



Zeitdiskrete Signalverarbeitung

von
Alan V. Oppenheim
und
Ronald W. Schafer

3., durchgesehene Auflage

Mit 541 Bildern, 19 Tabellen,
112 Beispielen und 403 Aufgaben

R. Oldenbourg Verlag München Wien 1999

Autorisierte Übersetzung der englischsprachigen Originalausgabe, erschienen im Verlag Prentice Hall, Inc., unter dem Titel:
„Discrete-Time Signal Processing“.

Copyright © 1989 by Prentice Hall, Inc.
All rights reserved.

Deutsche Übersetzung: Dipl.-Ing. Horst Walter

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Oppenheim, Alan V.:

Zeitdiskrete Signalverarbeitung : mit 19 Tabellen und 112
Beispielen und 403 Aufgaben / von Alan V. Oppenheim und
Ronald W. Schafer. [Dt. Übers.: Horst Walter]. – 3., durchges.
Aufl. – München ; Wien : Oldenbourg, 1999

Einheitssacht.: Discrete time signal processing <dt.>

ISBN 3-486-24145-1

NE: Schafer, Ronald W.:

© 1999 R. Oldenbourg Verlag
Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0, Internet: <http://www.oldenbourg.de>

Das Werk einschließlich aller Abbildungen ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen.

Lektorat: Andreas Türk

Herstellung: Rainer Hartl

Umschlagkonzeption: Kraxenberger Kommunikationshaus, München

Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier

Gesamtherstellung: R. Oldenbourg Graphische Betriebe GmbH, München

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Zeitdiskrete Signale und Systeme	9
2.1	Zeitdiskrete Signalfolgen	10
2.1.1	Einfache Folgen und Operationen mit Folgen	11
2.2	Zeitdiskrete Systeme	17
2.2.1	Systeme ohne Gedächtnis	20
2.2.2	Lineare Systeme	20
2.2.3	Zeitinvariante Systeme	21
2.2.4	Kausalität	22
2.2.5	Stabilität	23
2.3	Lineare zeitinvariante Systeme	24
2.4	Eigenschaften linearer zeitinvarianter Systeme	31
2.5	Lineare Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten	37
2.6	Frequenzbereichsdarstellung zeitdiskreter Signale	44
2.7	Fourier-Transformationsdarstellung von Folgen	51
2.8	Symmetrie-Eigenschaften von Fourier-Transformierten	58
2.9	Theoreme der Fourier-Transformation	61
2.9.1	Linearität der Fourier-Transformation	63
2.9.2	Zeit- und Frequenzverschiebung	64
2.9.3	Zeitumkehr	64
2.9.4	Differentiation im Frequenzbereich	65
2.9.5	Parsevalsches Theorem	65
2.9.6	Faltungstheorem	65
2.9.7	Modulations- oder Fenstertheorem	67
2.10	Zeitdiskrete Zufallssignale	71
2.11	Zusammenfassung	76
	Aufgaben	77
3	Die Abtastung zeitkontinuierlicher Signale	95
3.1	Periodische Abtastung	95
3.2	Darstellung der Abtastung im Frequenzbereich	98
3.3	Rekonstruktion eines bandbegrenzten Signals	104
3.4	Zeitdiskrete Verarbeitung zeitkontinuierlicher Signale	109
3.4.1	Lineare zeitinvariante zeitdiskrete Systeme	110
3.4.2	Impulsinvarianz	116
3.5	Zeitkontinuierliche Verarbeitung zeitdiskreter Signale	118
3.6	Abtastratenwechsel in der zeitdiskreten Signalverarbeitung	121
3.6.1	Abtastratenreduktion um einen ganzzahligen Faktor	121
3.6.2	Abtastratenerhöhung um einen ganzzahligen Faktor	125
3.6.3	Nicht ganzzahlige Veränderung der Abtastrate	132
3.7	Praktische Gesichtspunkte	133
3.7.1	Vorfilterung zur Vermeidung von Aliasing	133

3.7.2	Analog/Digital-Wandlung (A/D)	135
3.7.3	Untersuchung der Quantisierungsfehler	141
3.7.4	Digital/Analog-Wandlung (D/A)	146
3.7.5	Abtastratenänderung bei der A/D- und D/A-Wandlung	151
3.8	Zusammenfassung	155
	Aufgaben	155
4	Die z-Transformation	179
4.1	Die z -Transformierte	179
4.2	Eigenschaften des Konvergenzgebietes einer z -Transformierten	191
4.3	Die inverse z -Transformation	198
4.3.1	Tabellenverfahren	200
4.3.2	Partialbruchzerlegung	200
4.3.3	Potenzreihenentwicklung	205
4.4	Eigenschaften der z -Transformation	207
4.4.1	Linearität	208
4.4.2	Zeitverschiebung	209
4.4.3	Multiplikation mit einer Exponentialfolge	210
4.4.4	Differentiation von $X(z)$	211
4.4.5	Konjugation einer komplexen Folge	213
4.4.6	Zeitumkehr	213
4.4.7	Faltung von Folgen	213
4.4.8	Anfangswert-Theorem	215
4.4.9	Zusammenfassung der Eigenschaften	215
4.5	Bestimmung der inversen z -Transformierten	216
4.6	Das komplexe Faltungstheorem	220
4.7	Die Parsevalsche Beziehung	224
4.8	Die einseitige z -Transformation	225
4.9	Zusammenfassung	229
	Aufgaben	230
5	Transformationsanalyse von LTI-Systemen	245
5.1	Übertragungsfunktionen von LTI-Systemen	246
5.1.1	Ideale frequenzselektive Filter	246
5.1.2	Phasenverzerrungen und Laufzeiten	247
5.2	Lineare Systemfunktionen mit konstanten Koeffizienten	249
5.2.1	Stabilität und Kausalität	251
5.2.2	Inverse Systeme	252
5.2.3	Impulsantworten rationaler Systemfunktionen	255
5.3	Übertragungsfunktionen rationaler Systemfunktionen	258
5.3.1	Übertragungsfunktion einer einzelnen Pol-/Nullstelle	263
5.3.2	Beispiele für vielfache Pol- und Nullstellen	271
5.4	Beziehungen zwischen dem Amplituden- und Phasengang	275
5.5	Allpaßsysteme	280
5.6	Minimalphasige Systeme	287

5.6.1	Kompensation der Übertragungsfunktion	288
5.6.2	Eigenschaften minimalphasiger Systeme	294
5.7	Lineare Systeme mit verallgemeinerter linearer Phase	298
5.7.1	Systeme mit linearer Phase	299
5.7.2	Verallgemeinerte lineare Phase	303
5.7.3	Kausale Systeme mit verallgemeinerter linearer Phase	306
5.7.4	Zusammenhänge zwischen linearphasigen und minimalphasigen FIR-Systemen	317
5.8	Zusammenfassung	320
	Aufgaben	322
6	Strukturen zeitdiskreter Systeme	349
6.1	Blockdiagramme für lineare Differenzgleichungen	350
6.2	Signalflußgraphen für lineare Differenzgleichungen	357
6.3	Grundstrukturen von IIR-Systemen	361
6.3.1	Direkte Formen	362
6.3.2	Reihenschaltungs-Form	364
6.3.3	Parallele Form	367
6.3.4	Rückkopplungen in IIR-Systemen	370
6.4	Transponierte Formen	372
6.5	Netzwerk-Grundstrukturen für FIR-Systeme	376
6.5.1	Direkte Form	377
6.5.2	Reihenschaltungsform	377
6.5.3	Strukturen linearphasiger FIR-Systeme	378
6.6	Gitterstrukturen	381
6.6.1	FIR-Gitterstruktur	382
6.6.2	All-Pol-Gitterstruktur	387
6.6.3	Normalisierte Gitterstruktur	388
6.6.4	Gittersysteme mit Pol- und Nullstellen	392
6.7	Auswirkungen einer endlichen Rechengenauigkeit	394
6.7.1	Zahlendarstellungen	394
6.7.2	Quantisierungen bei der Systemimplementierung	399
6.8	Auswirkungen der Koeffizientenquantisierung	402
6.8.1	Bei IIR-Systemen	403
6.8.2	Bei FIR-Systemen	411
6.8.3	Andere Ansätze zur Sensibilitätsuntersuchung	420
6.9	Auswirkungen des Quantisierungsrauschens bei Digitalfiltern	420
6.9.1	Analyse der IIR-Strukturen in direkter Form	421
6.9.2	Festpunkt-Realisierungen von IIR-Systemen	431
6.9.3	Analyse von IIR-Reihen- und Parallelstrukturen	435
6.9.4	Analyse von FIR-Filtern in der direkten Form	441
6.9.5	Gleitkomma-Realisierungen zeitdiskreter Systeme	446
6.10	Grenzyklen bei digitalen IIR-Filtern	447
6.10.1	Grenzyklen als Folge von Rundung und Abschneiden	447
6.10.2	Grenzyklen als Folge von Überläufen	452
6.11	Zusammenfassung	454
	Aufgaben	455

7	Filterentwurfstechniken	487
7.1	IIR-Filterentwurf über zeitkontinuierliche Filter	491
7.1.1	Impulsinvarianzmethode	492
7.1.2	Bilineare Transformation	501
7.1.3	Entwurfsbeispiele mit der bilinearen Transformation	510
7.2	Frequenztransformationen von IIR-Tiefpaßfiltern	518
7.3	Computer unterstützter Entwurf zeitdiskreter IIR-Filter	527
7.3.1	Das Verfahren von Deczky	528
7.3.2	Entzerrung der Gruppenlaufzeit	531
7.4	Entwurf von FIR-Filtern mittels Fenstermethoden	534
7.4.1	Eigenschaften häufig verwendeter Fensterfunktionen	537
7.4.2	Einbeziehung der verallgemeinerten linearen Phase	539
7.4.3	Das Filterentwurfsverfahren für Kaiser-Fenster	544
7.4.4	Beziehungen zwischen dem Kaiser-Fenster und anderen Fenstern	548
7.5	FIR-Filter nach der Kaiser-Fenstermethode	550
7.5.1	Hochpaßfilter	550
7.5.2	Zeitdiskrete Differenzierer	554
7.6	Optimale FIR-Filter-Approximationen	555
7.6.1	Optimale Tiefpaßfilter vom Typ I	563
7.6.2	Optimale Tiefpaßfilter vom Typ II	570
7.6.3	Der Parks-McClellan-Algorithmus	572
7.6.4	Charakteristika optimaler FIR-Filter	574
7.7	Gleichmäßig wellige FIR-Filter-Approximationen	577
7.7.1	Tiefpaßfilter	577
7.7.2	Kompensation eines Haltegliedes nullter Ordnung	581
7.7.3	Bandpaßfilter	582
7.8	Anmerkungen zu den digitalen IIR- und FIR-Filtern	584
7.9	Zusammenfassung	587
	Aufgaben	588
8	Die diskrete Fourier-Transformation	623
8.1	Die diskrete Fourier-Reihe (DFS)	624
8.2	Eigenschaften der diskreten Fourier-Reihen	629
8.2.1	Linearität	630
8.2.2	Verschiebungseigenschaft	630
8.2.3	Dualität	631
8.2.4	Symmetrie-Eigenschaften	632
8.2.5	Periodische Faltung	632
8.3	Zusammenfassung der Eigenschaften der DFS-Darstellung	635
8.4	Die Fourier-Transformation periodischer Signale	635
8.5	Abtastung der Fourier-Transformierten	638
8.6	Die Diskrete Fourier-Transformation	642
8.7	Eigenschaften der diskreten Fourier-Transformation	647
8.7.1	Linearität	647

8.7.2	Zirkulare Verschiebung einer Folge	648
8.7.3	Dualität	651
8.7.4	Symmetrie-Eigenschaften	652
8.7.5	Zirkulare Faltung	656
8.8	Zusammenfassung der Eigenschaften der DFT	661
8.9	Lineare Faltung unter Verwendung der DFT	662
8.9.1	Lineare Faltung zweier endlicher Folgen	662
8.9.2	Zirkulare Faltung als lineare Faltung mit Aliasing	664
8.9.3	DFT-Implementierungen von LTI-Systemen	671
8.10	Zusammenfassung	676
	Aufgaben	677
9	Berechnung der DFT	703
9.1	Effiziente Berechnung der diskreten Fourier-Transformation	704
9.2	Der Goertzel-Algorithmus	707
9.3	Die FFT mit Zeiterlegung	710
9.3.1	In-place Berechnungen	716
9.3.2	Alternative Formen	721
9.4	Die FFT mit Frequenzerlegung	724
9.4.1	In-place Berechnungen	726
9.4.2	Alternative Formen	728
9.5	Implementierung von FFT-Algorithmen	729
9.5.1	Indizierung (Indexabbildung)	731
9.5.2	Koeffizienten	734
9.5.3	FORTRAN-Programme zur Implementierung der FFT	734
9.6	FFT-Algorithmen für faktorisierbare DFT-Längen N	736
9.6.1	Der Cooley-Tukey Algorithmus	736
9.6.2	Der Primfaktor-Algorithmus	747
9.7	Implementierung der DFT mit Hilfe der Faltung	751
9.7.1	Fourier-Transformations-Algorithmus nach Winograd	751
9.7.2	Der Chirp-Transformations-Algorithmus	752
9.8	Quantisierungsauswirkungen auf die Berechnung der DFT	758
9.8.1	Bei der direkten Berechnung der DFT	759
9.8.2	Bei FFT-Algorithmen mit Festpunktarithmetik	762
9.8.3	Bei FFT-Algorithmen mit Gleitkommaarithmetik	772
9.8.4	Auswirkung der FFT-Koeffizientenquantisierung	773
9.9	Zusammenfassung	775
	Aufgaben	775
10	Die diskrete Hilbert-Transformation	805
10.1	Real- oder Imaginärteil zur Darstellung kausaler Folgen	807
10.2	Hinreichende Theoreme für endliche Folgen	814
10.3	Beziehungen zwischen dem Amplituden- und Phasengang	819
10.4	Die Hilbert-Transformation komplexer Folgen	821
10.4.1	Entwurf von Hilbert-Transformatoren	825
10.4.2	Darstellung von Bandpaßsignalen	829
10.4.3	Bandpaßabtastung	833
10.5	Zusammenfassung	836
	Aufgaben	837

11 DFT-Fourier-Analyse von Signalen	845
11.1 Die Fourier-Analyse von Signalen mittels der DFT	845
11.2 Die DFT-Analyse sinusförmiger Signale	849
11.2.1 Die Auswirkungen der Gewichtung mit Fensterfolgen	849
11.2.2 Die Auswirkungen der spektralen Abtastung	856
11.3 Die zeitabhängige Fourier-Transformation	866
11.3.1 Die Auswirkungen der Fenstermethoden	869
11.3.2 Abtastung im Zeit- und Frequenzbereich	871
11.4 Die Blockweise Faltung	875
11.5 Fourier-Analyse instationärer Signale	877
11.5.1 Zeitabhängige Fourier-Analyse von Sprachsignalen	878
11.5.2 Zeitabhängige Fourier-Analyse von Radarsignalen	881
11.6 Fourier-Analyse stationärer Zufallssignale: Das Periodogramm	886
11.6.1 Das Periodogramm	887
11.6.2 Eigenschaften des Periodogramms	889
11.6.3 Periodogrammmittelung	893
11.6.4 DFT-Berechnung des gemittelten Periodogramms	896
11.6.5 Ein Beispiel für die Periodogrammanalyse	897
11.7 Spektrale Analyse mit Hilfe von Autokorrelationsfolgen	900
11.7.1 DFT-Schätzungen des Leistungsdichtespektrums und der Autokorrelationsfolge	904
11.7.2 Beispiel einer Leistungsdichtespektrumschätzung	907
11.8 Zusammenfassung	913
Aufgaben	916
 12 Cepstral-Analyse und Homomorphe Entfaltung	 933
12.1 Definition des komplexen Cepstrums	934
12.2 Homomorphe Entfaltung	936
12.2.1 Verallgemeinerte Superposition	936
12.2.2 Das charakteristische System für die Faltung	938
12.2.3 Die Entfaltung	940
12.3 Eigenschaften des komplexen Logarithmus	941
12.4 Alternative Ausdrücke für das komplexe Cepstrum	944
12.5 Das komplexe Cepstrum von Exponentialfolgen	946
12.6 Minimalphasige und maximalphasige Folgen	948
12.6.1 Hilbert-Transformations-Beziehungen	949
12.6.2 Phasenminimum-/Allpaßsystem-Zerlegung	951
12.6.3 Rekursive Realisierung von D_*	953
12.6.4 Zerlegung in minimal- und maximalphasige Anteile	954
12.7 Realisierungen des charakteristischen Systems $D_*[z]$	956
12.7.1 Mit Hilfe des komplexen Logarithmus	956
12.7.2 Mit Hilfe der Ableitung des Logarithmus	961
12.7.3 Minimalphasige Realisierungen	964
12.7.4 Polynomiale Nullstellenbestimmung	965
12.7.5 Der Vorteil einer exponentiellen Gewichtung	965

12.8	Beispiele zur homomorphen Filterung	967
12.8.1	Das Signalmodell	968
12.8.2	Analytische Berechnung des komplexen Cepstrums	971
12.8.3	Berechnung des Cepstrums mit Hilfe der DFT	974
12.8.4	Homomorphe Filterung	979
12.8.5	Minimalphasige Zerlegung	983
12.8.6	Verallgemeinerungen	987
12.9	Anwendung bei der Sprachsignalverarbeitung	989
12.9.1	Das Sprachsignalmodell	989
12.9.2	Ein Beispiel zur homomorphen Entfaltung	993
12.9.3	Schätzung der Parameter eines Sprachsignalmodells	994
12.9.4	Anwendungen	1000
12.10	Zusammenfassung	1000
	Aufgaben	1002
A	Stochastische Signale	1017
1.1	Zeitdiskrete stochastische Prozesse	1017
1.2	Durchschnittswerte oder Momente	1019
1.2.1	Definitionen	1019
1.2.2	Zeitmittelwerte	1023
1.2.3	Eigenschaften der Korrelations- und Kovarianzfolgen	1024
1.3	Transformationsdarstellungen von Zufallssignalen	1026
B	Zeitkontinuierliche Filter	1030
2.1	Butterworth-Tiefpaßfilter	1030
2.2	Tschebyscheff-Filter	1031
2.3	Elliptische Filter	1034
	Literatur	1037
	Sachregister	1055

Vorwort

Dieses Buch verdankt sein Entstehen dem vor einigen Jahren gefaßten Gedanken der Überarbeitung und Aktualisierung unserer früheren Abhandlung: *Digital Signal Processing*, die 1975 veröffentlicht wurde. Ihre hohen Auflagenziffern bescheinigen das außerordentliche Interesse an dem Thema sowie die Bedeutung der Signalverarbeitung. Natürlich wird das Thema weiterhin in dem Maße an Bedeutung gewinnen, wie sich die zur Verfügung stehenden Technologien zur Implementierung der zeitdiskreten Signalverarbeitung weiter entwickeln. Schon bald nach Beginn der Überarbeitung erkannten wir, daß es zweckmäßiger wäre, ein neues Lehrbuch zu erstellen, das auf unserem ersten Werk basiert, und gleichzeitig dieses weiterhin zur Verfügung zu haben.

Der Titel *Discrete-Time Signal Processing* wurde aus mehreren Gründen für das neue Buch gewählt. In der Mitte der sechziger Jahre kam die digitale Signalverarbeitung als neuer Zweig der Signalverarbeitung auf, gefördert durch die Möglichkeit von Echtzeit-Signalverarbeitung mit Hilfe digitaler Rechenanlagen. Der Terminus *digitale Signalverarbeitung (digital signal processing)* bezieht sich besonders auf die Verarbeitung auf der Grundlage der digitalen Technologien, was sowohl eine Zeit als auch eine Amplitudenquantisierung beinhaltet. Dennoch ist der eigentlich prinzipielle Gesichtspunkt nach Meinung aller Buchautoren für digitale Signalverarbeitung in der Quantisierung der Zeit, — d. h. der zeitdiskreten Eigenschaft der Signale — zu sehen. Viele Signalverarbeitungstechniken (charge transport devices, switched capacitor filters) sind zwar zeitdiskret, aber nicht digital. Die Signalwerte werden getaktet abgetastet und die Zeitachse wird diskretisiert, aber die Signalamplitude wird weiterhin als eine analoge Größe betrachtet.

Als in der Mitte der siebziger Jahre das Buch "Digital Signal Processing" veröffentlicht wurde, fanden nur an wenigen Hochschulen Vorlesungen über digitale und zeitdiskrete Signalverarbeitung statt und diese richteten sich auch nur an graduierte Studenten. Inzwischen werden die grundlegenden Zusammenhänge schon am Anfang des Studiums gelehrt; manchmal sind sie sogar Bestandteil einer ersten Vorlesung über lineare Systeme. Ebenso werden wichtige Prinzipien auf einem etwas höheren Niveau gegen Ende des Grundstudiums gebracht. Viele unserer Überlegungen bei der Planung des neuen Buches betrafen die Bedeutung der diskreten Signalverarbeitung für die unteren Ausbildungsstufen. Die entsprechenden Abschnitte im neuen Buch werden daher deutlich erweitert und es wurden auch die linearen Systeme, die Abtastung, die Multirate-Signalverarbeitung, einige Anwendungsbeispiele und die Spektralanalyse eingeschlossen. Außerdem wurde eine große Anzahl weiterer Beispiele zur Vertiefung und Erläuterung wichtiger Konzepte zugefügt. Das neue Buch enthält so eine reichliche Auswahl von über 400 Aufgaben, deren Lösungsbuch für Kursleiter erhältlich ist. Es wird vorausgesetzt, daß der Leser über ein fortgeschrittenes mathematisches Hintergrundwissen verfügt, das die komplexe Arithmetik, die lineare Systemtheorie für kontinuierliche Signale und die Laplace- und Fourier-Transformation einschließt, alles das, was in

den meisten ingenieurwissenschaftlichen Lehrbüchern enthalten ist. Mit diesen Grundlagen kann der gesamte Inhalt des Buches verstanden werden. Es werden beispielsweise keine Kenntnisse über diskrete Zeitsignale, die z -Transformation oder die diskrete Fourier-Transformation vorausgesetzt. In den letzten Abschnitten mancher Kapitel sind einige Themen wie das Quantisierungsrauschen erwähnt, die Grundlagen über stochastische Signale voraussetzen. Ein kurzer Überblick über diese benötigten Grundlagen ist im Anhang A zu finden.

