{1}{-\Omega^2 m + k + j\Omega d} \right]. \quad (4.7)$$

Damit ist die komplexe Amplitude $\underline{\hat{x}}$ proportional zur Amplitude der Kraft $\hat{F}$. Durch Multiplikation mit der Zeitfunktion $e^{j\Omega t}$ rotieren beide Zeiger $\underline{\hat{x}}$ und $\hat{F}$ in der komplexen Zahlenebene mit der Erregerkreisfrequenz Ω .

Abb. 4.2 Zur Definition der Übertragungsfunktion

Stellt man nun die Erregerkraft als Eingang und die Schwingungsantwort als Ausgang eines schwingungsfähigen Systems dar, so verknüpft die *Übertragungsfunktion*¹ $H_{xF}(j\Omega)$ diese beiden Größen im Frequenzbereich (Abb. 4.2):

$$H_{xF}(j\Omega) = \frac{\hat{x}}{\hat{F}}. \quad (4.8)$$

Für die Ausgangs- und Eingangsgrößen werden die komplexen Amplituden benutzt, da diese Informationen über die Amplituden (d. h. Beträge) und den Phasenverschiebungswinkel enthalten sind. Die Übertragungsfunktion ist dann ebenfalls eine komplexe Größe, für die Darstellungen als Amplituden- und Phasenanteil (*Bodediagramm*, Abschn. 4.2) bzw. als Real- und Imaginärteil (*Nyquistdiagramm*, Abschn. 4.4) üblich sind.

Für die praktische Anwendung ist es von großem Nutzen, die Lösung auf dimensionslose Größen zu normieren, um die Fülle der möglichen Kombinationen der Parameter zu reduzieren. Hierfür wird einerseits der Dämpfungsgrad ϑ (Gl. 3.16) und andererseits das *Abstimmungsverhältnis* η als Verhältnis von Erregerkreisfrequenz Ω zu Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems ω_0 benutzt:

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}. \quad (4.9)$$

Kennzeichnende Begriffe in Zusammenhang mit dem Abstimmungsverhältnis sind in Tab. 4.1 zusammengefasst.

Durch Einsetzen von Dämpfungsgrad ϑ und Abstimmungsverhältnis η erhält man nach Ausklammern der Federkonstante k im Nenner schließlich

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}}{k} \left[\frac{1}{(1 - \eta^2) + j2\vartheta\eta} \right]. \quad (4.10)$$

¹Komplexe Größen können durch den Unterstrich $\underline{H}$ oder in der Form $H(j\Omega)$ gekennzeichnet werden. Beide Schreibweisen werden in der Literatur gleichwertig verwendet [1, 7, 8]. In dieser Darstellung wird die Schreibweise $H(j\Omega)$ für Übertragungsfunktionen dann benutzt, wenn deren Amplituden- und Phasenanteil ausgewertet wird.

Tab. 4.1 Zusammenhang zwischen Abstimmungsverhältnis und Bezeichnungen am schwingungsfähigen System

Abstimmungsverhältnis η	Abstimmung	Erregung
$\eta \ll 1$	Hochabgestimmt	Unterkritisch
$\eta \gg 1$	Tiefabgestimmt	Überkritisch

Zur anschaulicheren Darstellung wird die Übertragungsfunktion in den Amplitudenanteil und Phasenanteil zerlegt. Den Amplitudenanteil erhält man durch Bildung des Betrags:

$$\begin{aligned}
 H_{xF}(\eta) &= |H_{xF}(j\eta)| = \sqrt{(\operatorname{Re}(H_{xF}(j\eta)))^2 + (\operatorname{Im}(H_{xF}(j\eta)))^2} \\
 &= \frac{1}{k} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\vartheta\eta)^2}} \right].
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Der Amplitudenfrequenzgang kann wiederum in einen dimensionsbehafteten und einen dimensionslosen Anteil aufgeteilt werden:

$$H_{xF}(\eta) = \kappa_{xF} \cdot \alpha_{xF}(\eta) = \frac{1}{k} \alpha_{xF}(\eta). \tag{4.12}$$

Der Amplitudenanteil der Übertragungsfunktion α_{xF} ist selbst dimensionslos. Der Vorfaktor κ_{xF} enthält hingegen die Einheiten. Für den Phasenanteil ergibt sich unter Berücksichtigung des Minuszeichens in der komplexen Amplitude $\hat{x}e^{-j\varsigma}$:

$$\tan \varsigma_{xF}(\eta) = -\frac{\operatorname{Im}(H_{xF}(j\eta))}{\operatorname{Re}(H_{xF}(j\eta))} = \frac{2\vartheta\eta}{1 - \eta^2}. \tag{4.13}$$

Der Phasenverschiebungswinkel ς ist als Differenz der Phasenwinkel von Erregung (Kraftzeiger) und Schwingungsantwort (Beschleunigungszeiger) zu verstehen. Amplitudenanteil und Phasenanteil sind reelle Größen. Die dimensionslose Darstellung des Amplitudenanteils der Übertragungsfunktion in Krafterregung wird in der Maschinendynamik als *Vergrößerungsfunktion* V_1 bezeichnet. Aus diesem Grund wird vereinfachend $\alpha_1 = \alpha_{xF}$ und $\varsigma_1 = \varsigma_{xF}$ gesetzt.

4.2 Amplituden- und Phasenfrequenzgang

Die Auftragung des Amplitudenanteils α_{xF} und des Frequenzanteils ς_{xF} der Übertragungsfunktion über der Erregerkreisfrequenz Ω bzw. dem Abstimmungsverhältnis η wird als *Amplitudenfrequenzgang* bzw. *Phasenfrequenzgang* bezeichnet.