Es ist inzwischen in vielen Signalverarbeitungskursen üblich, Übungen vorzulegen, die mit einem Rechner gelöst werden sollen. Viele der Aufgaben aus dem vorliegenden Buch können ebenfalls leicht in Aufgaben umgewandelt werden, die mit Hilfe eines Rechners zu lösen sind. Mit einer oder zwei Ausnahmen haben wir absichtlich vermieden, Software bereitzustellen, mit denen Algorithmen implementiert werden können, die in dem Buch beschrieben sind. Hierfür gibt es verschiedene Gründe. Zuerst einmal sind für jeden bekannten Personalcomputer und jede Workstation eine Menge von preiswerten Programmpaketen für die Signalverarbeitung verfügbar. Diese Programmpakete sind gut dokumentiert, bieten eine exzellente technische Unterstützung und besitzen, zumindest einige, auch eine hervorragende Benutzerschnittstelle, die den Studenten die Bedienung erleichtert. Weiterhin werden sie kontinuierlich weiterentwickelt, was eine regelmäßigen Überarbeitung und Aktualisierung der vorhandenen Schulungspakete bewirkt. Obwohl wir sicherlich alle eine Lieblingssoftware haben, wird sie sich im Laufe der Zeit ändern, und daher bevorzugen wir hier diejenigen rechnerorientierten Aufgaben, die unabhängig von speziellen Software-Systemen oder Herstellern sind. Gelegentlich haben wir FORTRAN-Programme verwendet, um bestimmte Punkte zu veranschaulichen. Das geschah wegen der leichten Lesbarkeit von FORTRAN und soll nicht bedeuten, daß wir unbedingt ihren Einsatz in der Forschung oder bei technischen Anwendungen empfehlen wollten. Obwohl FORTRAN häufig ineffizient für die Implementierung eines Algorithmus ist, kann sie eine brauchbare Sprache zur Übermittlung der Struktur einer Rechenvorschrift sein.

Der Stoff in diesem Buch ist in einer solchen Art und Weise geordnet, daß eine beträchtliche Flexibilität, in allen Ausbildungsstufen, d. h. für Anfänger und Fortgeschrittene, entsteht. Eine typische einsemestrige Grundausbildung könnte die Kapitel 2, Abschnitt 2.0-2.9; Kapitel 3, Abschnitt 3.0-3.6; Kapitel 4; Kapitel 5, Abschnitt 5.0-5.3; Kapitel 6, Abschnitt 6.0-6.5; Kapitel 7, Abschnitt 7.0-7.2 und Abschnitt 7.4-7.5 eingehend behandeln. Sollten die Studenten bereits in einem allgemeinen Signal- und Systemtheoriekurs die zeitdiskreten Systeme und Signale kennengelernt haben, ist es möglich, die Kapitel 2, 3 und 4 schneller zu durchlaufen und die gewonnene Zeit für das Kapitel 8 aufzuwenden. Ein einsemestriger Kurs in höheren Semestern könnte sich mit den schon genannten Kapiteln sowie den verbleibenden Abschnitten im 5. Kapitel, einem kurzen Ausblick über praktische Gesichtspunkte in den Abschnitten 3.0, 6.7-6.10, einer Bearbeitung von optimalen FIR-Filtern, wie

sie im Abschnitt 7.6 und 7.7 enthalten sind, und einer Erörterung der diskreten Fourier-Transformation (DFT, Kapitel 8) sowie deren Berechnung mit Hilfe der FFT (Kapitel 9) beschäftigen. Die Betrachtung der DFT kann durch viele Beispiele aus dem Kapitel 11 ergänzt werden. In einem zweisemestrigen Kurs könnte der gesamte Text zusammen mit einer Anzahl aktueller Themen behandelt werden.

In Kapitel 2 stellen wir die grundsätzlichen Klassen der zeitdiskreten Signale und Systeme vor und definieren grundlegende Systemeigenschaften wie Linearität, Zeitinvarianz, Stabilität und Kausalität. Der Schwerpunkt in diesem Buch liegt auf den linearen zeitinvarianten Systemen, da zum Entwurf und zur Analyse dieser Systeme eine große Anzahl von Hilfsmitteln zur Verfügung steht. In Kapitel 2 entwickeln wir im besonderen die Zeitbereichsdarstellung der linearen zeitinvarianten Systeme durch die Faltungssumme und führen die Klasse der linearen zeitinvarianten Systeme ein, die durch lineare Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden können. In Kapitel 6 werden wir diese Systemklasse ausführlicher behandeln. Weiterhin enthält das 2. Kapitel eine Einführung in die Frequenzbereichsdarstellung von Signalen und Systemen mit Hilfe der Fourier-Transformation. Besonderes Gewicht wird in diesem Kapitel auf die Darstellung von Zahlenfolgen durch Terme der Fourier-Transformation gelegt, d. h. durch eine Linearkombination von komplexen Exponentialfunktionen, und auf die Entwicklung der grundsätzlichen Eigenschaften der Fourier-Transformation. Die detaillierte Diskussion der Analyse von linearen zeitinvarianten Systemen mit Hilfe der Fourier-Transformation wird bis zum Kapitel 5 verschoben.

In Kapitel 3 erarbeiten wir detailliert den Zusammenhang zwischen zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Signalen, wenn diese zeitdiskreten Signale durch die Abtastung von zeitkontinuierlichen Signalen entstanden sind. Dies beinhaltet auch die Beschäftigung mit dem Nyquist-Abtasttheorem. Weiterhin betrachten wir die „Hoch- und Herunterabtastung“ von zeitdiskreten Signalen, wie sie beispielsweise in „multirate“ Signalverarbeitungssystemen und zur Abstratenwandlung eingesetzt werden. Das Kapitel schließt mit praktischen Vorschlägen zur Umwandlung von zeitkontinuierlichen Signalen in zeitdiskrete Signale unter Berücksichtigung einer Vorfilterung zur Vermeidung von „Aliasing“, und einer Modellierung der Effekte, die bei einer Amplitudenquantisierung entstehen, wenn zeitdiskrete Signale digital dargestellt werden.

In Kapitel 4 wird die z -Transformation als eine Verallgemeinerung der Fourier-Transformation vorgestellt. In Kapitel 5 wird ausführlich beschrieben, wie die Fourier-Transformation und die z -Transformation zur Analyse und zur Darstellung von linearen zeitinvarianten Systemen eingesetzt werden können. Im besonderen definieren wir in Kapitel 5 die Klasse der idealen frequenzselektiven Filter und entwickeln die Systemfunktionen und die Pol-/Nullstellendiagramme für Systeme, die durch lineare Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden können. Die Realisierung dieser Systemklasse wird eingehend in Kapitel 6 beschrieben. Weiterhin definieren und behandeln wir in Kapitel 5 die Gruppenlaufzeit, Pha-

senantwort und die Phasenverzerrung sowie die Beziehungen zwischen dem Amplituden- und Phasengang eines Systems. Hier werden alle wichtigen Systeme wie Minimalphasensysteme, Allpaßsysteme und Systeme mit einer verallgemeinerten linearen Phase behandelt.

In Kapitel 6 beschäftigen wir uns besonders mit den Systemen, die durch lineare Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden und entwickeln deren Darstellung mit Hilfe von Blockdiagrammen und linearen Signalflußgraphen. Große Teile dieses Kapitels beschäftigen sich mit dem Entwurf diverser wichtiger Systemstrukturen und dem Vergleich ihrer Eigenschaften. Die Bedeutung dieser Diskussion und die Mannigfaltigkeit der Filterstrukturen hängen damit zusammen, daß bei einer praktischen Realisierung eines zeitdiskreten Systems die Auswirkungen der Koeffizientenungenauigkeit und der Rechenfehler stark von der verwendeten Struktur abhängig sind. Da sich die grundsätzlichen Gesichtspunkte bei der Implementierung von digitalen oder zeitdiskreten analogen Systemen ähneln, haben wir sie in diesem Kapitel im Zusammenhang mit einer digitalen Realisierung beschrieben, wobei die Auswirkungen der Koeffizientenquantisierung und der arithmetischen Rundungsfehler in digitalen Filtern betrachtet werden.

Während Kapitel 6 die Darstellung und Realisierung linearer Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten beinhaltet, befaßt sich das Kapitel 7 mit der Diskussion der Verfahren, mit denen man die Koeffizienten dieser Klasse von Differenzgleichungen bestimmt, um eine gewünschte Systemantwort zu approximieren. Die Entwurfstechniken sind getrennt in Entwurfsverfahren für rekursive Digitalfilter (infinite impulse response, IIR) und nichtrekursive Digitalfilter (finite impulse response, FIR).

In der zeitkontinuierlichen Systemtheorie ist die Fourier-Transformation in erster Linie ein analytisches Werkzeug zur Darstellung von Systemen und Signalen. Im Gegensatz dazu verlangen im zeitdiskreten Fall viele Signalverarbeitungssysteme und Algorithmen die explizite Berechnung der Fourier-Transformation. Da die Fourier-Transformation selbst nicht berechnet werden kann, wird ihre Abtastversion, die diskrete Fourier-Transformation (DFT) berechnet. Für Signalfolgen begrenzter Länge ist die DFT eine vollständige Fourier-Darstellung des Signals. In Kapitel 8 wird eine Einführung in die diskrete Fourier-Transformation und ihre Eigenschaften gegeben, und der Zusammenhang mit der zeitdiskreten Fourier-Transformation wird bis in Einzelheiten erklärt. In Kapitel 9 wird eine reiche und wichtige Vielfalt von Algorithmen zur Berechnung und Erzeugung der diskreten Fourier-Transformation eingeführt und diskutiert, einschließlich des Goertzel-Algorithmus, der "fast Fourier transform" (FFT) und der Chirp-Transformation.

In Kapitel 10 geben wir eine Einführung in die diskrete Hilbert-Transformation. Diese Transformation kommt in verschiedenen praktischen Anwendungen vor, wie bei der inversen Filterung, der komplexen Darstellung bei reellen Bandpaßsignalen, Einseitenbandmodulationstechniken und vieles andere. Sie hat ebenfalls eine besondere Bedeutung für die Klasse der Signal-

verarbeitungstechniken, die man mit Cepstrum-Analyse und homomorphe Signalverarbeitung (Kapitel 12) bezeichnet.

Mit dem Hintergrundwissen, das in den vorangegangenen Kapiteln und aus Teilen der Kapitel 2, 3, 5 und 8 erarbeitet wurde, beschäftigen wir uns in Kapitel 11 mit der Fourier-Analyse von Signalen, die mit Hilfe der diskreten Fourier-Transformation durchgeführt wird. Ohne ein genaues Verständnis der Eigenschaften und der Unterschiede zwischen der DFT und der Fourier-Transformation kann in der praktischen Anwendung der Signalanalyse der Gebrauch der DFT häufig zu Verwirrungen und falschen Auslegungen führen. Wir werden in Kapitel 11 eine Reihe solcher Fehler betrachten. In einer gewissen Ausführlichkeit werden wir auch die Fourier-Analyse von Signalen mit zeitvarianten Charakteristika mittels der zeitabhängigen Fourier-Transformation betrachten.

In Kapitel 12 führen wir eine neue Klasse von Signalverarbeitungstechniken ein, die als Cepstral-Analyse und homomorphe Signalverarbeitung bekannt sind. Diese Techniken basieren, obwohl sie nichtlinear sind, auf einer Verallgemeinerung linearer Techniken, wie sie in vorangegangenen Kapiteln des Buches behandelt wurden.

Während wir dieses Buch schrieben, waren wir über die wertvolle Unterstützung, die Vorschläge und die Hilfe, die uns von vielen Kollegen, Studenten und Freunden zuteil wurden, sehr froh. Über die Jahre hinweg haben einige unserer Kollegen am MIT und am Georgia Institute of Technology mit uns die diskrete Signalverarbeitung gelehrt und ihre Sichtweise und Vorschläge sind für uns sehr nützlich gewesen. Es waren die Professoren Jae Lim, Bruce Musicus und Victor Zue am MIT sowie die Professoren Tom Barnell, Mark Clements, Monty Hayes, Jim McClellan, Russ Mersereau, David Schwartz und Mark Smith am Georgia Institute of Technology (Georgia Tech.). Die Professoren McClellan und Zue zusammen mit Jim Glass vom MIT halfen uns auch einige der Abbildungen dieses Buches vorzubereiten.

Bei der Ausarbeitung und Auswahl einer brauchbaren und vollständigen Hausaufgabenammlung für dieses Buch halfen uns einige Studenten sehr durch Vorsortierung, Gruppeneinteilung und durch kritische Betrachtung der Auswahl möglicher Hausaufgaben, die wir über Jahre gesammelt hatten. Insbesondere möchten wir Joseph Bondaryk, Dan Cobra und Rosalind Wright unseren Dank aussprechen für ihre unentbehrliche Hilfe bei dieser Aufgabe wie auch für ihre weitere Hilfe bei einer Vielzahl von anderen Notwendigkeiten, wie der Abbildungsvorbereitung und des Korrekturlesens.

Die späteren Stadien der Fertigstellung eines Buches verlangen die zeitaufwendige und oft mühsame Arbeit des Korrekturlesens und der genauen Durchsicht und Korrektur der Fahnenabzüge, ebenso wie die Suche nach Fehlern und Auslassungen auf den Seiten und schließlich den Verbesserungen in letzter Sekunde. Wir hatten das ungeheure Glück, eine lange Liste von freiwilligen Helfern zu haben, die uns bei diesem Teil der Arbeit unterstützten. Beim MIT waren es Hiroshi Miyanaga und Patrik Velardo, die einen großen Teil der Fahnenkorrekturen und Seitenüberprüfungen mit außergewöhnlicher Sorgfalt

und Hingabe durchführten. Unserer weiterer Dank gilt den MIT Studenten Larry Candell und Avi Lele für das peinlich genaue Lesen vieler Kapitel der Seitenabzüge und Michele Covell, Lee Hetherington, Paul Hillner, Tae Joo, Armando Rodriguez, Paul Shen und Gregory Wornell für ihre Hilfe bei den Fahnenkorrekturen. In ähnlicher Weise bedanken wir uns bei den Georgia Tech. Studenten Robert Bamberger, Jae Chung, Larry Heck und David Pepper für ihr sorgfältiges Lesen der Seitenkorrekturen. Cheung Au-Yeung, Beth Carlson, Kate Cummings, Brian George, Lois Hertz, David Mazel, Doug Reynolds, Craig Richardson, Janet Rutledge und Kevin Tracy gaben wertvolle Hilfen bei der Bearbeitung der Fahnenkorrekturen. Wir sind allen unseren Studenten für ihre wertvolle und aufmerksamen Vorschläge dankbar.

Auch möchten wir Monica Dove und Deborah Gage vom MIT und Charri Dunn, Kayron Gilstrap, Pam Major und Stacy Schultz vom Georgia Tech. unseren Dank aussprechen für das Tippen verschiedener Teile des Manuskriptes und für ihre Hilfe bei der unglaublich langen Liste von Details, mit denen man sich bei der Herausgabe eines Lehrbuches beschäftigen muß. Wir sind besonders Barbara Flanagan verpflichtet, die als Lektorin tätig war. Barbaras Perfektion und ihre peinlich genaue Aufmerksamkeit für Details haben deutlich zur Qualität des Endproduktes beigetragen. Ebenso möchten wir unsere Anerkennung gegenüber Vivian Berman, einer Künstlerin und Freundin, ausdrücken, die uns bei der Sichtung der vielen Ideen für den Buchumschlag zur Seite stand.

Das MIT und das Georgia Tech. waren eine inspirierende Umgebung für unsere Forschung und Lehre während eines großen Teils unseres beruflichen Lebens. Diese Hochschulen haben uns sehr durch ihr Engagement und ihre Hilfe bei dem Projekt unterstützt. R.W. Schafer möchte sich besonders bei der John und Mary Franklin Stiftung für die vielen Jahre der Unterstützung durch den "John O. McCarty/Audichron Chair" bedanken.

Ein großer Teil des Buchinhalts und seiner Gliederung entstand während des Sommers 1985, als wir beide Gäste des Ocean Engineering Department bei der Woods Hole Oceanographic Institution waren, und wir möchten uns nochmals für die Gastfreundschaft bedanken. A.V. Oppenheim bedankt sich noch besonders bei der Woods Hole Oceanographic Institution und bei unseren Freunden und Sommernachbarn Wares und Voses von Gansett Point für die außergewöhnlich erfrischende, produktive und angenehme Sommerumgebung seit dem Jahr 1978.

Wir sind sehr glücklich, gerade mit Prentice Hall bei diesem Projekt zusammengearbeitet zu haben. Unser Verhältnis zu Prentice Hall besteht seit vielen Jahren und es wurden schon viele Projekte bearbeitet. Die Ermutigung und Unterstützung, wie sie durch Tim Bozik, Hank Kennedy und vielen anderen Mitarbeitern bei Prentice Hall gezeigt wurden, verstärkte die Freude am Schreiben und Vervollständigen eines Werkes wie diesem.

*Alan V. Oppenheim
Ronald W. Schafer*

1 Einführung

Signale werden für die Kommunikation zwischen den Menschen und für die Kommunikation zwischen Menschen und Maschinen eingesetzt. Sie werden eingesetzt, um unsere Umgebung zu untersuchen, um Details von Strukturen aufzudecken und um Nichtbeobachtbares darzustellen. Sie werden ebenso eingesetzt, um Energie und Information nutzbar und steuerbar zu machen. Signalverarbeitung ist fest mit der Darstellung, Transformation und der Manipulation von Signalen verbunden und der darin enthaltenen Information. Beispielsweise möchten wir vielleicht zwei oder mehr Signale, die irgendwie miteinander verbunden sind, trennen oder einige Komponenten oder Parameter in einem Signal verstärken. Viele Jahrzehnte lang spielte die Signalverarbeitung eine Hauptrolle auf den Gebieten der Sprach- und Datenkommunikation, der biomedizinischen Ingenieurwissenschaften, der Akustik, der Sonarwissenschaft, der Radartechnik, Seismologie, der Ölsuche, der Instrumententechnik, in der Robotik, der Konsumelektronik und vielen anderen.

Anspruchsvolle Signalverarbeitungsalgorithmen und Geräte sind in einer großen Palette von Systemen verbreitet. Diese reicht von hochentwickelten militärischen Geräten, über industrielle Anwendungen bis hin zu preiswerten Massenkonsumartikeln. Obwohl wir die Leistungen unserer häuslichen Unterhaltungsgeräte, wie Fernseher und Stereo-Anlage für selbstverständlich betrachten, arbeiten diese Geräte immer an der Grenze der gerade technisch machbaren Signalverarbeitung. Ein anderes Beispiel ist die Spracherzeugung, die sich ihren Weg mit Hilfe der automatischen Sprachantwortsysteme und Gebrauchsartikel, wie lernende Werk- und Spielzeuge bahnte, und dabei einen verblüffenden Weg von der Forschungsliteratur zu Realisierungen im militärischen und industriellen Bereich und im Bereich der Konsumartikel gefunden hat.

Das Feld der Signalverarbeitung profitierte immer durch die starke Kopplung zwischen der Theorie, der Anwendung und der Technologie der Implementierung von Signalverarbeitungssystemen. Vor 1960 stützte sich die Technik der Signalverarbeitung fast ausschließlich auf zeitkontinuierliche und analoge Systeme[†]. Die rasante Fortentwicklung der Digitalrechner und Mikroprozessoren, sowie die Entwicklung wichtiger theoretischer Grundlagen waren der Hauptgrund für den Wechsel hin zu digitalen Techniken, und dem damit verbundenen Aufschwung der digitalen Signalverarbeitung. Ein fundamentaler Aspekt der digitalen Signalverarbeitung ist der, daß sie auf der Verarbeitung von Abtastwert-Sequenzen beruht. Diese zeitdiskrete Eigenschaft

[†] In allgemeinen Kontexten beziehen wir uns für unabhängige Variablen auf die „Zeit“ ebenso wie in den Kontexten, in denen die unabhängigen Variablen aus einer breiten Palette anderer Dimensionen stammen können. Entsprechend können daher kontinuierliche Zeiten und diskrete Zeiten als Ersatz für irgend eine andere kontinuierliche oder diskrete Variable vorkommen.

der digitalen Signalverarbeitungstechniken ist auch für andere Signalverarbeitungstechniken wie Oberflächen-Wellenfilter (*“surface acoustic wave“* SAW), ladungsgekoppelte Elemente (*“charge-coupled devices“* CCD) und Verfahren mit geschalteten Kapazitäten (*“switched capacitor“*) charakteristisch. Bei der digitalen Signalverarbeitung werden die Signale durch eine Folge von Zahlen endlicher Genauigkeit dargestellt, und die Verarbeitung wird durch den Einsatz eines Digitalrechners erreicht. Die allgemeinere Bezeichnung *zeitdiskrete Signalverarbeitung* schließt die digitale Signalverarbeitung als einen speziellen Fall ein, erlaubt aber die Möglichkeit, auch eine Abtastfolge mit anderen Signalverarbeitungstechniken zu bearbeiten. In vielen Fällen ist die genaue Unterscheidung zwischen den Bezeichnungen „digitale Signalverarbeitung“ und „zeitdiskrete Signalverarbeitung“ von geringer Bedeutung, da in beiden Fällen mit zeitdiskreten Signalen gearbeitet wird.

Obwohl es viele Beispiele gibt, in denen die zu verarbeitenden Signale wirkliche Sequenzen sind, wird in den meisten Anwendungen die zeitdiskrete Technik verwendet, um zeitkontinuierliche Signale zu verarbeiten. In diesen Fällen wird das zeitkontinuierliche Signal in eine Folge von Abtastwerten, also in ein zeitdiskretes Signal umgewandelt. Nach einer zeitdiskreten Verarbeitung wird dann die Ausgangsfolge wieder in ein zeitkontinuierliches Signal umgewandelt. Hierfür wird oft eine Echtzeitverarbeitung gewünscht. Damit ist gemeint, daß das zeitdiskrete System so implementiert ist, daß das berechnete Ausgangssignal mit der gleichen Rate ausgegeben wird, mit der das Eingangssignal abgetastet wird. Zeitdiskrete Verarbeitung von zeitkontinuierlichen Signalen wird bereits regelmäßig eingesetzt in Kommunikationssystemen, Radar- und Sonaranlagen, Sprach- und Bildcodierung und in biomedizinischen Ingenieurbereichen, um nur ein paar Gebiete zu nennen. Vieles in der traditionellen Signalverarbeitung zielt darauf ab, ein Signal zu bearbeiten, um ein anderes zu erhalten.

Ein anderes wichtiges Gebiet der Signalverarbeitung ist die *Signalinterpretation*. In diesem Fall ist der Grund für die Verarbeitung nicht der, ein Ausgangssignal aus einem Eingangssignal zu erhalten, sondern die Charakteristika eines Eingangssignals zu erkennen. Beispielsweise ist es in einem Spracherkennungs- bzw. Sprachverständnissystem wichtig, das Eingangssignal zu interpretieren bzw. die Information zu extrahieren. Typischerweise wird man ein solches System nach einer Vorverarbeitung (Filterung, Parameterschätzung), gefolgt von einem Mustererkennungssystem einsetzen, um eine symbolische Darstellung zu erzeugen, wie es die Lautschrift, d. h. eine phonetische Beschreibung der Sprache ist. Dieses symbolische Ausgangssignal kann als Eingangssignal in ein Symbolverarbeitungssystem, z. B. in ein regelbasiertes Expertensystem, gegeben werden, um die letztendlich gewünschte Interpretation zu extrahieren. Eine weitere und relativ neue Kategorie der Signalverarbeitung ist die symbolische Manipulation von Signalverarbeitungsausdrücken. Diese Form der Verarbeitung ist besonders in Signalverarbeitungs-„Workstations“ und bei dem CAD-Entwurf von Signalverarbeitungssystemen anwendbar (CAD = computer-aided design). Hierbei werden die Signale und

Systeme durch abstrakte Datenobjekte dargestellt und manipuliert. Objektorientierte Programmiersprachen wie LISP stellen eine geeignete Umgebung zur Manipulation von System, Signalen und Signalverarbeitungsausdrücken dar, da keine explizite Berechnung der Datenfolgen vorgenommen wird, und bilden so die Basis für diese Form der Verarbeitung. Die Weiterentwicklung von Systemen, die zur Verarbeitung von Signalbeschreibungen entworfen werden, wird direkt durch die Verbindung von fundamentalen Signalverarbeitungs-konzepten, Theoremen und Eigenschaften, wie sie für dieses Buch die Grundlage bilden, beeinflusst. Beispielsweise kann eine Entwurfsumgebung, die die Eigenschaft berücksichtigt, daß die Faltung im Zeitbereich der Multiplikation im Frequenzbereich entspricht, eine Menge Umstrukturierungen in Filterentwürfen aufklären einschließlich derer, die durch den direkten Einsatz der diskreten Fourier-Transformation und der FFT-Algorithmen entstehen. In gleicher Weise können Entwurfsumgebungen, die den Zusammenhang zwischen Abtastrate und Aliasing berücksichtigen, vorteilhaft Gebrauch von den "Dezimations"- und "Interpolations"- Strategien für die Filterimplementierung machen. Die Entwicklung von objektorientierten Umgebungen für den CAD System-Entwurf steckt noch in den Kinderschuhen und eine detaillierte Diskussion dieser Thematik übersteigt den Rahmen dieses Lehrbuches. Dennoch ist es wichtig zu erkennen, daß die grundlegenden Konzepte, die Inhalt dieses Buches sind, nicht als reine Theorien betrachtet werden dürfen. Sie werden sehr wahrscheinlich zu einem festen Bestandteil der CAD-Entwicklungsumgebungen und -Workstations für Signalverarbeitungssysteme werden.

Signalverarbeitungsmethoden sind selbstverständlich nicht auf eindimensionale Signale beschränkt. Obwohl einige fundamentale Unterschiede zwischen den Theorien für ein- und mehrdimensionale Signalverarbeitungen bestehen, hat ein großer Teil des Stoffes, den wir in diesem Lehrbuch besprechen, ein direktes Gegenstück in mehrdimensionalen Systemen. Die Theorie mehrdimensionaler Signale ist detailliert in Dudgeon und Mersereau (1983) und Lim (1989) dargelegt¹. Viele Bildverarbeitungsanwendungen verlangen zweidimensionale Signalverarbeitungstechniken. Dies ist bei der Bildcodierung, medizinischen Bildern, der Vergrößerung und Analyse von Luftaufnahmen, der Analyse von Wettersatellitenfotos und der Verbesserung von Videoübertragungen vom Mond oder von Raumfahrtsonden nötig. Anwendungen von mehrdimensionalen digitalen Signalverarbeitungstechniken für die Bildverarbeitung werden in Andrews und Hunt (1977), Castleman (1979), Pratt (1978) und Macovski (1983) behandelt. Die Analyse seismischer Daten, die für Ölfelderkundungen, Erdbebenmessungen und die Beobachtung nuklearer Tests erforderlich ist, benötigt ebenfalls mehrdimensionale Signalverarbeitungstechniken. Seismische Anwendungen werden in Robinson und Treitel (1980) sowie Robinson und Durrani (1985) näher behandelt.

¹ Namen von Autoren und Erscheinungsjahre werden in diesem Buch durchgehend dazu verwendet, um auf Bücher und Artikel zu verweisen, die im Literaturverzeichnis am Ende dieses Buches aufgeführt sind.

Die mehrdimensionale Signalverarbeitung ist nur eine von vielen fortgeschrittenen und spezialisierten Schwerpunkten, die auf den in diesem Buch enthaltenen Fundamenten aufbauen. Die Spektralanalyse, die auf der diskreten Fourier-Transformation aufbaut und der Einsatz von Signalmodellierungen ist ein weiterer, besonders vielfältiger und wichtiger Aspekt der Signalverarbeitung. Wir führen in viele Facetten dieses Gebietes ein, beschränken uns jedoch auf die grundsätzlichen Konzepte und Techniken, die sich auf den Einsatz der diskreten Fourier-Transformation beziehen. Als Ergänzung zu diesen Techniken beziehen sich eine Menge anderer Spektralanalyse-Methoden in der einen oder anderen Weise auf spezielle Signalmodelle. Beispielsweise gibt es eine Klasse von hochauflösenden Spektralanalyseverfahren die als Verfahren der maximalen Entropie (MEM maximum entropy method spectral analysis) bezeichnet werden, die auf der Analysedarstellung des Signals als Antwort eines zeitdiskreten, linearen zeitinvarianten Filters auf eine Anregung mit einem kurzen Impuls oder mit weißem Rauschen aufbaut. Die Spektralanalyse beruht auf einer Schätzung der Parameter (also der Koeffizienten der Differenzgleichung) des Systems und der Berechnung des Quadrats der Amplitude der Übertragungsfunktion des Modellfilters. Eine durchgehende und genaue Beschreibung der Methoden und Techniken dieses Ansatzes für die Signalmodellierung und Spektralanalyse baut direkt auf den Beschreibungen in diesem Text auf. Detaillierte Beschreibungen können in Kay (1988) und Marple (1987) nachgelesen werden.

Die Signalmodellierung spielt ebenfalls bei der Datenkompression und Codierung eine wichtige Rolle, und auch hier bilden die Grundlagen der Differenzgleichungen die Basis für das Verständnis dieser Verfahren. Beispielsweise nutzt eine Klasse der Signalcodierungstechniken, bekannt als "linear predictive coding" (LPC), die Tatsache aus, daß, wenn ein Signal die Antwort eines gewissen linearen zeitdiskreten Filters ist, ein Signalwert zu jedem (diskreten) Zeitpunkt durch eine lineare Funktion aus den vorherigen (daher der Begriff "linear predictive") Signalwerten bestimmt werden kann. Daher kann eine effiziente Signalbeschreibung durch eine Schätzung dieser Vorhersageparameter und die Nutzung des Vorhersagefehlers zur Darstellung des Signals erreicht werden. Das Signal kann dann bei Bedarf mit Hilfe der Modellparameter rekonstruiert werden. Diese Klasse der Signalcodierungstechniken ist besonders geeignet für die Sprachcodierung und wurde sehr genau bei Jayant und Noll (1984), Markel und Gray (1976) und Rabiner und Schafer (1978) beschrieben.

Ein weiterer Schwerpunkt von beachtlicher Bedeutung ist die adaptive Signalverarbeitung. In diesem Buch werden fast ausschließlich die linearen zeitinvarianten Systeme betrachtet. Adaptive Systeme stellen einen speziellen Fall der zeitvarianten und in gewissem Sinn nichtlinearen Systeme dar. Sie haben breite Anwendung gefunden und es gibt erprobte und wirksame Techniken für ihren Entwurf und ihre Analyse. Wiederum bauen auch diese Techniken auf den Grundlagen der zeitdiskreten Signalverarbeitung auf.

Genauerer über die adaptive Signalverarbeitung ist bei Haykin (1986) und Widrow und Stearns (1985) zu finden.

Dies sollte nur einen kleinen Überblick über die fortgeschritteneren Techniken aufzeigen, die sich aus den Ansätzen dieses Buches ergeben. Weitere Themen, die hier behandelt werden, sind: spezialisierte Filterentwurfverfahren, eine Vielzahl von speziellen Algorithmen zur Berechnung der Fourier-Transformation, spezialisierte Filterstrukturen und verschiedene Multirate-Signalverarbeitungstechniken. Eine Einführung hierzu ist in Lim und Oppenheim (1988) enthalten.

Es wird oft gesagt, der Zweck eines grundlegenden Lehrbuches sollte sein, ein Thema eher unvollständig als vollständig zu behandeln, und durch die Auswahl der Themen sowie die Genauigkeit der Beschreibung in diesem Buch haben wir versucht, uns an eben diesen Ratschlag zu halten. Die obige kurze Vorstellung von fortgeschritteneren Verfahren und das Literaturverzeichnis am Ende dieses Buches sollten verdeutlichen, daß es eine reiche Vielfalt von weiterführenden Wegen gibt, die aber alle von den Grundlagen ausgehen, die hier beschrieben werden.

Historischer Überblick

Die Zeitdiskrete Signalverarbeitung hat schon eine richtige Geschichte. Sie hat sich über einen langen Zeitraum in recht unterschiedlich großen Schritten entwickelt. Seit der Erfindung der Differentialrechnung im 17. Jahrhundert haben Wissenschaftler und Ingenieure Modelle entwickelt, um physikalische Phänomene in Form von Funktionen kontinuierlicher Variablen und mit Differentialgleichungen darzustellen. Numerische Techniken wurden eingesetzt, sobald eine analytische Lösung dieser Gleichungen nicht mehr möglich war. Tatsächlich verwendete bereits Newton finite-Differenzen-Verfahren, die spezielle Fälle von einigen zeitdiskreten Systemen sind, wie sie in diesem Buch vorgestellt werden. Mathematiker des 18. Jahrhunderts - wie Euler, Bernoulli und Lagrange entwickelten Methoden zur numerischen Integration und Interpolation von Funktionen mit kontinuierlichen Variablen. Eine interessante historische Untersuchung von Heidemann, Johnson und Burrus (1984) zeigen, daß Gauß die fundamentalen Prinzipien der FFT (siehe Kapitel 9) um 1805 entdeckte noch bevor die Abhandlung von Fourier über die Darstellung von Funktionen durch harmonische Reihen veröffentlicht wurde. Bis zum Anfang der fünfziger Jahre wurde Signalverarbeitung, wie wir sie definiert haben, typischerweise mit analogen Systemen, bestehend aus elektronischen Stromkreisen, oder mit mechanischen Geräten durchgeführt. Auch als es möglich wurde, Digitalrechner in Büros und wissenschaftlichen Labors einzusetzen, waren diese noch sehr teuer und hatten relativ begrenzte Fähigkeiten. Etwa um diese Zeit führte die Notwendigkeit einer komplizierteren Signalverarbeitung in einigen Anwendungsgebieten zu einem beachtlichen Interesse an der zeitdiskreten Signalverarbeitung. Einen der ersten Einsätze digitaler Rechner für die

digitale Signalverarbeitungen findet man bei der Erdölsuche, wobei die seismischen Daten für eine spätere Verarbeitung auf Magnetbänder gespeichert werden konnten. Diese Art der Signalverarbeitung kann im allgemeinen nicht in Echtzeit durchgeführt werden. Oft werden Minuten oder Stunden Rechenzeit benötigt, um nur Sekunden des Vorganges zu bearbeiten. Dennoch war die Flexibilität der digitalen Rechenanlagen als Alternative außerordentlich einladend.

Zur gleichen Zeit bewegte sich der Einsatz der digitalen Rechenanlagen für die Signalverarbeitung in eine andere Richtung. Wegen der Flexibilität dieser Anlagen war es oft sehr nützlich, neue Signalverarbeitungssysteme zu simulieren, bevor sie als analoge Schaltung realisiert wurden. Auf diese Weise konnte ein neuer Signalverarbeitungsalgorithmus oder ein System in einer flexiblen Experimentalumgebung untersucht werden, bevor man an die wirtschaftliche und ingenieurmäßige Realisierung ging. Typische Beispiele solcher Simulationen waren die "Vocoder"-Simulationen beim "Lincoln Laboratory" und bei den "Bell Laboratories". Bei der Implementierung eines analogen Kanal-Vocoders beeinflusst z. B. die Filtercharakteristik oft die vom Menschen empfundene Qualität des codierten Sprachsignals in einer Weise, die eine objektive quantitative Beurteilung erschwert. Durch die Computer-Simulation konnten diese Filtercharakteristiken eingestellt werden, und die entstehende Qualität des Sprachcodierungssystems konnte ausgewertet und beurteilt werden, bevor die analogen Geräte gebaut wurden.

In allen genannten Beispielen des Einsatzes von Digitalrechnern haben diese eine vorher ungeahnte Flexibilität ermöglicht. Dennoch konnte die Verarbeitung nicht immer in Echtzeit erfolgen. Folglich war die überwiegende Meinung zu dieser Zeit, daß der Digitalrechner nur zur *Approximation* und *Simulation* eines analogen Signalverarbeitungssystem eingesetzt werden sollte. Deshalb bezogen sich die ersten Arbeiten über digitales Filtern darauf, wie man ein Filter auf einem Digitalrechner programmieren kann, damit nach einer Analog/Digital-Wandlung des Signals und einer digitalen Filterung mit anschließender Digital/Analog-Wandlung das gesamte System ein analoges Filter sehr gut approximieren kann. Die Erkenntnis, daß digitale Systeme für die Implementierung der Signalverarbeitung in der sprachlichen Kommunikation, beim Radar sowie in anderen Anwendungen tatsächlich praktisch sein könnten, erschien im höchsten Maße spekulativ. Geschwindigkeit, Kosten und Geräteabmessung waren natürlich die wichtigsten Faktoren, die für analoge Komponenten sprachen.

Solange die Signale auf digitalen Rechnern verarbeitet wurden, lag es natürlich nahe, Signalverarbeitungsalgorithmen mit zunehmender Komplexität auszuprobieren. Einige dieser Algorithmen waren nur wegen der Flexibilität der Digitalrechner möglich und konnten offensichtlich in analogen Geräten nicht mehr realisiert werden. Daher wurden viele dieser Algorithmen als interessante, aber etwas unpraktikable Ideen betrachtet. Ein Beispiel für diese Algorithmenklasse waren Verfahren, die man als Cepstrum-Analyse und homomorphe Filterung bezeichnete. Es konnte auf Rechenanlagen klar gezeigt

werden, daß diese Verfahren vorteilhaft zur Bandbreitenkompression, zur inversen Faltung und zur Echoentzerrung einsetzbar waren. Diese Verfahren verlangten eine explizite Berechnung der inversen Fourier-Transformation der logarithmierten Fourier-Transformierten des Eingangssignals. Die benötigte Genauigkeit und Auflösung der Fourier-Transformation waren so hoch, daß ein analoger Spektrumanalysator nicht eingesetzt werden konnte. Die Entwicklung solcher Signalverarbeitungsalgorithmen machte die Idee einer digitalen Gesamtlösung immer verlockender. Die ersten Arbeiten begannen mit der Untersuchung von digitalen Vocoder, digitalen Spektrumanalysatoren und anderen vollständig digitalen Systemen, in der Hoffnung, daß diese Systeme schließlich auch einmal praktisch durchführbar sein würden.

Die Entwicklung einer neuen Bewertung der zeitdiskreten Signalverarbeitung wurde weiter durch die Veröffentlichung eines effizienten Berechnungsalgorithmus von Cooley und Tukey (1965) für die Fourier-Transformation im Jahre 1965 gefördert. Dieser Algorithmus wurde bekannt als "fast Fourier transform" oder FFT. Die Entwicklung der FFT war aus verschiedenen Gründen bedeutend. Viele Signalverarbeitungsalgorithmen, die bis dahin für digitale Rechner entwickelt worden waren, erforderten eine Rechenzeit, die um mehrere Größenordnungen über der Echtzeit lagen. Dies war oft darauf zurückzuführen, daß eine wichtige Komponente bei der Signalverarbeitung die Spektralanalyse war und daß kein effizientes Verfahren für ihre Implementierung bekannt war. Die schnelle Fourier-Transformation (FFT) reduzierte die Rechenzeit um einige Größenordnungen. Dies erlaubte die Implementierung von immer komplexer werdenden Signalverarbeitungsalgorithmen mit Zeiten, die eine Interaktion mit dem angeschlossenen System zuließen. Weiterhin ließ die Erkenntnis, daß die FFT möglicherweise in speziellen Hardwarekomponenten unterzubringen war, viele Signalverarbeitungsalgorithmen, die vorher für die Praxis bedeutungslos schienen, wieder interessant werden.

Ein weiterer Aspekt der FFT war, daß sich in ihr ein zeitdiskretes Konzept verbirgt. Sie war auf die direkte Berechnung der Fourier-Transformierten eines zeitdiskreten Signals oder einer Signalfolge gerichtet, hatte es mit mathematischen Zusammenhängen zu tun, die im zeitdiskreten Bereich exakt waren - das heißt sie war nicht einfach eine Approximation einer zeitkontinuierlichen Fourier-Transformation. Diese Tatsache regte an, die meisten Signalverarbeitungskonzepte und Algorithmen mit Hilfe der zeitdiskreten Mathematik zu formulieren. Daraus ergab sich ein exakter Satz von Beziehungen im zeitdiskreten Bereich. Dies wiederum bedeutete die Abkehr von der Überzeugung, daß die Signalverarbeitung auf dem Digitalrechner nur eine Näherungsmethode für die analoge Signalverarbeitung sei. Damit entstand dann ein sehr großes Interesse für die zeitdiskrete Signalverarbeitung als eigenständiges und wichtiges Gebiet.

Ein weiterer große Entwicklungsschub in der Geschichte der zeitdiskreten Signalverarbeitung kam durch die Mikroelektronik zustande. Die Erfindung und Serienfertigung des Mikroprozessors ebnete den Weg für die Implementierung von preiswerten zeitdiskreten Signalverarbeitungssystemen. Obwohl

die ersten Mikroprozessoren zu langsam für eine Echtzeimentimentierung der meisten zeitdiskreten Signalverarbeitungssysteme war, hatte die Technologie der integrierten Schaltkreise in der Mitte der achtziger Jahre einen Punkt erreicht, der die Realisierung von sehr schnellen Signalprozessoren mit Festpunkt- und Gleitkommaarithmetik in einer speziell für zeitdiskrete Signalverarbeitungsalgorithmen angepaßten Architektur erlaubte. Mit dieser Technologie ergab sich zum ersten Mal die Möglichkeit einer breitgefächerten Anwendung der zeitdiskreten Signalverarbeitung.

Mikroelektronikingenieure suchen auch weiterhin nach Verfahren um die Integrationsdichte und die Ausbeute zu erhöhen, und als Ergebnis steigen die Komplexität und Leistungsfähigkeit der Mikroelektroniksysteme ständig an. In dem Maße, in dem sich die "Wafer-Scale"-Integrationstechniken weiterentwickeln, werden sehr komplexe zeitdiskrete Signalverarbeitungssysteme mit geringen Kosten, kleinem Volumen und geringer Leistungsaufnahme möglich. Daraus folgend wird sich in Zukunft die Bedeutung der zeitdiskreten Signalverarbeitung sicher noch erhöhen. Tatsächlich scheint sich die weitere Entwicklung auf diesem Gebiet noch dramatischer zu entwickeln als sie es bisher tat. Zeitdiskrete Signalverarbeitungstechniken ergeben auf einigen Gebieten revolutionäre Fortschritte. Ein bemerkenswertes Beispiel findet man auf dem Gebiet der Telekommunikation, bei dem die zeitdiskreten Signalverarbeitungstechniken zusammen mit der Mikroelektronik und der glasfaseroptischen Übertragung die Art der Kommunikationssysteme wahrhaft grundlegend veränderten. Ein ähnlicher Anstoß kann in vielen anderen Gebieten der Technik erwartet werden.

Obwohl die digitale Signalverarbeitung ein dynamisches und sich schnell fortentwickelndes Gebiet ist, sind ihre Grundlagen gut ausgearbeitet. Unser Ziel bei diesem Buch war es, eine zusammenhängende Darstellung der Theorie der zeitdiskreten linearen Systeme, der Filterung, der Abtastung und der zeitdiskreten Fourier-Analyse zu geben. Die hier ausgewählten Schwerpunkte sollten den Leser mit den nötigen Kenntnissen versehen, um das weite Feld der praktischen Anwendungen der zeitdiskreten Signalverarbeitung verstehen und beurteilen zu können, und um die Grundlage zu legen, selbst an der zukünftigen Entwicklung auf diesem aufregenden Feld der Technik mitwirken zu können.

2 Zeitdiskrete Signale und Systeme

Einführung

Ein Signal kann als eine Funktion definiert werden, die in irgend einer Weise Information über den Zustand oder das Verhalten eines physikalischen Systems enthält. Obwohl Signale auf verschiedene Art dargestellt werden können, ist in allen Fällen die Information in einem gewissen Muster von sich ändernden Formen enthalten. Signale werden *mathematisch* als Funktionen von einer oder mehreren unabhängigen Veränderlichen dargestellt. Ein Sprachsignal kann beispielsweise als Funktion der Zeit und eine Photographie als Funktion der Helligkeit zweier räumlicher Veränderlichen (Variablen) beschrieben werden. Es ist eine übliche Konvention, und sie wird auch in diesem Buch verwendet, bei der mathematischen Darstellung von Signalen mit einer unabhängigen Veränderlichen diese als „Zeit“ zu bezeichnen, obwohl die Variable in anderen Beispielen nicht unbedingt die Zeit darstellen muß.

Die Veränderlichen der mathematischen Darstellung können entweder kontinuierlich oder diskret sein. *Zeitkontinuierliche Signale* sind in einem Zeitkontinuum definiert und werden daher durch zeitkontinuierliche Variablen dargestellt. Zeitkontinuierliche Signale beziehen sich oft auf *analoge Signale*. *Zeitdiskrete Signale* sind zu diskreten Zeitpunkten definiert und werden daher durch Funktionen mit ausschließlich diskreten Variablen beschrieben. Im allgemeinen werden zeitdiskrete Signale durch eine Folge von Zahlen dargestellt. Sprach- oder Bildsignale können entweder mit kontinuierlichen oder diskreten Veränderlichen beschrieben werden, und bei Einhaltung bestimmter Bedingungen sind diese beiden Darstellungen auch äquivalent. Neben der Veränderlichen, die entweder kontinuierlich oder diskret ist, kann auch die Signalamplitude kontinuierlich oder diskret sein. *Digitale Signale* sind solche, bei denen sowohl die Zeit als auch die Amplitude diskret sind.

Signalverarbeitungssysteme können in derselben Weise wie Signale klassifiziert werden. Zeitkontinuierliche Systeme sind also Systeme, für die sowohl Eingangs- wie Ausgangssignale zeitkontinuierlich sind, und für zeitdiskrete Systeme sind Eingangs- wie Ausgangssignale zeitdiskret. Ebenso ist ein digitales System eines, bei dem sowohl Eingangs- wie Ausgangssignale digital sind. Dementsprechend beschäftigt sich die digitale Signalverarbeitung mit der Transformation von Signalen, die sowohl in der Zeit als auch in der Amplitude nur diskrete Werte annehmen. In diesem Buch ist das prinzipielle Augenmerk mehr auf zeitdiskrete als auf digitale Signale und Systeme gerichtet. Die Auswirkungen der Amplitudenquantisierung werden in den Abschnitten 3.7, 6.7-6.10 und 9.8 behandelt.

Zeitdiskrete Signale entstehen durch das Abtasten von zeitkontinuierlichen Signalen oder sie werden direkt durch zeitdiskrete Prozesse erzeugt. Was auch immer der Ursprung des einzelnen zeitdiskreten Signals ist, die zeitdiskreten Signalverarbeitungssysteme besitzen viele attraktive Eigenschaften.

Sie können leicht in vielen verschiedenen Technologien realisiert werden, wie z. B. mit Ladungstransport-Schaltungen, mit Oberflächenwellen-Strukturen, mit gewöhnlichen Digitalrechnern oder mit schnellen Mikroprozessoren (wie Signalprozessoren). Vollständige Signalverarbeitungssysteme können in VLSI-Technik implementiert werden. Sie können im Bedarfsfall zur Simulation analoger Systeme eingesetzt werden, oder, was wichtiger ist, zur Realisierung von Signaltransformationen, die mit analogen Systemen möglich sind. Daher ist eine zeitdiskrete Signaldarstellung dann wünschenswert, wenn eine anspruchsvolle und flexible Signalverarbeitungsaufgabe vorliegt.

In diesem Kapitel erarbeiten wir die grundsätzlichen Konzepte der zeitdiskreten Signale und Signalverarbeitungssysteme für eindimensionale Signale. Wir werden besonders die Klasse der linearen, zeitinvarianten zeitdiskreten Systeme betonen. Viele der Möglichkeiten und Ergebnisse, die wir hier und in den folgenden Kapiteln ableiten werden, werden Ähnlichkeiten mit den Eigenschaften und Ergebnissen der linearen, zeitinvarianten zeitkontinuierlichen Systemen aufweisen, wie sie in vielen Veröffentlichungen (beispielsweise Papoulis, 1980; Oppenheim und Willsky, 1983) zu finden sind. Tatsächlich ist es möglich, die Diskussion der zeitdiskreten Systeme dadurch zu beginnen, daß man Folgen diskreter Werte als abgetastete analoge Signale erklärt. Dieses Vorgehen kann, solange es sorgfältig angewendet wird, zu korrekten Ergebnissen führen und bildete auch die Grundlage für einen Großteil der klassischen Behandlung von Datenabtastsystemen (siehe z. B. Raggazzini und Franklin, 1958; Freeman, 1965; Phillips und Nagle, 1984). Dennoch entstehen nicht alle Signalfolgen durch das Abtasten von zeitkontinuierlichen Signalen, und viele zeitdiskrete Systeme sind nicht einfach Approximationen von entsprechenden analogen Systemen. Außerdem gibt es wichtige und grundsätzliche Unterschiede zwischen zeitdiskreten und zeitkontinuierlichen Systemen. Daher wollen wir versuchen, parallele Ergebnisse abzuleiten, indem wir von einem zeitdiskreten Rahmen und einer Notation ausgehen, die für zeitdiskrete Systeme geeignet ist, statt zu versuchen, Ergebnisse aus der Theorie der kontinuierlichen Systeme mit Gewalt in einen zeitdiskreten Rahmen zu zwingen. Zeitdiskrete Signale werden nur dann mit analogen Signalen verglichen, wenn es notwendig und nützlich ist.

2.1 Zeitdiskrete Signalfolgen

Zeitdiskrete Signale werden mathematisch als Folge von Zahlen dargestellt. Eine Folge von Zahlen x , in der die n -te Zahl der Folge mit $x[n]$ bezeichnet wird[†], läßt sich formal schreiben als

$$x = \{x[n]\}, \quad -\infty < n < \infty, \quad (2.1)$$

[†] Eine Folge ist einfach eine Funktion, deren Definitionsbereich die Menge der ganzen Zahlen ist. In diesem Buch werden die Klammern [] dazu verwendet, die Veränderliche einer solchen Funktion einzuschließen. Die Klammern () werden zum Einschluß von kontinuierlichen Variablen verwendet.

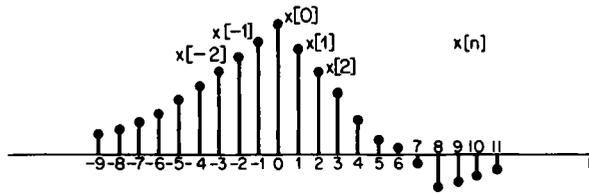


Bild 2.1 Graphische Darstellung eines zeitdiskreten Signals.

wobei n eine ganze Zahl ist. In der Praxis entstehen solche Zahlenfolgen oft durch die periodische Abtastung analoger Signale. In diesem Fall ist dann der numerische Wert der n -ten Zahl der Folge der Wert des analogen Signals $x_a(t)$ zum Zeitpunkt nT , d. h.

$$x[n] = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty. \quad (2.2)$$

Die Größe T wird *Abtastperiode* genannt, und ihr Kehrwert ist die *Abtastfrequenz*. Auch wenn die Folge nicht immer durch Abtasten eines analogen Signalverlaufes entsteht, ist es angebracht, $x[n]$ als „ n -ten Abtastwert“ der Folge zu bezeichnen. Obwohl $x[n]$ korrekterweise den n -ten Wert einer Zahlenfolge bezeichnet, ist die Schreibweise nach Gleichung (2.1) doch recht unhandlich und es ist üblich, mit „die Abtastfolge $x[n]$ “ die ganze Sequenz zu meinen; genau wie wir uns mit „dem analogen Signal $x_a(t)$ “ auf dessen kompletten Verlauf beziehen. Zeitdiskrete Signale (d. h. Folgen) werden häufig wie in Bild 2.1 abgebildet. Obwohl die Abszisse als durchgezogene Linie gezeichnet ist, ist es wichtig, stets daran zu denken, daß $x[n]$ nur für ganzzahlige Werte von n definiert ist. Es ist nicht korrekt, sich die Folge $x[n]$ so vorzustellen, daß sie für alle nicht ganzzahligen Werte von n Null ist; $x[n]$ ist an diesen Stellen einfach nicht definiert.

Beispielsweise zeigt das Bild 2.2(a) einen Ausschnitt aus einem Sprachsignal, welches aus Luftdruckschwankungen in Abhängigkeit der Zeit besteht, während das Bild 2.2(b) eine Folge von Abtastwerten des Zeitsignals wiedergibt. Obwohl das ursprüngliche Sprachsignal zu allen Werten der Zeit t definiert ist, enthält die daraus abgeleitete Folge nur zu bestimmten Zeitpunkten Informationen über das Signal. Mit Hilfe des Abtasttheorems (siehe Kapitel 3) läßt sich das Originalsignal mit beliebiger Genauigkeit rekonstruieren, sofern es zuvor nur mit einer genügend hohen Frequenz abgetastet wurde.

2.1.1 Einfache Folgen und Operationen mit Folgen

In der Analyse zeitdiskreter Signalverarbeitungssysteme werden Folgen (sequences) auf verschiedene Art und Weise behandelt. Das Produkt und die Summe zweier Folgen $x[n]$ und $y[n]$ ist definiert durch das Produkt der entsprechenden Abtastwerte bzw. deren Summe. Die Multiplikation einer Folge $x[n]$ mit einer Zahl α ist durch die Multiplikation jedes einzelnen Abtastwer-

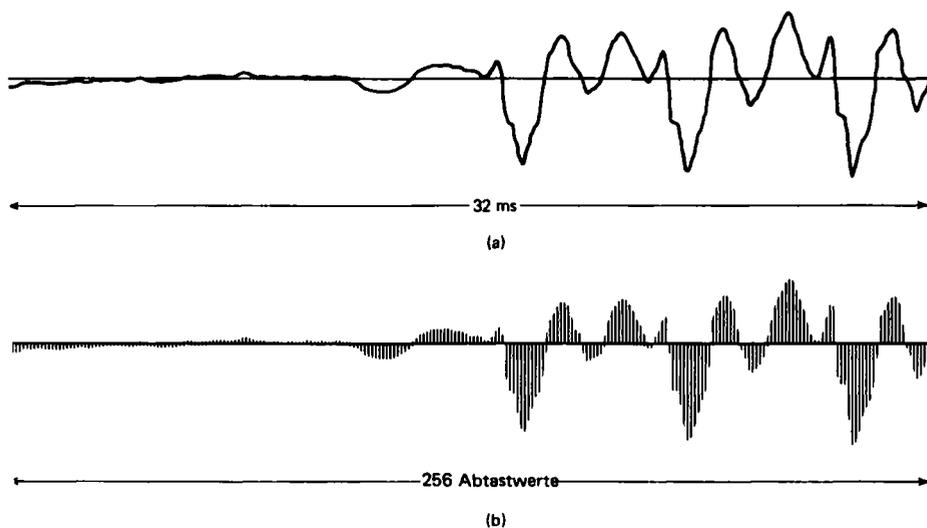


Bild 2.2 (a) Ausschnitt aus einem zeitkontinuierlichen Sprachsignal. (b) Folge von Abtastwerten, die aus dem Teil (a) mit $T = 125 \mu s$ aufgenommen wurden.

tes mit dieser Zahl definiert. Eine Folge $y[n]$ heißt verzögert oder verschoben gegenüber einer Folge $x[n]$, wenn für $y[n]$ gilt

$$y[n] = x[n - n_0], \quad (2.3)$$

wobei n_0 eine ganze Zahl ist.

Bei der Besprechung der Theorie zeitdiskreter Systeme und Signale sind einige einfache Folgen von besonderer Bedeutung. Diese Folgen sind in Bild 2.3 dargestellt und weiter unten beschrieben.

Die *Einheitsabtastfolge* (Bild 2.3(a)) mit der Bezeichnung $\delta[n]$ ist durch die Wertefolge definiert, für die

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Wie wir bald sehen werden, spielt die Einheitsabtastfolge die gleiche Rolle für zeitdiskrete Signale und Systeme, wie die Einheitsimpuls-Funktion (Diracsche Deltafunktion) für zeitkontinuierliche Signale und Systeme. Der Bequemlichkeit halber spricht man oft von einem *zeitdiskreten Impuls* oder von einem *Impuls*, wenn die Einheitsabtastfolge gemeint ist[†]. Es ist bemerkenswert, daß

[†] Anmerkung des Übersetzers: Das ist insbesondere dann der Fall, wenn die englischen Bezeichnungen möglichst unverändert ins Deutsche übertragen werden. Man beachte jedoch, daß im Englischen der "impulse" ursprünglich die Bedeutung des Diracschen Nadelimpulses hat, während der deutsche „Impuls“ im Englischen als "transient" bezeichnet wird. Die Bezeichnung „Impuls“ für einen Nadelimpuls oder eine Abtastfolge ist aber leider schon sehr üblich geworden, weshalb auch hier davon Gebrauch gemacht wird.

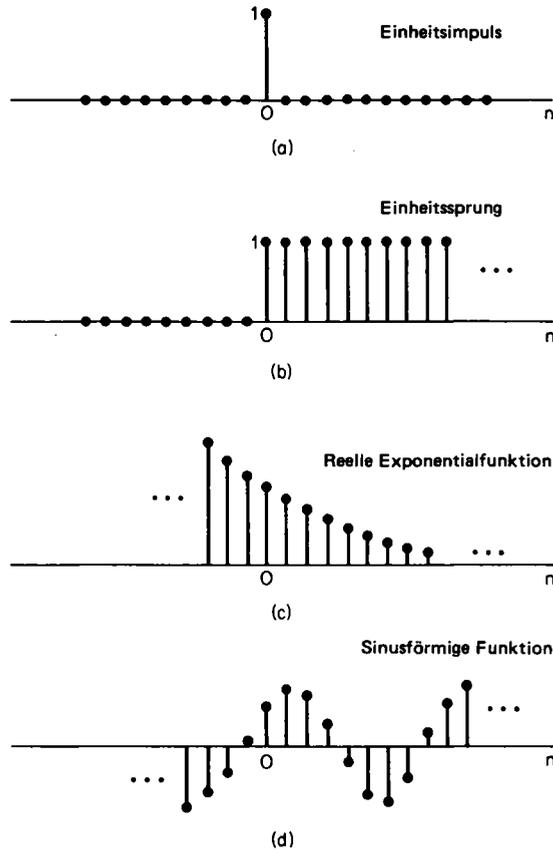


Bild 2.3 Einige einfache Folgen. Die abgebildeten Folgen spielen bei der Analyse und der Darstellung zeitdiskreter Signale und Systeme eine besondere Rolle.

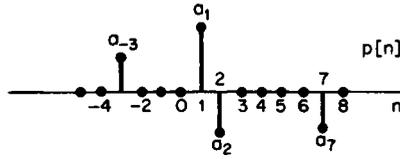


Bild 2.4 Beispiel einer Folge, die durch eine Summe normierter verzögerter Einheitsimpulse dargestellt werden kann.

die zeitdiskrete Einheitsabtastrfolge nicht die gleichen mathematischen Komplikationen wie der zeitkontinuierliche Nadelimpuls mit sich bringt. Seine Definition ist einfach und präzise.

Wie wir bei der Betrachtung der linearen Systeme sehen werden, ist einer der wichtigsten Gesichtspunkte der Impulsfolge der, daß eine beliebige Folge durch eine Summe von skalierten verzögerten Impulsen dargestellt werden kann. Beispielsweise kann die Folge $p[n]$ in Bild 2.4, wie folgt, dargestellt werden

$$p[n] = a_{-3}\delta[n+3] + a_1\delta[n-1] + a_2\delta[n-2] + a_7\delta[n-7]. \quad (2.5)$$

Ganz allgemein kann jede Folge beschrieben werden durch

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]. \quad (2.6)$$

Wir werden bei der Beschreibung der zeitdiskreten linearen Systeme speziell die Gleichung (2.6) verwenden.

Der *Einheitssprung* $u[n]$ (Bild 2.3(b)) (genauer, die Einheitssprungfolge) nimmt folgende Werte an:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Der Einheitssprung ist mit dem Einheitsimpulse verknüpft durch

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k], \quad (2.8)$$

d. h. der Wert der Einheitssprungfolge stimmt zu einem diskreten Zeitpunkt n mit der akkumulierten Summe aller Werte der Impulsfolge bis zu diesem Zeitpunkt überein. Eine alternative Darstellung des Einheitssprungs erhält man aus Bild 2.3(b), als Folge einer Summe von verzögerten Impulsen. Dies kann mathematisch ausgedrückt werden durch

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \dots \quad (2.9a)$$

oder

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]. \quad (2.9b)$$

Umgekehrt kann der Einheitsimpuls auch als erste Rückwärts-Differenz von Einheitssprungfolgen geschrieben werden

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]. \quad (2.10)$$

Exponentialfolgen und *sinusförmige Folgen* sind ausgesprochen wichtig für die Beschreibung und Analyse linearer, zeitinvarianter zeitdiskreter Systeme. Die allgemeine Form für eine Exponentialfolge lautet

$$x[n] = A\alpha^n. \quad (2.11)$$

Für den Fall, daß A und α reell sind, ist auch die Folge reell. Gilt $0 < \alpha < 1$ und ist A positiv, dann sind die Werte der Folge positiv und verringern sich mit steigendem n , siehe Bild 2.3(c). Für $-1 < \alpha < 0$ alterniert das Vorzeichen der Werte. Der Betrag der Werte fällt aber wieder mit steigendem n . Ist $|\alpha| > 1$, dann steigt der Betrag mit steigendem n . Eine sinusförmige Folge hat die allgemeine Form

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi) \quad \text{für alle } n, \quad (2.12)$$

wobei A reell ist. Eine solche Folge ist in Bild 2.3(d) abgebildet.

Die Exponentialfolge $A\alpha^n$ mit einem komplexen Exponenten α besteht aus einem Real- und Imaginärteil, die exponentiell gewichtete sinusförmige Folgen sind. Speziell für $\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$ und $A = |A|e^{j\phi}$ kann die Sequenz $A\alpha^n$ mit einer der folgenden Ausdrücke beschrieben werden:

$$\begin{aligned} x[n] &= A\alpha^n = |A|e^{j\phi}|\alpha|^n e^{j\omega_0 n} \\ &= |A||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n + \phi)} \\ &= |A||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \phi) + j|A||\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \phi). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Die Folge schwingt exponentiell auf, wenn $|\alpha| > 1$ ist und klingt, für $|\alpha| < 1$, exponentiell ab (mit einem einfachen Beispiel $\omega_0 = \pi$ kann dies überprüft werden).

Für den Fall $|\alpha| = 1$ wird die Folge als *komplexe Exponentialfolge* bezeichnet und hat die Form

$$x[n] = |A|e^{j(\omega_0 n + \phi)} = |A| \cos(\omega_0 n + \phi) + j|A| \sin(\omega_0 n + \phi), \quad (2.14)$$

d. h. der Real- und Imaginärteil von $e^{j\omega_0 n}$ verändern sich sinusförmig mit n . Die Tatsache, daß n in Gleichung (2.14) immer eine ganze Zahl ist, führt zu wichtigen Unterschieden zwischen den Eigenschaften der zeitdiskreten und der zeitkontinuierlichen komplexen Exponentialfolgen und sinusförmigen Folgen. In Analogie zum zeitkontinuierlichen Fall nennt man den Faktor ω_0 die Frequenz der komplexen sinusförmigen oder exponentiellen Folge und den Faktor ϕ die Phase. Doch muß beachtet werden, daß n eine dimensionslose ganze Zahl

ist. Daher ist die Einheit von ω_0 ein Winkel. Wünschen wir eine engere Analogie zu dem zeitkontinuierlichen Fall, so können wir ω_0 mit Winkel/Abtastwert bezeichnen, womit sich die Einheit von n als „Abtastwert“ ergibt.

Ein noch interessanterer Unterschied zwischen den zeitdiskreten und zeitkontinuierlichen komplexen Folgen ergibt sich, wenn wir die Frequenz $(\omega_0 + 2\pi)$ betrachten. In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} x[n] &= Ae^{j(\omega_0 + 2\pi)n} \\ &= Ae^{j\omega_0 n} e^{j2\pi n} = Ae^{j\omega_0 n}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

In der Tat läßt sich leicht erkennen, daß komplexe Exponentialfolgen mit den Frequenzen $(\omega_0 + 2\pi r)$, wobei r eine ganze Zahl ist, nicht zu unterscheiden sind. Ein identischer Ausdruck entsteht für sinusförmige Folgen. Im einzelnen kann leicht gezeigt werden, daß

$$\begin{aligned} x[n] &= A \cos[(\omega_0 + 2\pi r)n + \phi] \\ &= A \cos(\omega_0 n + \phi). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die Auswirkungen dieser Eigenschaft für abgetastete sinusförmige Folgen und andere Signale werden im 3. Kapitel behandelt. An dieser Stelle halten wir nur fest, daß bei einer Betrachtung eines komplexen Exponentialsignals der Form $x[n] = Ae^{j\omega_0 n}$ oder eines reellen sinusförmigen Signals, $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$, nur die Frequenzen untersucht werden müssen, die in einem Intervall der Länge 2π liegen, wie z. B. $-\pi < \omega_0 \leq \pi$ oder $0 \leq \omega_0 < 2\pi$.

Ein weiterer wichtiger Unterschied zwischen zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten komplexen Exponential- und Sinusfunktionen liegt in deren Periodizität. Im zeitkontinuierlichen Fall sind sowohl Sinus- als auch komplexe Exponentialsignale periodisch mit einer Periode, die gleich 2π geteilt durch die Frequenz ist. Im zeitdiskreten Fall ist eine periodische Folge eine, für die gilt

$$x[n] = x[n + N], \quad \text{für alle } n, \quad (2.17)$$

wobei die Periode N natürlich ganzzahlig sein muß. Wenn wir diese Bedingung für die Periodizität bei einer zeitdiskreten sinusförmigen Folge testen, erhalten wir

$$A \cos(\omega_0 n + \phi) = A \cos(\omega_0 n + \omega_0 N + \phi), \quad (2.18)$$

was erfordert, daß

$$\omega_0 N = 2\pi k, \quad (2.19)$$

mit k als ganzer Zahl. Ähnliche Verhältnisse gelten für eine komplexe Exponentialfolge $Ce^{j\omega_0 n}$, d. h. eine Periodizität mit der Periode N erfordert

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}, \quad (2.20)$$

was nur für $\omega_0 N = 2\pi k$ zutrifft, siehe Gleichung (2.19). Dementsprechend sind nicht alle komplexen Exponential- und Sinusfolgen notwendigerweise periodisch mit der Periode $2\pi/\omega_0$ und brauchen, abhängig von dem Wert ω_0 , überhaupt nicht periodisch zu sein. Beispielsweise ergibt sich bei der Frequenz $\omega_0 = 3\pi/4$ der kleinste Wert für N , der die Gleichung (2.19) mit einem ganzzahligen k erfüllt, zu $N = 8$ (damit korrespondiert der Wert $k = 3$). Für $\omega_0 = 1$ gibt es keine ganzzahligen Werte für N oder k , die die Gleichung (2.19) erfüllen.

Verbinden wir die Bedingung von Gleichung (2.19) mit unserer früheren Beobachtung, daß ω_0 und $(\omega_0 + 2\pi r)$ ununterscheidbare Frequenzen sind, dann wird klar, daß es N unterscheidbare Frequenzen gibt, für welche die zugehörigen Folgen die Periode N besitzen. Ein Satz von Frequenzen lautet $\omega_k = 2\pi k/N$ mit $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Diese Eigenschaften der komplexen Exponential- und Sinusfolgen haben grundlegende Bedeutung für die Theorie und den Entwurf von numerischen Algorithmen der zeitdiskreten Fourier-Analyse und sie werden detaillierter in den Kapiteln 8 und 9 behandelt.

Bezogen auf die vorhergehende Diskussion ist auch die Tatsache, daß die Interpretation von hohen und tiefen Frequenzen etwas verschieden ist, je nachdem ob wir zeitkontinuierliche oder zeitdiskrete Sinus- und Exponentialfolgen betrachten. Bei einem zeitkontinuierlichen sinusförmigen Signal wie zum Beispiel $x(t) = A \cos(\Omega_0 t + \phi)$ oszilliert $x(t)$ bei steigendem Ω_0 immer schneller. Im Gegensatz dazu, schwingt $x[n] = A \cos(\omega_0 n t + \phi)$ als zeitdiskretes sinusförmiges Signal mit steigendem ω_0 nur im Bereich von $\omega_0 = 0$ bis $\omega_0 = \pi$ schneller. Im Bereich $\omega_0 = \pi$ bis $\omega_0 = 2\pi$ schwingt $x[n]$ dagegen wieder langsamer. Dies ist in Bild 2.5 dargestellt. Wegen der Periodizität mit ω_0 ist es bei sinusförmigen Folgen und komplexen Exponentialfolgen unmöglich, die Frequenzen $\omega_0 = 0$ und $\omega_0 = 2\pi$ zu unterscheiden. Etwas allgemeiner kann man festhalten, daß die Frequenzen um $\omega_0 = 2\pi$ nicht von denen um $\omega_0 = 0$ unterschieden werden können. Infolgedessen werden für sinusförmige und komplexe exponentielle Signale die Werte von ω_0 in der Nachbarschaft von $\omega_0 = 2\pi k$ für alle ganzzahligen k üblicherweise als niedrige Frequenzen bezeichnet (relativ langsame Oszillationen) und die Werte von ω_0 in der Nachbarschaft von $\omega_0 = \pi + 2\pi k$ für alle ganzzahligen k üblicherweise als hohe Frequenzen (relativ rasche Oszillationen) bezeichnet.

2.2 Zeitdiskrete Systeme

Ein zeitdiskretes System ist mathematisch als eine Transformation oder als ein Operator definiert, die bzw. der eine Eingangsfolge mit den Werten $x[n]$ in eine Ausgangsfolge $y[n]$ abbildet. Dies kann beschrieben werden durch

$$y[n] = T\{x[n]\} \quad (2.21)$$

und wie in Bild 2.6 dargestellt werden. Die Gleichung (2.21) stellt eine Regel oder eine Formel dar, wie die Werte einer Ausgangsfolge aus denen einer

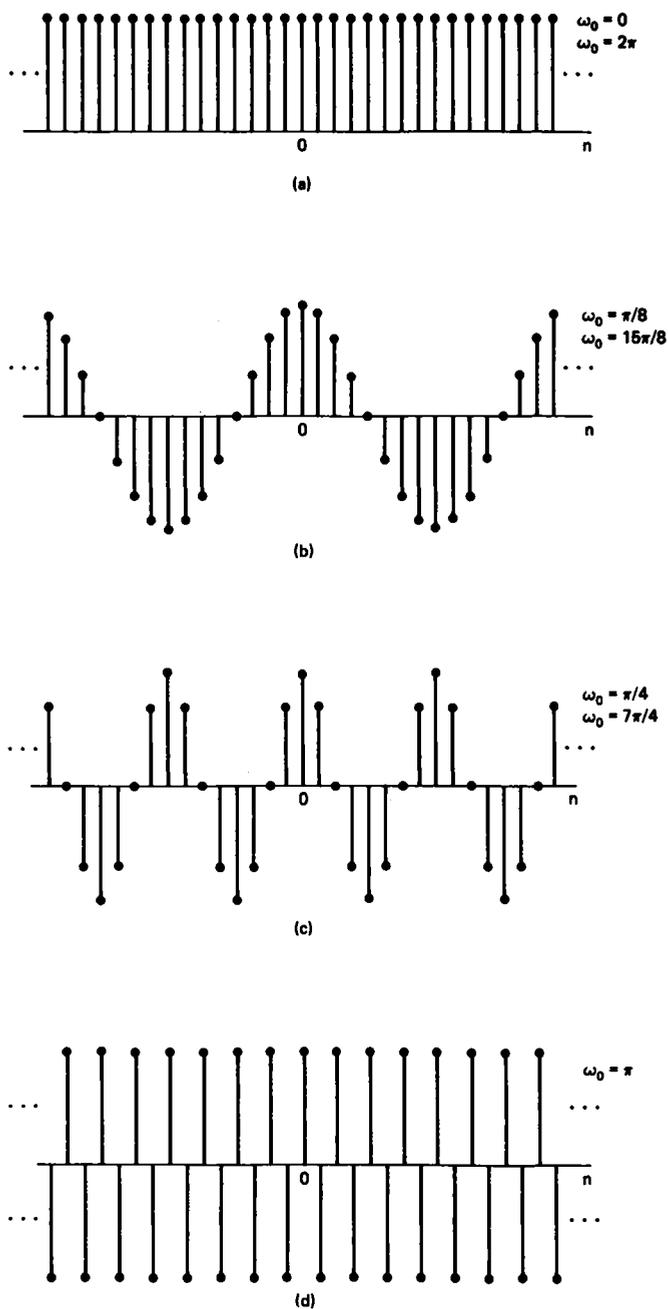


Bild 2.5 $\cos \omega_0 n$ für einige unterschiedliche Werte von ω_0 . Steigen die Werte von 0 bis π (Bilder a-d), so schwingt die Folge schneller. Steigt ω_0 von π weiter zu 2π (Bilder d-a), schwingt die Folge wieder langsamer.

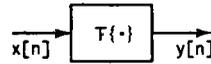


Bild 2.6 Darstellung eines zeitdiskreten Systems, also einer Transformation, die eine Eingangsfolge $x[n]$ in eine Ausgangsfolge $y[n]$ abbildet.

Eingangsfolge berechnet werden können. Man muß betonen, daß der Wert der Ausgangsfolge zu jedem Index n eine Funktion von $x[n]$ für alle Werte von n sein kann. Die folgenden Beispiele beschreiben einige einfache und nützliche Systeme.

Beispiel 2.1: Das ideale Zeitverzögerungssystem

Das ideale Zeitverzögerungssystem ist durch die Gleichung definiert

$$y[n] = x[n - n_d], \quad -\infty < n < \infty, \quad (2.22)$$

wobei die Zeitverzögerung des Systems n_d eine feste, positive ganze Zahl ist. In Worten ausgedrückt, verschiebt das ideale Zeitverzögerungssystem die Eingangsfolge einfach um n_d Abtastwerte nach rechts und erzeugt so die Ausgangsfolge. Wenn n_d in Gleichung (2.22) eine negative ganze Zahl wäre, so würde das System die Eingangsfolge um n_d Abtastwerte nach links verschieben, was einem zeitlichen Vorlauf entspräche.

In Beispiel 2.1 wird nur ein Wert der Eingangsfolge benötigt, um einen Wert der Ausgangsfolge zu bestimmen. Im folgenden Beispiel trifft dies nicht mehr zu.

Beispiel 2.2: Kurzzeitmittelwert (beweglicher Mittelwert)

Ein System, das einen Kurzzeitmittelwert (moving average) bildet, ist durch folgende Gleichung definiert:

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n - k] \\ &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \{x[n + M_1] + x[n + M_1 - 1] + \dots + x[n] \\ &\quad + x[n - 1] + \dots + x[n - M_2]\}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Dieses System berechnet den n -ten Abtastwert der Ausgangsfolge aus dem Mittelwert von $(M_1 + M_2 + 1)$ Abtastwerten der Eingangsfolge in der Umgebung des n -ten Abtastwertes. Das Bild 2.7 zeigt eine Eingangsfolge, die als Funktion einer Substitutionsvariablen k gezeichnet ist und die Abtastwerte, die zur Berechnung der Ausgangsfolge $y[n]$ (mit $n = 7$, $M_1 = 0$, $M_2 = 5$) herangezogen werden. Der Ausgangswert $y[7]$ ist das $\frac{1}{6}$ -fache der Summe aller Abtastwerte zwischen den vertikal gestrichelten Linien. Um $y[8]$ zu berechnen, müssen die beiden gestrichelten Linien um einen Abtastwert nach rechts verschoben werden.

Systemklassen werden dadurch definiert, daß man bezüglich der Eigenschaften der Transformation $T\{\cdot\}$ Einschränkungen macht. Verfährt man so,

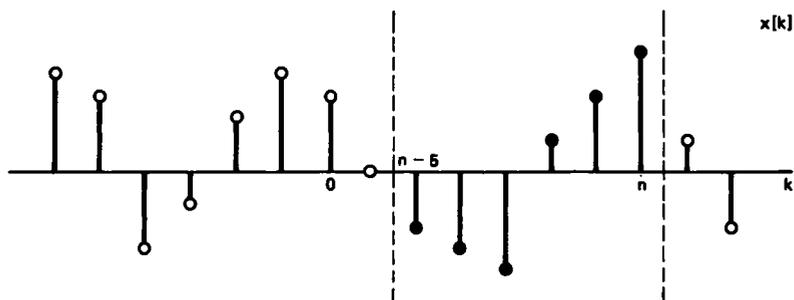


Bild 2.7 Werte einer Folge, die von der Berechnung eines kausalen beweglichen Mittelwertes erfaßt werden.

gelangt man, wie wir sehen werden, sehr oft zu einer sehr allgemeinen mathematischen Darstellungsweise. Von besonderer Bedeutung sind die Eigenschaften und Einschränkungen von Systemen, die in den Absätzen 2.2.1-2.2.5 beschrieben werden.

2.2.1 Systeme ohne Gedächtnis

Ein System wird als gedächtnislos (memoryless) bezeichnet, wenn der Ausgangswert $y[n]$ für jeden Wert von n nur von dem Eingangswert $x[n]$ bei demselben n abhängt.

Beispiel 2.3:

Ein gedächtnisloses System ist z. B. eines, bei dem $x[n]$ und $y[n]$ verknüpft sind durch

$$y[n] = (x[n])^2 \quad \text{für jeden Wert von } n. \quad (2.24)$$

Das System aus Beispiel 2.1 ist nur für $n_d = 0$ gedächtnislos. Es wird sowohl für positive n_d (zeitliche Verzögerung) als auch für negative n_d (zeitlicher Vorlauf) als System mit Gedächtnis bezeichnet. Das System aus Beispiel 2.2 ist nur für $M_1 = M_2 = 0$ gedächtnislos.

2.2.2 Lineare Systeme

Die Klasse der *linearen Systeme* ist durch das Prinzip der Superposition definiert. Wenn $y_1[n]$ und $y_2[n]$ die Systemantworten zu den entsprechenden Eingangsfolgen $x_1[n]$ und $x_2[n]$ sind, dann ist das System genau dann linear, wenn gilt

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} = y_1[n] + y_2[n] \quad (2.25a)$$

sowie

$$T\{ax[n]\} = aT\{x[n]\} = ay[n], \quad (2.25b)$$

wobei a eine beliebige Konstante ist. Die erste Eigenschaft wird die *Additionseigenschaft* genannt und die zweite die *Homogenitäts- oder Skalierbarkeitseigenschaft*. Diese zwei Eigenschaften lassen sich zum Prinzip der Superposition zusammenfassen, das durch

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} \quad (2.26)$$

für beliebige Konstanten a und b festgelegt ist. Dies kann zur Superposition für mehrere Eingänge verallgemeinert werden. Im einzelnen gilt mit

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n], \quad (2.27a)$$

daß

$$y[n] = \sum_k a_k y_k[n], \quad (2.27b)$$

wobei $y_k[n]$ die Systemantwort auf das Eingangssignal $x_k[n]$ ist.

Mit Hilfe der Definition der Superposition kann leicht gezeigt werden, daß die Systeme aus den Beispielen 2.1 und 2.2 lineare Systeme sind (siehe Aufgabe 2.2). Ein Beispiel für ein nichtlineares System ist das System in Beispiel 2.3.

Beispiel 2.4:

Das System, das als Akkumulator bezeichnet wird und durch die Beziehung

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (2.28)$$

definiert wird, ist ein lineares System. Der Ausgangswert zu jedem Abtastzeitpunkt n ist gleich der Summe des Wertes bei n und aller vorherigen Eingangswerte. Beim Vergleich der Gleichung (2.28) mit der Gleichung (2.8) stellen wir fest, daß, wenn die Eingangsfolge $x[n]$ aus einem Einheitsimpuls $\delta[n]$ besteht, die Ausgangsfolge $y[n]$ ein Einheitssprung $u[n]$ ist.

2.2.3 Zeitinvariante Systeme

Ein zeitinvariantes System (häufig auch als verschiebungsinvariantes System bezeichnet) ist eines, das bei einer Zeitverschiebung oder einer Verzögerung der Eingangsfolge eine entsprechende Zeitverschiebung oder Verzögerung der Ausgangsfolge bewirkt. Angenommen, ein System transformiere die Eingangsfolge mit den Werten $x[n]$ in eine Ausgangsfolge mit den Werten $y[n]$. Ein System wird als zeitinvariant bezeichnet, wenn es für alle n_0 aus der Eingangsfolge mit den Werten $x_1[n] = x[n - n_0]$ die Ausgangsfolge mit den Werten $y_1[n] = y[n - n_0]$ erzeugt.

Alle Systeme in den Beispielen 2.1-2.4 sind zeitinvariant. Das folgende Beispiel veranschaulicht ein System, das nicht zeitinvariant ist.

Beispiel 2.5:

Das System sei durch die folgende Beziehung definiert:

$$y[n] = x[Mn], \quad -\infty < n < \infty, \quad (2.29)$$

wobei M eine positive ganze Zahl ist. Es wird als *Kompressor* bezeichnet, weil es von M Abtastwerten ($M - 1$) unterdrückt. Das bedeutet, das System erzeugt die Ausgangsfolgen, indem es nur jeden M -ten Abtastwert auswählt. Aus der Beschreibung der Wirkungsweise ist leicht zu entnehmen, daß dieses System nicht zeitinvariant ist. Wir können dies mathematisch durch die Betrachtung der Antwort $y_1[n]$ auf die Eingangsfolge $x_1[n]$, die durch $x_1[n] = x[n - n_0]$ definiert ist, zeigen. Denn es gilt

$$y_1[n] = x_1[Mn] = x[Mn - n_0]. \quad (2.30)$$

Jedoch ist

$$y[n - n_0] = x[M(n - n_0)] \neq y_1[n]. \quad (2.31)$$

Obwohl $x_1[n]$ mit der um n_0 Abtastwerte verschoben Folge $x[n]$ übereinstimmt, ist $y_1[n]$ nicht die um n_0 Abtastwerte verschobene Version von $y[n]$. Der Abtastratenreduzierer bzw. Kompressor ist also, abgesehen von dem Spezialfall $M = 1$, nicht zeitinvariant.

2.2.4 Kausalität

Ein System ist kausal, wenn bei beliebiger Wahl von n_0 der Ausgangsfolgenwert beim Index $n = n_0$ nur von Werten der Eingangsfolge im Indexbereich $n \leq n_0$ abhängt. Dies bedeutet, daß für $x_1[n] = x_2[n]$ für $n \leq n_0$, auch $y_1[n] = y_2[n]$ für $n \leq n_0$ gilt. Das System ist also *nicht hellseherisch*, sondern *kausal*. Das spezielle System aus Beispiel 2.1 ist für $n_d \geq 0$ kausal und für $n_d < 0$ nichtkausal. Das System aus Beispiel 2.2 ist für $M_1 \leq 0$ und $M_2 \geq 0$ kausal; ansonsten ist es nichtkausal. Das System in Beispiel 2.3 ist kausal, genauso wie der Akkumulator in Beispiel 2.4. Das System aus Beispiel 2.5 ist für $M > 1$ jedoch nichtkausal, da $y[1] = x[M]$. Ein weiteres nichtkausales System wird im folgenden Beispiel vorgestellt.

Beispiel 2.6:

Das *Vorwärts-Differenzen-System* ist definiert durch

$$y[n] = x[n + 1] - x[n]. \quad (2.32)$$

Offensichtlich hängt $y[n]$ von $x[n + 1]$ ab. Deshalb ist das System nichtkausal. Das *Rückwärts-Differenzen-System* ist hingegen definiert als

$$y[n] = x[n] - x[n - 1], \quad (2.33)$$

so daß dieses System wieder kausal ist.

2.2.5 Stabilität

Ein System ist genau dann im Sinne beschränkter Eingangswerte und beschränkter Ausgangswerte (BIBO = bounded-input bounded-output) stabil, wenn jede beschränkte Eingangsfolge eine beschränkte Ausgangsfolge erzeugt. Eine Eingangsfolge $x[n]$ ist beschränkt, wenn es einen festen, positiven endlichen Wert B_x gibt, für den gilt

$$|x[n]| \leq B_x < \infty \quad \text{für alle } n. \quad (2.34)$$

Die Stabilität erfordert, daß zu jeder beschränkten Eingangsfolge ein fester, positiver endlicher Wert B_y existiert, für den

$$|y[n]| \leq B_y < \infty \quad \text{für alle } n. \quad (2.35)$$

Die Beispiele 2.1, 2.2, 2.3 und 2.5 sind stabile Systeme. Der Akkumulator aus Beispiel 2.4 ist instabil. Um dies zu zeigen, genügt es ein Gegenbeispiel anzugeben, d. h. eine beschränkte Eingangsfolge zu finden, für die die Ausgangsfolge unbeschränkt ist. Daher rechnen wir mit der Eingangsfolge $x[n] = u[n]$, die sicherlich beschränkt ist. Für diese Eingangsfolge ergibt sich der Ausgang des Akkumulators zu

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^n u[k] \\ &= \begin{cases} 0, & n < 0, \\ (n+1), & n \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Obwohl diese Antwort für ein endliches n ebenfalls endlich ist, ist sie dennoch unbeschränkt, denn es gibt keinen festen, endlichen Wert B_y , so daß $(n+1) \leq B_y < \infty$ für alle n gilt.

Es ist wichtig, noch einmal ausdrücklich darauf hinzuweisen, daß die Eigenschaften, die wir in diesem Kapitel definiert haben, Eigenschaften des *Systems* und nicht Eigenschaften der Eingangsfolgen sind. Das bedeutet, daß wir möglicherweise Eingangsfolgen finden können, für welche die Eigenschaften erfüllt werden. Allerdings bedeutet die Gültigkeit von Eigenschaften für einige wenige Eingangssignale nicht, daß das System diese Eigenschaft besitzen muß. Damit dem System eine Eigenschaft zugesprochen werden kann, muß diese für alle Eingangssignale gelten. Beispielsweise kann es für ein instabiles System einige beschränkte Eingangsfolgen geben, für welche die Ausgangsfolgen ebenfalls beschränkt sind. Für die Systemeigenschaft der Stabilität müssen aber alle beschränkten Eingangsfolgen beschränkte Ausgangsfolgen erzeugen. Wenn wir, wie beim Akkumulator in Beispiel 2.4, nur eine einzige Eingangsfolge finden können, für die das System die Eigenschaft nicht aufweist, dann ist bewiesen, daß das System diese Eigenschaft *nicht* besitzt.

2.3 Lineare zeitinvariante Systeme

Eine besonders wichtige Klasse von Systemen besteht aus den Systemen, die linear und zeitinvariant sind. Zusammengenommen führen diese beiden Eigenschaften zu einer besonders günstigen Darstellungsart für derartige Systeme. Am wichtigsten ist jedoch, daß diese Klasse von Systemen einen signifikanten Anteil der Anwendungen in der Signalverarbeitung bestreitet. Die Klasse der linearen Systeme ist durch das Prinzip der Superposition nach Gleichung (2.26) definiert. Verknüpft man die Eigenschaft der Linearität mit der Beschreibung einer beliebigen Folge als Linearkombination von verzögerten Impulsen gemäß der Gleichung (2.6), so folgt, daß ein System durch seine Impulsantwort (Antwort auf einen Nadelimpuls) vollständig beschrieben werden kann. Sei $h_k[n]$ die Antwort eines Systems auf $\delta[n - k]$, also auf einen Impuls an der Stelle $n = k$, dann gilt nach Gleichung (2.6)

$$y[n] = T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k] \right\}. \quad (2.37)$$

Mit Hilfe des Superpositionsprinzips aus Gleichung (2.26), können wir schreiben

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] T \{ \delta[n - k] \} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n]. \quad (2.38)$$

In Anlehnung an Gleichung (2.38) kann die Systemantwort auf eine beliebige Eingangsfolge in Abhängigkeit der Systemantwort auf das Signal $\delta[n - k]$ ausgedrückt werden. Wenn nur die Linearität vorausgesetzt wird, hängt $h_k[n]$ sowohl von n als auch von k ab, in diesem Fall ist die berechnungsbezogene Verwendbarkeit der Gleichung (2.38) begrenzt. Wir erhalten ein brauchbareres Ergebnis, wenn wir auch noch die Zeitinvarianz als zusätzliche Bedingung verlangen.

Die Eigenschaft der Zeitinvarianz impliziert, daß, wenn $h[n]$ die Systemantwort auf $\delta[n]$ ist, sich die Antwort auf $\delta[n - k]$ zu $h[n - k]$ ergibt. Mit dieser zusätzlichen Bedingung wird aus Gleichung (2.38)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n - k]. \quad (2.39)$$

Als Konsequenz der Gleichung (2.39) ergibt sich, daß ein lineares zeitinvariantes System (das wir manchmal mit LTI (= linear time-invariant) abkürzen) vollständig durch seine Impulsantwort $h[n]$ charakterisiert ist. Ist $h[n]$ gegeben, so kann man mit Hilfe der Gleichung (2.39) die Ausgangsfolge $y[n]$ für jede beliebige Eingangsfolge berechnen.

Die Gleichung (2.39) wird allgemein als *Faltungssumme* bezeichnet. Ist $y[n]$ eine Folge, deren Werte sich aus den Werten zweier Folgen $h[n]$ und $x[n]$ gemäß der Gleichung (2.39) bestimmen lassen, so nennen wir $y[n]$ die Faltung von $x[n]$ mit $h[n]$ und drücken dies durch folgende Schreibweise aus:

$$y[n] = x[n] * h[n]. \quad (2.40)$$

Die Operation der zeitdiskreten Faltung erzeugt aus zwei Folgen $x[n]$ und $h[n]$ eine neue dritte Folge $y[n]$. Die Gleichung (2.39) drückt jeden diskreten Wert der Ausgangsfolge durch alle Werte der Eingangsfolge und der Impulsantwort aus.

Die Herleitung von Gleichung (2.39) legt die Interpretation nahe, daß der Eingangsabtastwert bei $n = k$, dargestellt durch $x[n]\delta[n - k]$, durch das System zu einer Ausgangsfolge $x[k]h[n - k]$, im Bereich $-\infty < n < \infty$, transformiert wird, und daß diese Folgen für alle k überlagert werden müssen, um die gesamte Ausgangsfolge $y[n]$ zu erzeugen. Diese Interpretation wird in Bild 2.8 veranschaulicht, in dem eine Impulsantwort, eine einfache Eingangsfolge mit drei Abtastwerten ungleich Null, die individuellen Antworten auf jeden einzelnen Abtastwert und die überlagerte Ausgangsfolge aller Werte der Eingangsfolgen zu sehen sind. Im einzelnen kann $x[n]$, entsprechend der drei von Null verschiedenen Abtastwerte der Folge $x[n]$, als Summe der drei Folgen $x[-2]\delta[n + 2]$, $x[0]\delta[n]$, $x[3]\delta[n - 3]$ aufgefaßt werden. Die Folgen $x[-2]h[n + 2]$, $x[0]h[n]$ und $x[3]h[n - 3]$ sind die Systemantworten auf die jeweiligen Eingangsfolgen $x[-2]\delta[n + 2]$, $x[0]\delta[n]$ bzw. $x[3]\delta[n - 3]$. Die Antwort auf $x[n]$ ist daher die Summe dieser drei einzelnen Antworten.

Obwohl die Faltungssumme analog zum Faltungsintegral der zeitkontinuierlichen linearen Systemtheorie formuliert ist, sollte die Faltungssumme nicht als eine Approximation des Faltungsintegrals verstanden werden. Das Faltungsintegral spielt bei der zeitkontinuierlichen linearen Systemtheorie hauptsächlich eine theoretische Rolle, während die Faltungssumme, neben ihrer theoretischen Bedeutung, oft als explizite Realisierung eines linearen zeitdiskreten Systems dient. Daher ist es von besonderer Wichtigkeit, uns wirklich mit den Eigenschaften der Faltungssumme in Berechnungsbeispielen vertraut zu machen.

Die vorhergehende Interpretation der Gleichung (2.39) verdeutlicht, daß die Faltungssumme ein direktes Ergebnis der Linearität und der Zeitinvarianz ist. Betrachtet man die Gleichung (2.39) jedoch unter einem leicht veränderten Blickwinkel, so führt dies zu einer besonders nützlichen Berechnungsinterpretation. Wird die Gleichung als Formel zur Berechnung eines einzelnen Wertes der Ausgangsfolge angesehen, dann schreibt die Gleichung (2.39) vor, daß $y[n]$ (also der n -te Ausgangswert) erhalten werden kann, indem die Eingangsfolge (ausgedrückt als Funktion von k) mit der Folge multipliziert wird, deren Werte durch $h[n - k]$ (für $-\infty < k < \infty$) gegeben sind und anschließend für den beliebigen aber festen Wert von n alle Werte der Produkte $x[k]h[n - k]$ aufsummiert werden, wobei k der Zählindex im Summationsprozeß ist. Die Operation der Faltung zweier Folgen umfaßt diese Berechnungen für alle Werte von n . Auf diese Art und Weise wird die komplette Ausgangsfolge $y[n]$ mit $-\infty < n < \infty$ erzeugt. Der Schlüssel zur Ausführung der Berechnungen von Gleichung (2.39), mit der $y[n]$ erzeugt wird, ist das Verständnis dafür, wie man die Folge $h[n - k]$ im Bereich $-\infty < k < \infty$ für alle relevanten Werte von n bildet. In diesem Sinne ist es vorteilhaft, zu bemerken, daß

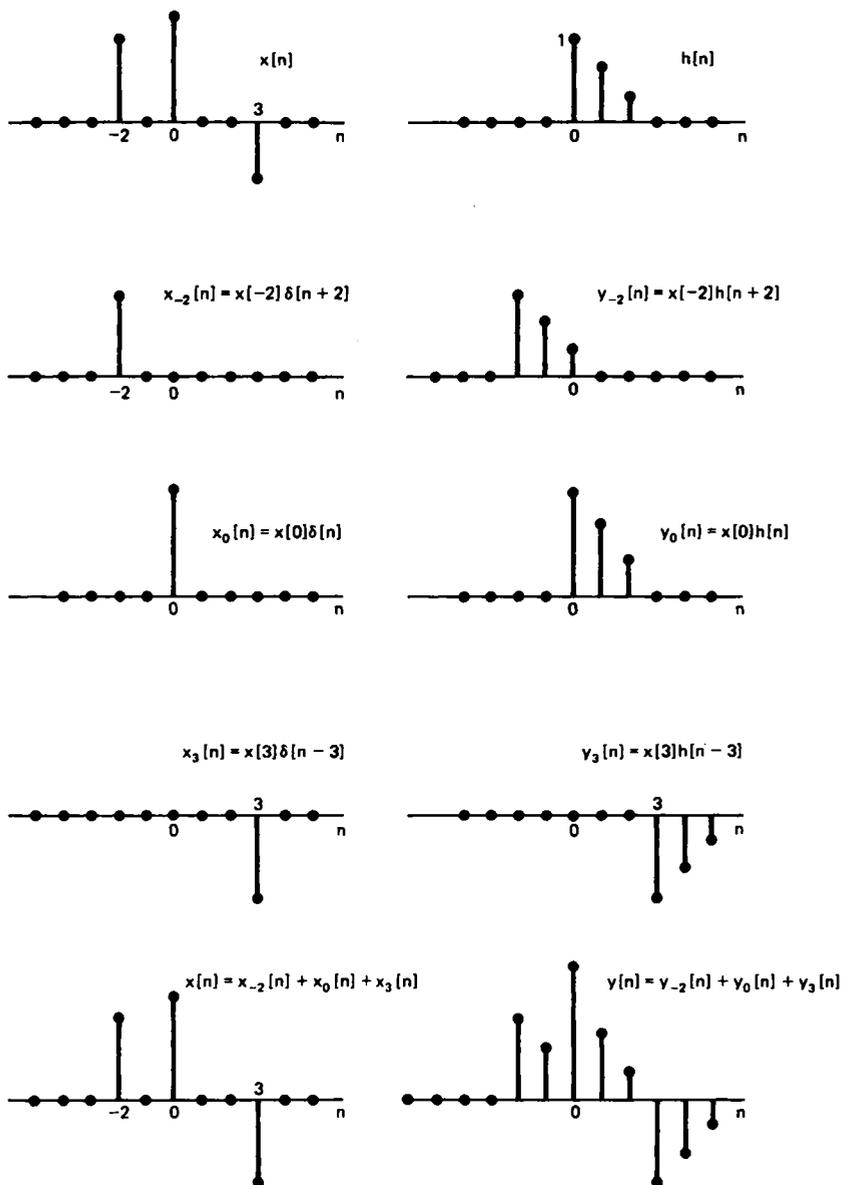


Bild 2.8 Darstellung der Ausgangsfolge eines linearen zeitinvarianten Systems als Superposition von Antworten auf einzelne Eingangsabstastwerte.

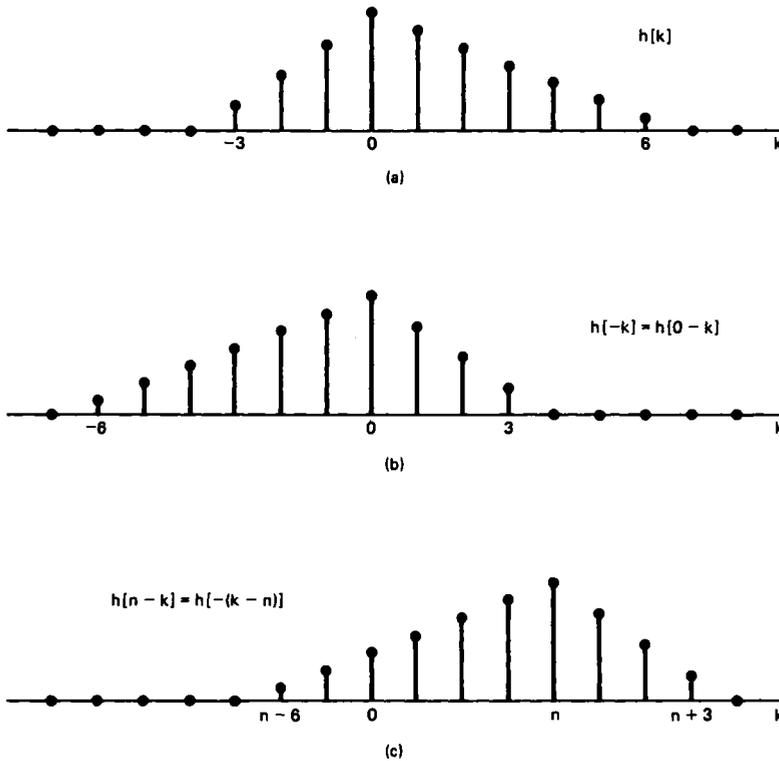


Bild 2.9 Erzeugung der Folge $h[n-k]$. (a) Die Folge $h[k]$ als Funktion von k . (b) Die Folge $h[-k]$ als Funktion von k . (c) Die Folge $h[n-k]$ als Funktion von k für $n = 4$.

$$h[n-k] = h[-(k-n)]. \quad (2.41)$$

Die Auswertung der Gleichung (2.41) läßt sich am besten anhand eines Beispiels vornehmen.

Beispiel 2.7:

Gegeben sei die Folge $h[k]$ aus Bild 2.9(a). Zunächst betrachte man $h[-k]$ als Funktion von k . Die Folge $h[-k]$ ist einfach die gespiegelte oder am Nullpunkt umgeklappte Funktion $h[k]$, siehe Bild 2.9(b). Ersetzt man k durch $k-n$, wobei n eine feste ganze Zahl ist, entsteht eine Verschiebung des Nullpunktes der Folge $h[-k]$ nach $k = n$, wie es für den Fall $n = 4$ in Bild 2.9(c) dargestellt ist.

Verallgemeinert man das Beispiel 2.7, so wird deutlich, daß man die Folge $h[n-k]$ mit $-\infty < k < \infty$ prinzipiell wie folgt erhält:

1. Spiegelung von $h[k]$ am Nullpunkt, um $h[-k]$ zu erhalten;
2. Verschiebung des Ursprungs der gespiegelten Folge nach $k = n$.

Um die zeitdiskrete Faltung zu implementieren, werden die beiden Folgen $x[k]$ und $h[n-k]$ für $-\infty < k < \infty$ miteinander multipliziert und die Produkte zur Berechnung des Ausgangswertes $y[n]$ aufsummiert. Um den darauffolgenden Ausgangswert zu erhalten, wird $h[-k]$ zur nächsten Abtastposition verschoben und der Vorgang wiederholt. Dieses Verfahren eignet sich gut, ob nun die Berechnung numerisch für abgetastete Werte erfolgt, oder analytisch für Folgen, die durch einfache Formeln beschrieben werden. Das folgende Beispiel veranschaulicht die zeitdiskrete Faltung für den letzteren Fall.

Beispiel 2.8:

Man betrachte ein System mit der Impulsantwort

$$\begin{aligned} h[n] &= u[n] - u[n-N] \\ &= \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Das Eingangssignal sei

$$x[n] = a^n u[n].$$

Um das Ausgangssignal für einen bestimmten Index n zu bestimmen, müssen wir die Summe über alle k des Produktes $x[k]h[n-k]$ bilden. Wir finden dabei für verschiedene Werte von n verschiedene Formeln. So zeigt z. B. Bild 2.10(a) die Darstellung der Folgen $x[k]$ und $h[n-k]$ für ein negatives n . Es wird deutlich, daß alle negativen Werte von n ähnliche Bilder ergeben, d. h. die von Null verschiedenen Anteile der Folgen $x[k]$ und $h[n-k]$ überlappen sich nicht, so daß gilt

$$y[n] = 0, \quad n < 0.$$

Das Bild 2.10(b) zeigt die beiden Folgen für $0 \leq n$ und $n - N + 1 \leq 0$. Diese beiden Bedingungen lassen sich zu einer einzigen vereinigen: $0 \leq n \leq N - 1$. Dem Bild 2.10(b) entnehmen wir, daß mit

$$x[k]h[n-k] = a^k,$$

folgt

$$y[n] = \sum_{k=0}^n a^k \quad \text{für } 0 \leq n \leq N-1. \quad (2.42)$$

Die Grenzen der Summation wurden direkt dem Bild 2.10(b) entnommen. Die Gleichung (2.42) zeigt, daß $y[n]$ die Summe von $n+1$ Termen einer geometrischen Reihe ist, wobei sich je zwei aufeinander folgende Terme um den Faktor a unterscheiden. Diese Summe kann mit Hilfe der nachstehenden allgemeingültigen Formel in geschlossener Form angegeben werden:

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} a^k = \frac{\alpha^{N_2} - \alpha^{N_1+1}}{1 - \alpha}, \quad N_2 \geq N_1. \quad (2.43)$$

Wendet man dies auf Gleichung (2.42) an, so ergibt sich

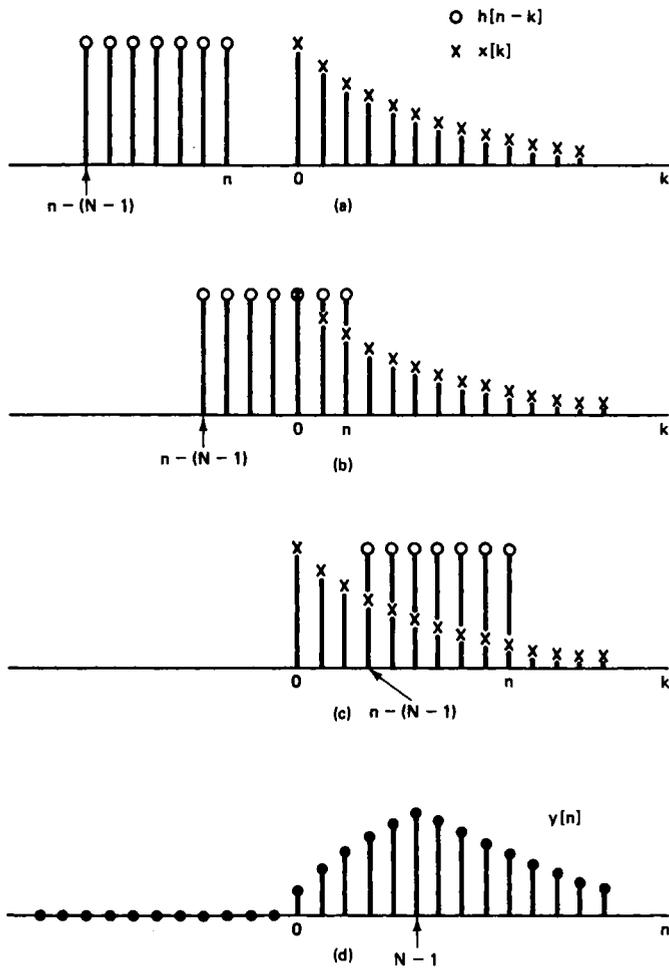


Bild 2.10 Folgen, die bei der Berechnung einer diskreten Faltung beteiligt sind. Die Teile (a)-(c) zeigen die Folgen $x[k]$ und $h[n-k]$ für verschiedene Werte von n als Funktion von k . (Es werden nur die von Null verschiedenen Werte dargestellt.) (d) Die zugehörige Ausgangsfolge als Funktion von n .

$$y[n] = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (2.44)$$

Schließlich zeigt Bild 2.10(c) die beiden Folgen für $0 < n - N + 1$ oder $N - 1 < n$. Wie zuvor ergibt sich

$$x[k]h[n - k] = a^k, \quad n - N + 1 < k \leq n,$$

nun gilt aber für die untere Grenze der Summation $n - N + 1$, siehe Bild 2.10(c). Demnach ist

$$y[n] = \sum_{k=n-N+1}^n a^k \quad \text{für } N - 1 < n. \quad (2.45)$$

Mit Gleichung (2.43) erhalten wir

$$y[n] = \frac{a^{n-N+1} - a^{n+1}}{1 - a}$$

oder

$$y[n] = a^{n-N+1} \left(\frac{1 - a^N}{1 - a} \right). \quad (2.46)$$

Somit waren wir aufgrund der stückweise exponentiellen Charakteristik des Eingangssignals und der Einheitsimpulsantwort in der Lage, die folgende geschlossene Form für $y[n]$ als Funktion des Index n zu berechnen:

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, & 0 \leq n \leq N - 1, \\ a^{n-N+1} \left(\frac{1 - a^N}{1 - a} \right), & N - 1 < n. \end{cases} \quad (2.47)$$

Diese Folge ist in Bild 2.10(d) dargestellt.

Das Beispiel 2.8 veranschaulicht, wie die Faltungssumme analytisch berechnet werden kann, wenn das Eingangssignal und die Impulsantwort als einfache Berechnungsformeln gegeben sind. In solchen Fall können die Summen in eine kompakte Form gebracht werden, die sich aus der Formel für die Summe einer geometrischen Reihe oder aus anderen Formeln herleiten läßt[†]. Liegen keine einfachen Berechnungsformeln vor, kann die Faltungssumme immer noch nach dem Vorbild des Beispiels 2.8 numerisch berechnet werden. Voraussetzung dafür ist, daß die Summen endlich sind, was zutrifft, wenn die Eingangsfolge oder die Impulsantwort eine endliche Länge besitzt, d. h. wenn nur eine endliche Anzahl von Abtastwerten von Null verschieden sind. Wir können gar nicht oft genug darauf hinweisen, daß genau gezeichnete und bezeichnete Skizzen, wie die in Bild 2.10, nicht genügen, um die Grenzen von Summen korrekt zu bestimmen.

[†] Derartige Ergebnisse werden z. B. in Grossmann (1982) vorgestellt. Ein sehr nützliches Buch über Summenformeln ist das von Jolley (1961).

2.4 Eigenschaften linearer zeitinvarianter Systeme

Da alle linearen zeitinvarianten Systeme durch die Faltungssumme aus Gleichung (2.39) beschrieben werden können, sind auch die Eigenschaften dieser Klasse von Systemen durch die Eigenschaften der zeitdiskreten Faltung definiert. Deshalb enthält die Impulsantwort eine vollständige Charakterisierung der Eigenschaften eines bestimmten, linearen zeitinvarianten Systems.

Einige generelle Eigenschaften der Klasse linearer zeitinvarianter Systeme können direkt aus den Eigenschaften der Faltungsoperation abgeleitet werden. Zum Beispiel ist die Faltungsoperation kommutativ

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]. \quad (2.48)$$

Dies kann durch eine Variablensubstitution in Gleichung (2.39) gezeigt werden. Speziell gilt mit $m = n - k$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m]. \quad (2.49)$$

Somit sind die Rollen von $x[n]$ und $h[n]$ vertauscht. Dies bedeutet, daß die Reihenfolge der Abtastfolgen in einer Faltung unwichtig ist. Das Ausgangssignal bleibt gleich, auch wenn die Rollen des Eingangssignals und der Impulsantwort vertauscht werden. Ein lineares zeitinvariantes System mit dem Eingangssignal $x[n]$ und der Impulsantwort $h[n]$ hat das gleiche Ausgangssignal wie ein System mit der Impulsantwort $x[n]$ und einem Eingangssignal $h[n]$. Die Faltungsoperation ist außerdem distributiv bezüglich der Addition, d. h.

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n].$$

Dies folgt direkt aus Gleichung (2.39).

In einer *Reihenschaltung* von Systemen ist der Ausgang des ersten Systems mit dem Eingang des zweiten verbunden, und der Ausgang des zweiten ist wiederum mit dem Eingang des dritten verbunden, usw. Das Ausgangssignal des letzten Teilsystems ist zugleich das Ausgangssignal des Gesamtsystems. Zwei lineare zeitinvariante Systeme in Reihenschaltung entsprechen einem linearen zeitinvarianten System, dessen Impulsantwort sich aus der Faltung der Impulsantworten der beiden Teilsysteme ergibt. Dies wird in Bild 2.11 dargestellt. In dem oberen Blockdiagramm erzeugt das Eingangssignal $x[n] = \delta[n]$ das Ausgangssignal $h_1[n]$ am Ende des ersten Teilsystems. Deshalb ergibt sich das Ausgangssignal des zweiten Teilsystems (und damit auch die Impulsantwort des Gesamtsystems) zu

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]. \quad (2.50)$$

Aus den kommutativen Eigenschaften der Faltung folgt demnach, daß die Impulsantwort einer Hintereinanderschaltung linearer zeitinvarianter Teilsysteme unabhängig von der Reihenfolge der Teilsysteme ist. Dieses Ergebnis

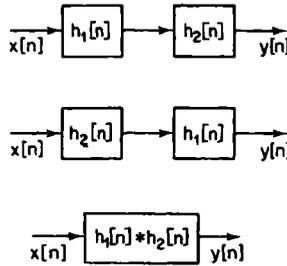


Bild 2.11 Drei lineare zeitinvariante Systeme mit identischen Impulsantworten.

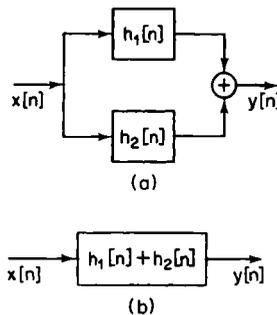


Bild 2.12 (a) Die Parallelschaltung linearer zeitinvarianter Systeme. (b) Ein äquivalentes System.

ist in Bild 2.11 zusammengefaßt, in welchem alle drei Varianten die gleiche Impulsantwort besitzen.

In einer *Parallelschaltung* haben die Teilsysteme das gleiche Eingangssignal, und die einzelnen Ausgangssignale werden zu einem Gesamtausgangssignal aufsummiert. Aus den distributiven Eigenschaften der Faltung folgt, daß zwei parallel geschaltete, lineare zeitinvariante Systeme äquivalent zu einem System sind, dessen Impulsantwort sich aus der Summe der einzelnen Impulsantworten zusammensetzt

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]. \quad (2.51)$$

Dies ist in Bild 2.12 dargestellt.

Die Bedingungen für Linearität und Zeitinvarianz definieren eine Klasse von Systemen mit sehr speziellen Eigenschaften. Die Stabilität und Kausalität stellen zusätzliche Eigenschaften dar, und es ist oft wichtig zu wissen, ob ein lineares zeitinvariantes System stabil ist und ob es kausal ist. Wie in Absatz 2.2.5 besprochen, führt ein beschränktes Eingangssignal bei einem stabilen System zu einem beschränkten Ausgangssignal. Lineare zeitinvariante Systeme sind genau dann stabil, wenn die Impulsantwort absolut summierbar ist, d. h. , wenn gilt

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty. \quad (2.52)$$

Dies kann, wie folgt, gezeigt werden. Nach Gleichung (2.49) gilt

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]|. \quad (2.53)$$

Ist $x[n]$ beschränkt, so daß

$$|x[n]| \leq B_x,$$

dann folgt

$$|y[n]| \leq B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|. \quad (2.54)$$

Deshalb ist das Ausgangssignal $y[n]$ beschränkt, wenn Gleichung (2.52) erfüllt ist; das heißt, die Gleichung (2.52) ist eine hinreichende Bedingung für Stabilität. Um zu zeigen, daß sie ebenfalls auch eine notwendige Bedingung ist, müssen wir zeigen, daß für den Fall $S = \infty$ ein Eingangssignal gefunden werden kann, das ein unbeschränktes Ausgangssignal erzeugt. Die nachstehende Folge beschreibt so ein Eingangssignal:

$$x[n] = \begin{cases} \frac{h^*[-n]}{|h[-n]|}, & h[n] \neq 0, \\ 0, & h[n] = 0, \end{cases} \quad (2.55)$$

wobei $h^*[n]$ der konjugiert komplexe Wert von $h[n]$ ist. Die Folge $h[n]$ ist offensichtlich durch den Wert Eins beschränkt. Dennoch beträgt der Wert des Ausgangssignals für $n = 0$

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h[k]|^2}{|h[k]|} = S. \quad (2.56)$$

Da S gegen Unendlich geht, ist es demnach möglich, mit einer beschränkten Eingangsfolge eine unbeschränkte Ausgangsfolge zu erzeugen.

Die Klasse der kausalen Systeme wurde bereits in Absatz 2.2.4 als diejenigen Systeme definiert, bei denen das Ausgangssignal $y[n_0]$ nur von Eingangswerten $x[n]$ mit $n \leq n_0$ abhängt. Aus Gleichung (2.39) oder Gleichung (2.49) folgt, daß diese Definition die folgende Bedingung für die Kausalität linearer zeitinvarianter Systeme impliziert:

$$h[n] = 0, \quad n < 0 \quad (2.57)$$

(vergleiche Aufgabe 2.12). Aus diesem Grund ist es auch gelegentlich üblich, von einer Folge, die für $n < 0$ verschwindet, als einer kausalen Folge zu sprechen. Damit ist gemeint, daß diese Folge die Impulsantwort eines kausalen Systems sein könnte.

Um zu demonstrieren, wie sich die Eigenschaften linearer zeitinvarianter Systeme in ihrer Impulsantwort widerspiegeln, greifen wir noch einmal auf die Beispiele 2.1-2.6 zurück. Zunächst ist zu beachten, daß nur die Beispiele 2.1, 2.2, 2.4 und 2.6 lineare und zeitinvariante Systeme sind. Obwohl auch die Impulsantworten nichtlinearer oder zeitvarianter Systeme gefunden werden können, sind diese nur von begrenztem Interesse, da die Faltungsvorschrift und die Gleichungen (2.52) und (2.57) über Stabilität und Kausalität nicht für derartige Systeme angewendet werden können.

Zuerst sollen die Impulsantworten der Systeme aus den Beispielen 2.1, 2.2, 2.4 und 2.6 berechnet werden. Dafür berechnen wir die Antwort eines jeden Systems auf $\delta[n]$ und verwenden dafür die Definitionsgleichungen der Systeme. Die resultierenden Impulsantworten ergeben sich zu:

Ideale Verzögerungsstufe (Beispiel 2.1)

$$h[n] = \delta[n - n_d], \quad \text{mit } n_d \text{ als positiver ganzer Zahl} \quad (2.58)$$

Kurzzeitmittelwert (moving average) (Beispiel 2.2)

$$h[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n - k]$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.59)$$

Akkumulator (Beispiel 2.4)

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k]$$

$$= \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$= u[n] \quad (2.60)$$

Vorwärtsdifferenz (Beispiel 2.6)

$$h[n] = \delta[n + 1] - \delta[n] \quad (2.61)$$

Rückwärtsdifferenz (Beispiel 2.6)

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n - 1] \quad (2.62)$$

Als nächstes wollen wir die Stabilität dieser Systeme untersuchen. Dazu berechnen wir die Summe

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|.$$

Für die ideale Verzögerungsstufe, den Kurzzeitmittelwert, die Vorwärtsdifferenz und die Rückwärtsdifferenz ist es offensichtlich, daß $S < \infty$ gilt, da die

Impulsantworten jeweils nur einige von Null verschiedene Werte besitzen. Solche Systeme werden FIR-Systeme (*finite-duration impulse response*) genannt. Offensichtlich werden FIR-Systeme immer stabil sein, solange die Werte der Impulsantwort von endlicher Amplitude sind. Der Akkumulator ist jedoch instabil, da gilt

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u[n] = \infty.$$

In Absatz 2.2.5 wurde bereits die Instabilität des Akkumulators demonstriert, indem ein Beispiel eines begrenzten Eingangssignals (Einheitsprung) angegeben wurde, für welches das Ausgangssignal unbegrenzt ist.

Die Impulsantwort des Akkumulators ist von unbegrenzter Dauer. Dies ist ein Beispiel für die Klasse der IIR-Systeme (*infinite-duration impulse response*). Ein Beispiel eines IIR-Systems, das stabil ist, findet man für die Impulsantwort $h[n] = a^n u[n]$ mit $|a| < 1$. In diesem Fall ist

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n. \quad (2.63)$$

Für $|a| < 1$ ergibt die Berechnungsformel für die Summe der Glieder einer unendlichen geometrischen Reihe

$$S = \frac{1}{1 - |a|} < \infty. \quad (2.64)$$

Ist hingegen $|a| \geq 1$, so strebt der Wert der Summe gegen Unendlich, und das System ist instabil.

Um die Kausalität der linearen zeitinvarianten Systeme der Beispiele 2.1, 2.2, 2.4 und 2.6 zu prüfen, können wir untersuchen, ob $h[n] = 0$ für $n < 0$ gilt. Gemäß dem Absatz 2.2.4 ist die ideale Verzögerungsstufe ($n_d \geq 0$ in Gleichung 2.22) kausal. Für $n_d < 0$ wäre das System nichtkausal. Für die Bildung des beweglichen Mittelwertes erfordert die Kausalität, daß $-M_1 \geq 0$ und $M_2 \geq 0$ ist. Der Akkumulator und das Rückwärtsdifferenzensystem sind kausal, das Vorwärtsdifferenzensystem ist nichtkausal.

Die Eigenschaften der Faltung können zur Beschreibung und Analyse von Zusammenschaltungen linearer zeitinvarianter Systeme verwendet werden. Dazu stellen wir uns ein System nach Bild 2.13(a) vor, das aus einem Vorwärtsdifferenzensystem und einer nachgeschalteten idealen Einheitsverzögerungsstufe besteht. In Anlehnung an die kommutative Eigenschaft der Faltung spielt die Reihenfolge der kaskadierten Systeme keine Rolle, solange die Systeme linear und zeitinvariant sind. Deshalb erhalten wir dasselbe Resultat, ob wir nun erst die Vorwärtsdifferenz berechnen und das Ergebnis verzögern (Bild 2.13(a)), oder ob wir zunächst die Folge verzögern und dann die Vorwärtsdifferenz berechnen (Bild 2.13(b)). Aus Gleichung (2.50) folgt außerdem, daß die Impulsantwort des Gesamtsystems aus der Faltung der Impulsantworten der Teilsysteme entsteht. Deshalb gilt

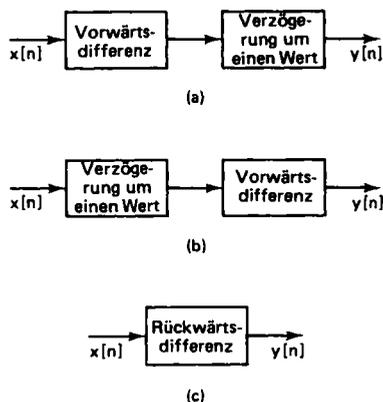


Bild 2.13 Äquivalente Systeme, die durch Anwendung der kommutativen Eigenschaften der Faltung gefunden wurden.

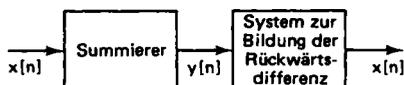


Bild 2.14 Reihenschaltung eines Akkumulators und eines Rückwärtsdifferenzsystems. Da die Rückwärtsdifferenz das inverse System zum Akkumulator darstellt, ist die Reihenschaltung gerade ein Eins-System.

$$\begin{aligned}
 h[n] &= (\delta[n+1] - \delta[n]) * \delta[n-1] \\
 &= \delta[n-1] * (\delta[n+1] - \delta[n]) \\
 &= \delta[n] - \delta[n-1].
 \end{aligned}
 \tag{2.65}$$

Somit ist $h[n]$ mit der Impulsantwort des Systems zur Bildung der Rückwärtsdifferenz identisch. Die Reihenschaltungen aus den Bildern 2.13(a) und 2.13(b) können demnach durch das Rückwärtsdifferenzsystem aus Bild 2.13(c) ersetzt werden.

Man beachte, daß das nichtkausale System zur Bildung der Vorwärtsdifferenz in den Bildern 2.13(a) und (b) durch eine Reihenschaltung mit einer Verzögerungsstufe in ein kausales System verwandelt wurde. Im allgemeinen kann jedes nichtkausale FIR-System durch eine Reihenschaltung mit einer ausreichend langen Verzögerung kausal gemacht werden.

Ein anderes Beispiel kaskadierter Systeme führt das Konzept *inverser Systeme* ein. Wir nehmen eine Reihenschaltung zweier Systeme wie in Bild 2.14 an. Die Impulsantwort des Gesamtsystems berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
 h[n] &= u[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) \\
 &= u[n] - u[n-1] \\
 &= \delta[n].
 \end{aligned}
 \tag{2.66}$$

Dies bedeutet, daß die Reihenschaltung eines Akkumulators und einer Stufe zur Bildung der Rückwärtsdifferenz (oder umgekehrt) zu einem System führt, dessen Impulsantwort gerade der Impuls selbst ist. Damit wird das Ausgangssignal dieses Systems das Eingangssignal selbst sein: $x[n] * \delta[n] = x[n]$. In diesem Fall kompensiert (oder invertiert) die Rückwärtsdifferenz exakt den Akkumulator, d. h. das System zur Bildung der Rückwärtsdifferenz ist das inverse System zum Akkumulator. Aus den kommutativen Eigenschaften der Faltung ergibt sich, daß natürlich auch der Akkumulator das inverse System zum Rückwärtsdifferenzensystem ist. Man beachte auch, daß dieses Beispiel zu einer Systeminterpretation der Gleichungen (2.8) und (2.10) führt. So gilt allgemein, daß für ein lineares zeitinvariantes System der Impulsantwort $h[n]$ das inverse System, falls es existiert, die Impulsantwort $h_i[n]$ besitzt, die definiert ist durch

$$h[n] * h_i[n] = h_i[n] * h[n] = \delta[n]. \quad (2.67)$$

Inverse Systeme sind in vielen Fällen nützlich, in denen Auswirkungen eines linearen Systems kompensiert werden sollen. Im allgemeinen ist es allerdings schwierig, die Gleichung (2.67) bei gegebenem $h[n]$ nach $h_i[n]$ aufzulösen. In dem später folgenden Kapitel 5 werden jedoch die Fourier-Transformation und die allgemeinere z -Transformation vorgestellt, die einfache Methoden zur Bestimmung inverser Systeme bereitstellen.

2.5 Lineare Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Eine wichtige Unterklasse linearer zeitinvarianter Systeme besteht aus jenen Systemen, die eine lineare Differenzgleichung N -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten erfüllen, so daß

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{n=0}^M b_n x[n-n]. \quad (2.68)$$

Die Eigenschaften, die in dem Abschnitt 2.4 untersucht wurden und einige der Analysemethoden, die dort eingeführt wurden, können benutzt werden, um die Differenzgleichungen für einige der vorgestellten, linearen zeitinvarianten Systeme zu bestimmen.

Beispiel 2.9:

Ein Beispiel aus der Klasse der linearen Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten ist der Akkumulator (Beispiel 2.4). Um zu zeigen, daß seine Ein- und Ausgangsfolgen so eine Differenzgleichung erfüllen, betrachten wir wiederum das Bild 2.14. Wenn $y[n]$ das Ausgangssignal des Akkumulators darstellt, dann ist, wie wir schon gesehen haben, die Rückwärtsdifferenz von $y[n]$ identisch mit $x[n]$, da das Rückwärtsdifferenzensystem zum Akkumulator invers ist; d. h.

$$y[n] - y[n-1] = x[n]. \quad (2.69)$$

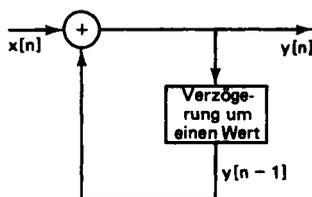


Bild 2.15 Blockdiagramm einer rekursiven Differenzgleichung zur Beschreibung eines Akkumulators.

Damit haben wir gezeigt, daß die Ein- und Ausgangsfolgen neben ihrer Definitionsgleichung (2.28), die in Form einer Faltung beschrieben ist, auch die lineare Differenzgleichung mit konstanten Koeffizienten in einer Form nach Gleichung (2.68) erfüllen, bei der $N = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $M = 0$ und $b_0 = 1$ ist.

Man erkennt leichter, daß die Differenzgleichung aus Gleichung (2.69) eine Beschreibung des Akkumulators ist, wenn man sie umschreibt zu

$$y[n] = y[n - 1] + x[n]. \quad (2.70)$$

Gemäß der Gleichung (2.70) addieren wir für jeden Wert von n den aktuellen Eingangswert $x[n]$ zu der bis dahin gebildeten Summe $y[n - 1]$. Diese Interpretation des Akkumulators ist in Bild 2.15 als Blockdiagramm dargestellt. Die Gleichung (2.70) und das Blockdiagramm in Bild 2.15 werden als die *rekursive Darstellung* des Systems bezeichnet, da jeder Wert aus den vorher berechneten Werten gebildet wird. Diese allgemeine Vorstellung wird im Laufe dieses Abschnittes noch ausführlicher untersucht werden.

Beispiel 2.10:

Als nächstes beschäftigen wir uns mit dem System zur Bildung des Kurzzeitmittelwertes aus Beispiel 2.2 mit $M_1 = 0$, so daß das System kausal ist. In diesem Fall ergibt sich die Impulsantwort nach Gleichung (2.59) zu

$$h[n] = \frac{1}{(M_2 + 1)} (u[n] - u[n - M_2 - 1]), \quad (2.71)$$

aus welcher folgt, daß

$$y[n] = \frac{1}{(M_2 + 1)} \sum_{k=0}^{M_2} x[n - k], \quad (2.72)$$

welches einen Spezialfall der Gleichung (2.68) darstellt, bei dem $N = 0$, $a_0 = 1$ und $b_k = 1/(M_2 + 1)$ für $0 \leq k \leq M_2$ ist. Die Impulsantwort kann auch ausgedrückt werden durch

$$h[n] = \frac{1}{(M_2 + 1)} (\delta[n] - \delta[n - M_2 - 1]) * u[n], \quad (2.73)$$

wodurch nahegelegt wird, das kausale Systems zur Bildung des Kurzzeitmittelwertes als Reihenschaltungssystem nach Bild 2.16 dargestellt werden kann. Wir können eine Differenzgleichung für dieses Blockdiagramm erhalten, indem wir zunächst festhalten, daß

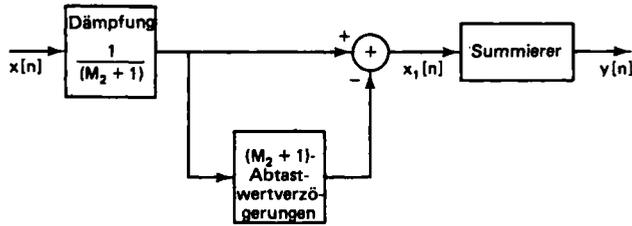


Bild 2.16 Blockdiagramm der rekursiven Form des Systems zur Bildung des Kurzzeitmittelwertes.

$$x_1[n] = \frac{1}{(M_2 + 1)} (x[n] - x[n - M_2 - 1]). \tag{2.74}$$

Nach der Gleichung (2.69) des Beispiels 2.9 erfüllt die Ausgangsfolge des Akkumulators die Differenzgleichung

$$y[n] - y[n - 1] = x_1[n]$$

und daraus folgt

$$y[n] - y[n - 1] = \frac{1}{(M_2 + 1)} (x[n] - x[n - M_2 - 1]). \tag{2.75}$$

Wieder erhalten wir eine Differenzgleichung mit einer Form nach Gleichung (2.68), dieses Mal mit $N = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $M = 0$ und $b_0 = -b_{M_2+1} = 1/(M_2 + 1)$.

Interessanterweise gibt es einige verschiedene Formen von Differenzgleichungen zur Darstellung des Kurzzeitmittelwertes. In Kapitel 6 werden wir sehen, daß es eine unbegrenzte Anzahl verschiedener Differenzgleichungen zur Beschreibung einer gegebenen, linearen zeitinvarianten Ein- Ausgangsbeziehung gibt.

Genau wie bei den linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten für zeitkontinuierliche Systeme, gilt auch bei den linearen Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten für zeitdiskrete Systeme, daß ohne zusätzliche Bedingungen oder Informationen keine eindeutige Bestimmung des Ausgangssignals bei gegebenem Eingangssignal möglich ist. Nehmen wir einmal an, daß wir für eine gegebene Eingangsfolge $x_p[n]$ irgendwie eine Ausgangsfolge $y_p[n]$ bestimmt haben, die eine Gleichung der Form nach Gleichung (2.68) erfüllt. Dann wird dieselbe Gleichung mit derselben Eingangsfolge auch durch solche Ausgangsfolgen erfüllt, für die

$$y[n] = y_p[n] + y_h[n], \tag{2.76}$$

wobei $y_h[n]$ irgendeine Lösung der Gleichung (2.68) mit $x[n] = 0$ ist, d. h. der Gleichung

$$\sum_{k=0}^N a_k y_h[n - k] = 0. \tag{2.77}$$

Die Gleichung (2.77) wird als *homogene Gleichung* und $y_h[n]$ als *homogene Lösung* bezeichnet. Tatsächlich gehört die Folge $y_h[n]$ zu einer Lösungsschar der Form

$$y_h[n] = \sum_{m=1}^N A_m z_m^n. \quad (2.78)$$

Durch Einsetzen der Gleichung (2.78) in Gleichung (2.77) ergibt sich, daß die komplexen Zahlen z_m die Nullstellen des folgenden Polynoms sein müssen:

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = 0. \quad (2.79)$$

Für die Gleichung (2.78) wurde angenommen, daß alle N Nullstellen des Polynoms in Gleichung (2.79) verschieden sind. Die Gestalt der Terme, die mit mehrfachen Nullstellen assoziiert sind, sieht etwas anders aus, dennoch existieren immer N unbestimmte Koeffizienten. Ein Beispiel einer homogenen Lösung mit mehrfachen Nullstellen wird in Aufgabe 2.13 behandelt.

Da $y_h[n]$ N unbestimmte Koeffizienten besitzt, ist ein Satz von N Zusatzbedingungen erforderlich, um die Ausgangsfolge $y[n]$ für eine gegebene Eingangsfolge $x[n]$ eindeutig festzulegen. Diese Zusatzbedingungen könnten darin bestehen, an bestimmten Werten von n feste Werte für $y[n]$ vorzuschreiben, wie z. B. für $y[-1]$, $y[-2]$, ..., $y[-N]$ und anschließend ein lineares Gleichungssystem nach den N unbekanntenen Koeffizienten aufzulösen.

Alternativ dazu können, wenn die Zusatzbedingungen aus einem Satz von Randbedingungen für $y[n]$ bestehen, die anderen Werte von $y[n]$ erzeugt werden, indem die Gleichung (2.68) in eine Rekursionsformel umgeschrieben wird, so daß

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y[n-k] + \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x[n-k]. \quad (2.80)$$

Wenn sowohl die Eingangsfolge $x[n]$ als auch ein Satz von Randbedingungen, z. B. $y[-1]$, $y[-2]$, ..., $y[-N]$, festgelegt ist, dann kann $y[0]$ über Gleichung (2.80) bestimmt werden. Ist dann $y[0]$, $y[-1]$, $y[-2]$, ..., $y[-N+1]$ bekannt, so kann $y[1]$ berechnet werden usw. . Verwendet man dieses Verfahren, so sagt man, daß $y[n]$ *rekursiv* berechnet wird. Das bedeutet, die Berechnung des Ausgangswertes verwendet nicht nur die Eingangsfolge, sondern auch vorangegangene Werte der Ausgangsfolge.

Um Werte von $y[n]$ für $n < -N$ zu berechnen (wieder unter der Annahme, daß die Randbedingungen für $y[-1]$, $y[-2]$, ..., $y[-N]$ bekannt sind), können wir Gleichung (2.68) umstellen zu

$$y[n-N] = - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{a_N} y[n-k] + \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x[n-k], \quad (2.81)$$

wodurch $y[-N-1]$, $y[-N-2]$, ... rekursiv berechnet werden können. Das folgende Beispiel veranschaulicht dieses rekursive Vorgehen.

Beispiel 2.11:

Die Differenzgleichung, die durch die Ein- und Ausgangssignale eines Systems erfüllt wird, laute

$$y[n] = ay[n-1] + x[n]. \quad (2.82)$$

Gegeben seien das Eingangssignal $x[n] = K\delta[n]$, wobei K eine beliebige Zahl ist und die Randbedingung $y[-1] = c$. Mit diesem Anfangswert kann das Ausgangssignal für $n > -1$, wie folgt, rekursiv berechnet werden:

$$\begin{aligned} y[0] &= ac + K, \\ y[1] &= ay[0] + 0 \\ &= a(ac + K) = a^2c + aK, \\ y[2] &= a(a^2c + aK) = a^3c + a^2K, \\ y[3] &= a(a^3c + a^2K) = a^4c + a^3K, \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

In diesem einfachen Fall erkennen wir, daß $y[n]$ für $n \geq 0$ gegeben ist durch

$$y[n] = a^{n+1}c + a^nK \quad \text{für } n \geq 0. \quad (2.83)$$

Um das Ausgangssignal für $n < 0$ zu bestimmen, formen wir die Differenzgleichung um zu

$$y[n-1] = a^{-1}(y[n] - x[n]), \quad (2.84a)$$

oder mit einer Substitution

$$y[n] = a^{-1}(y[n+1] - x[n+1]). \quad (2.84b)$$

Mit der Randbedingung $y[-1] = c$ können wir $y[n]$ für $n < -1$ bestimmen durch

$$\begin{aligned} y[-2] &= a^{-1}\{y[-1] - x[-1]\} \\ &= a^{-1}c, \\ y[-3] &= a^{-1}a^{-1}c = a^{-2}c, \\ y[-4] &= a^{-1}a^{-2}c = a^{-3}c. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt

$$y[n] = a^{n+1}c \quad \text{für } n \leq -1. \quad (2.85)$$

Zusammenfassend erhalten wir mit den Gleichungen (2.83) und (2.85) als Ergebnis der rekursiven Berechnung:

$$y[n] = a^{n+1}c + Ka^n u[n] \quad \text{für alle } n. \quad (2.86)$$

Mit diesem Beispiel 2.11 werden verschiedene wesentliche Aspekte beleuchtet. Zunächst beachte man, daß wir das System durch eine rekursive Berechnung des Ausgangssignals in beiden Richtungen (positive und negative Werte für n) realisierten, wobei wir jeweils mit $n = -1$ begonnen haben. Dieses Verfahren ist zweifelsfrei nichtkausal. Außerdem ist zu beachten, daß mit

$K = 0$, einem verschwindenden Eingangssignal, dennoch das Ausgangssignal $y[n] = a^{n+1}c$ auftritt. Bei einem linearen System muß das Ausgangssignal für alle Zeiten identisch Null sein, sofern Eingangssignal identisch Null ist (siehe Aufgabe 2.1). Dementsprechend ist dieses System nichtlinear. Würde man die Eingangsfolge um n_0 Abtastwerte verschieben, d. h. $x_1[n] = K\delta[n - n_0]$, dann würde sich die Ausgangsfolge überdies ergeben zu

$$y_1[n] = a^{n+1}c + Ka^{n-n_0}u[n - n_0], \quad (2.87)$$

und deshalb ist das System auch nicht zeitinvariant.

Unser Hauptinteresse in diesem Buch gilt Systemen, die linear und zeitinvariant sind. Deshalb müssen auch die Randbedingungen mit diesen Eigenschaften konsistent sein. In Kapitel 4, in dem wir die Lösung von Differenzgleichungen mittels der z -Transformation diskutieren, werden wir die Bedingungen der Linearität und Zeitinvarianz implizit voraussetzen. Wie wir dort sehen werden, ist selbst mit den zusätzlichen Bedingungen der Linearität und der Zeitinvarianz die Lösung einer Differenzgleichung nicht eindeutig definiert. Insbesondere gibt es im allgemeinen sowohl kausale als auch nichtkausale zeitinvariante Systeme, die eine gegebene Differenzgleichung erfüllen.

Wenn ein System durch eine lineare Differenzgleichung mit konstanten Koeffizienten charakterisiert wird und ferner die Eigenschaften der Linearität, der Kausalität und der Zeitinvarianz gefordert werden, so ist die Lösung eindeutig. In diesem Fall werden die Randbedingungen oft als *Anfangsruhezustand* bezeichnet. Mit anderen Worten, die Randbedingungen bestehen aus der Information, daß für ein Eingangssignal $x[n]$, das bis zu einem Zeitpunkt n_0 identisch Null war, auch das Ausgangssignal für $n < n_0$ zwingend Null ist. Dies stellt ausreichende Anfangsbedingungen zur Verfügung, um $y[n]$ für $n \geq n_0$ rekursiv zu berechnen.

Zusammenfassend gilt für ein System, dessen Ein- und Ausgangssignale eine lineare Differenzgleichung mit konstanten Koeffizienten erfüllen:

- Das Ausgangssignal ist für ein gegebenes Eingangssignal nicht eindeutig bestimmt. Es sind zusätzliche Randbedingungen erforderlich.
- Wenn die Randbedingungen aus N aufeinanderfolgenden Ausgangswerten bestehen, können folgende Werte durch eine Umformung der Gleichung in eine Rekursionsformel, die mit n fortschreitet, berechnet werden. Zurückliegende Werte können durch eine Umstellung der Differenzgleichung in eine Rekursionsformel mit zurücklaufendem n berechnet werden.
- Die Linearität, Zeitinvarianz und Kausalität des Systems hängen von den Randbedingungen ab. Beschreiben die Randbedingungen den Anfangsruhezustand, so ist das System linear, zeitinvariant und kausal.

Mit diesen Ergebnissen betrachten wir erneut das Beispiel 2.11, nun allerdings mit den Anfangsruhebedingungen. Mit $x[n] = K\delta[n]$ und $y[-1] = 0$, da $x[n] = 0$ für $n < 0$, ergibt sich

$$y[n] = K a^n u[n]. \quad (2.88)$$

Lautet das Eingangssignal stattdessen $K\delta[n - n_0]$ und wird wieder der Anfangsruhezustand angenommen, dann wird die rekursive Lösung mit Hilfe der Randbedingungen $y[n] = 0$ für $n < n_0$ ausgeführt. Man beachte, daß die Anfangsruhebedingung für $n_0 < 0$ erfordert, daß $y[-1] \neq 0$ ist. Dies bedeutet, daß die Anfangsruhebedingung nicht zwangsläufig fordert, daß $y[-1] = \dots = y[-N]$ identisch Null sind. Vielmehr bedeutet es, daß $y[n_0 - 1] = \dots = y[n_0 - N] = 0$ ist, sofern $x[n] = 0$ für $n < n_0$ gilt. Weiterhin ist zu beachten, daß die Impulsantwort für dieses Beispiel $h[n] = a^n u[n]$ lautet, d. h. sie verschwindet für $n < 0$ und das ist konsistent zur Kausalität, die mit der Annahme der Anfangsruhebedingung eingebracht wird.

Die vorangegangene Diskussion ging davon aus, daß die Ordnung N in der Gleichung (2.68) größer als Null ist. Falls in Gleichung (2.68) $N = 0$ gilt, ist keine Rekursion zur Berechnung des Ausgangssignals erforderlich, und daher werden auch keine Anfangsbedingungen benötigt. Dies bedeutet

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \left(\frac{b_k}{a_0} \right) x[n - k]. \quad (2.89)$$

Die Gleichung (2.89) nimmt die Form einer Faltung an, und indem man $x[n] = \delta[n]$ setzt, können wir die Impulsantwort berechnen zu

$$h[n] = \sum_{k=0}^M \left(\frac{b_k}{a_0} \right) \delta[n - k],$$

oder

$$h[n] = \begin{cases} \left(\frac{b_n}{a_0} \right), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.90)$$

Die Impulsantwort ist offensichtlich von endlicher Dauer. Tatsächlich kann das Ausgangssignal jedes FIR-Systems nichtrekursiv mit der Gleichung (2.89) berechnet werden, wobei die Koeffizienten die Werte der Impulsantwort sind. Das Beispiel 2.10 eines Kurzzeitmittelwertsystems ist mit $M_1 = 0$ ein Beispiel eines kausalen FIR-Systems. Ein interessanter Aspekt dieses Systems ist, daß wir für dieses System auch eine rekursive Gleichung für das Ausgangssignal bestimmen konnten. In Kapitel 6 werden wir sehen, daß es mannigfaltige Möglichkeiten gibt, eine gewünschte Signaltransformation mit Differenzgleichungen zu realisieren. Die Vorteile der einen oder anderen Methode hängen von praktischen Gegebenheiten ab, wie der Rechengenauigkeit, dem Speicherplatz und der Anzahl von Multiplikationen und Additionen für die Bestimmung der Ausgangswerte.

2.6 Darstellung zeitdiskreter Signale und Systeme im Frequenzbereich

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir einige grundlegende Konzepte der Theorie zeitdiskreter Signale und Systeme eingeführt. Für lineare zeitinvariante Systeme haben wir gesehen, daß eine Darstellung der Eingangsfolge als gewichtete Summe von verzögerten Impulsen zu einer Darstellung der Ausgangsfolge als eine gewichtete Summe von verzögerten Impulsantworten führt. Genau wie zeitkontinuierliche Signale können auch zeitdiskrete Signale auf mehrere verschiedene Arten dargestellt werden. Beispielsweise spielen sinusförmige Folgen und komplexe Exponentialfolgen eine besonders wichtige Rolle in der Darstellung zeitdiskreter Signale. Dies begründet sich darauf, daß komplexe Exponentialfolgen Eigenfunktionen der linearen zeitinvarianten Systeme sind und die Systemantwort auf eine sinusförmige Eingangsfolge eine Sinusfunktion derselben Frequenz ist, deren Amplitude und Phase vom System bestimmt werden. Diese fundamentale Eigenschaft linearer zeitinvarianter Systeme macht die Darstellung von Signalen als Sinusfunktionen oder als komplexe Exponentialfunktionen (d. h. Fourier-Darstellungen) unerlässlich für die Theorie linearer Systeme.

Um die Eigenschaften der Eigenfunktion komplexer Exponentialfunktionen bezüglich zeitdiskreter Systeme zu zeigen, betrachten wir die Eingangsfolge $x[n] = e^{j\omega n}$ mit $-\infty < n < \infty$, d. h. eine komplexe Exponentialfunktion mit der Kreisfrequenz ω . Nach Gleichung (2.49) berechnet sich das entsprechende Ausgangssignal eines linearen zeitinvarianten Systems der Impulsantwort $h[n]$ zu

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega(n-k)} \\ &= e^{j\omega n} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right). \end{aligned} \quad (2.91)$$

Mit der Definition

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}, \quad (2.92)$$

wird aus der Gleichung (2.91)

$$y[n] = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}. \quad (2.93)$$

Demnach ist $e^{j\omega n}$ eine Eigenfunktion des Systems mit dem dazugehörigen Eigenwert $H(e^{j\omega})$. Der Gleichung (2.93) ist zu entnehmen, daß $H(e^{j\omega})$ die Änderung der komplexen Amplitude einer komplexen Exponentialfunktion als Funktion der Frequenz ω beschreibt. Der Eigenwert $H(e^{j\omega})$ wird als der *Frequenzgang* oder die *Übertragungsfunktion* des Systems bezeichnet. Im allgemeinen ist $H(e^{j\omega})$ komplex und kann mit Hilfe seines Real- und Imaginärteils beschrieben werden

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega}) \quad (2.94)$$

oder als Funktion des Amplituden- und Phasengangs

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j \star H(e^{j\omega})}. \quad (2.95)$$

Beispiel 2.12:

Als ein einfaches Beispiel dafür, wie wir den Frequenzgang eines linearen zeitinvarianten Systems bestimmen können, betrachten wir ein ideales Verzögerungssystem, das definiert ist durch

$$y[n] = x[n - n_d], \quad (2.96)$$

wobei n_d eine feste ganze Zahl ist. Wählen wir $x[n] = e^{j\omega n}$ als Eingangsfolge des Systems, so erhalten wir aus Gleichung (2.96)

$$y[n] = e^{j\omega(n - n_d)} = e^{-j\omega n_d} e^{j\omega n}.$$

Somit erhalten wir für jeden gegebenen Wert von ω einen Ausgangswert, der sich aus dem Produkt des Eingangssignals mit einer komplexen Konstanten, deren Wert von ω abhängt, zusammensetzt. Die Übertragungsfunktion des idealen Verzögerungssystems lautet demnach

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}. \quad (2.97)$$

Um die Übertragungsfunktion mit einer anderen Methode zu bestimmen, erinnern wir uns daran, daß für ein ideales Verzögerungssystem $h[n] = \delta[n - n_d]$ gilt. Mit Hilfe von Gleichung (2.92) erhalten wir

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_d] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_d}.$$

Mit der Euler-Gleichung bestimmen wir den Real- und Imaginärteil der Übertragungsfunktion zu

$$H_R(e^{j\omega}) = \cos \omega n_d, \quad (2.98a)$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega k} \quad (2.98b)$$

Der Betrag und die Phase lauten

$$|H(e^{j\omega})| = 1, \quad (2.99a)$$

$$\star H(e^{j\omega}) = -\omega n_d. \quad (2.99b)$$

In Abschnitt 2.7 werden wir zeigen, daß eine große Klasse von Signalen als Linearkombination komplexer Exponentialfunktionen in der folgenden Form dargestellt werden kann:

$$x[n] = \sum_k \alpha_k e^{j\omega_k n}. \quad (2.100)$$

Mit dem Superpositionsprinzip ergibt sich das dazugehörige Ausgangssignal eines linearen zeitinvarianten Systems zu

$$y[n] = \sum_k \alpha_k H(e^{j\omega_k}) e^{j\omega_k n}. \quad (2.101)$$

Daher können wir das Ausgangssignal nach Gleichung (2.101) bestimmen, wenn wir $x[n]$ gemäß Gleichung (2.100) durch eine Summe von komplexen Exponentialfunktionen darstellen können und die Übertragungsfunktion $H(e^{j\omega})$ des Systems kennen. Das folgende einfache Beispiel illustriert diese fundamentale Eigenschaft linearer zeitinvarianter Systeme.

Beispiel 2.13:

Da es leicht ist, eine sinusförmige Funktion als Linearkombination komplexer Exponentialfunktionen zu formulieren, nehmen wir eine sinusförmige Eingangsfolge an

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}. \quad (2.102)$$

Nach Gleichung (2.93) ergibt sich die Systemantwort auf $x_1[n] = (A/2)e^{j\phi} e^{j\omega_0 n}$ zu

$$y_1[n] = H(e^{j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n}. \quad (2.103a)$$

Die Antwort auf $x_2[n] = (A/2)e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}$ lautet

$$y_2[n] = H(e^{-j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}. \quad (2.103b)$$

Daher folgt für die Gesamtantwort

$$y[n] = \frac{A}{2} [H(e^{j\omega_0}) e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0}) e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}]. \quad (2.104)$$

Wenn $h[n]$ reell ist, kann gezeigt werden, daß $H(e^{-j\omega_0}) = H^*(e^{j\omega_0})$ ist (siehe auch Aufgabe 2.26). Folglich gilt

$$y[n] = A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \phi + \theta), \quad (2.105)$$

wobei $\theta = \angle H(e^{j\omega_0})$ die Phase des Systems an der Frequenz ω_0 ist.

Für das einfache Beispiel einer idealen Verzögerungsstufe haben wir in Beispiel 2.12 bestimmt, daß $|H^*(e^{j\omega_0})| = 1$ und $\theta = -\omega_0 n_d$ gilt. Deshalb ist

$$\begin{aligned} y[n] &= A \cos(\omega_0 n + \phi - \omega_0 n_d) \\ &= A \cos[\omega_0(n - n_d) + \phi], \end{aligned} \quad (2.106)$$

was zu dem Ergebnis konsistent ist, das wir auch direkt durch die Anwendung der Definition des idealen Verzögerungssystems erhalten hätten.

Die Vorstellung des Frequenzgangs eines linearen zeitinvarianten Systems ist für zeitkontinuierliche und zeitdiskrete Systeme im wesentlichen gleich. Ein wichtiger Unterschied entsteht jedoch daraus, daß der Frequenzgang eines zeitdiskreten, linearen zeitinvarianten Systems *immer* eine 2π -periodische Funktion in der Variablen ω ist. Um dies zu zeigen, ersetzen wir ω in Gleichung (2.92) durch $\omega + 2\pi$ und erhalten

$$H[e^{j(\omega+2\pi)}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j(\omega+2\pi)n}. \quad (2.107)$$

Mit der Tatsache, daß für alle ganzzahligen n $e^{\pm j2\pi n} = 1$ gilt, erhalten wir

$$e^{-j(\omega+2\pi)n} = e^{-j\omega n}e^{-j2\pi n} = e^{-j\omega n}.$$

Dies führt zu

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = H(e^{j\omega}) \quad (2.108)$$

und, allgemeiner gilt für ein beliebiges ganzzahliges r

$$H(e^{j(\omega+2\pi r)}) = H(e^{j\omega}) \quad (2.109)$$

d. h. $H(e^{j\omega})$ ist periodisch mit der Periode 2π . Bemerkenswert ist, daß dies offensichtlich auch für das ideale Verzögerungssystem zutrifft, da $e^{-j(\omega+2\pi)n_d} = e^{-j\omega n_d}$ ist, wenn n_d eine ganze Zahl ist.

Der Grund für diese Periodizität liegt in der bereits früher beobachteten Tatsache, daß die Folge

$$\{e^{j\omega n}\}, \quad -\infty < n < \infty,$$

von der folgenden Sequenz nicht unterscheidbar ist:

$$\{e^{j(\omega+2\pi)n}\}, \quad -\infty < n < \infty.$$

Da diese beiden Folgen für alle n die gleichen Werte besitzen, muß sich das System für beide Eingangsfolgen gleich verhalten. Daher muß auch Gleichung (2.108) erfüllt sein.

Da $H(e^{j\omega})$ periodisch mit der Periode 2π ist und da die Frequenzen ω und $\omega+2\pi$ nicht zu unterscheiden sind, reicht es aus, $H(e^{j\omega})$ nur in einem Intervall der Länge 2π anzugeben, z. B. $0 \leq \omega \leq 2\pi$ oder $-\pi \leq \omega \leq \pi$. Die inhärente Periodizität definiert den Frequenzgang auch außerhalb des gewählten Intervalles. Zur Vereinfachung und um Konsistenz zum zeitkontinuierlichen Fall zu erreichen, wird $H(e^{j\omega})$ üblicherweise im Intervall $-\pi \leq \omega \leq \pi$ angegeben. Bezogen auf dieses Intervall sind mit „niedrigen Frequenzen“ die Frequenzen nahe bei Null gemeint, während sich die „hohen Frequenzen“ nahe bei $\pm\pi$ befinden. Berücksichtigen wir, daß die Frequenzen, die sich um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden, nicht unterscheidbar sind, so können wir die vorhergehende Aussage, wie folgt, verallgemeinern: „Niedrigen Frequenzen“ sind jene, die nahe bei geradzahligem Vielfachen von π liegen, „hohe Frequenzen“ befinden sich dagegen nahe bei ungeradzahligem Vielfachen von π . Dies stimmt mit unserer vorangegangenen Erörterung in Abschnitt 2.1 überein.

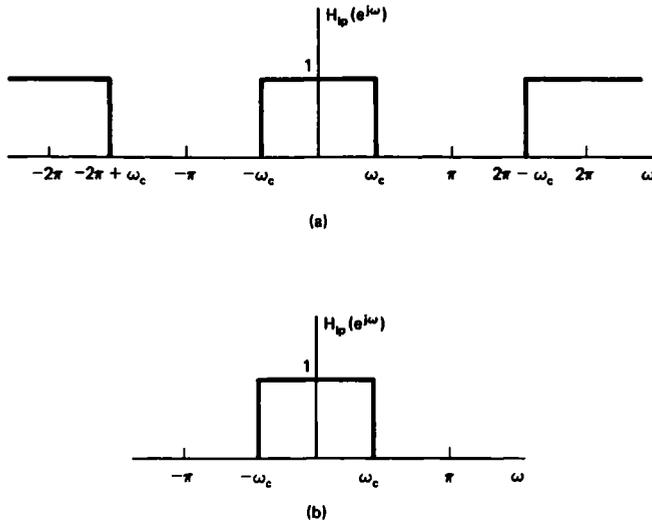


Bild 2.17 Ideales Tiefpaßfilter (a) Periodizität des Frequenzgangs, (b) eine Periode des Frequenzgangs.

Beispiel 2.14:

Eine wichtige Klasse linearer zeitinvarianter Systeme enthält die Systeme, deren Übertragungsfunktion für einen bestimmten Bereich Eins ist und ansonsten Null beträgt. Diese Systeme korrespondieren mit *idealen frequenzselektiven Filtern*. In Übereinstimmung mit der vorangegangenen Diskussion ist in Bild 2.17(a) der Frequenzgang eines idealen Tiefpaßfilters dargestellt. Aufgrund der inhärenten Periodizität der zeitdiskreten Übertragungsfunktion sieht sie wie ein Multibandfilter aus, da Frequenzen um $\omega = 2\pi$ nicht von denen um $\omega = 0$ zu unterscheiden sind. Tatsächlich läßt der Frequenzgang jedoch nur niedrige Frequenzen durch und unterdrückt hohe Frequenzen. Da der Frequenzgang durch sein Verhalten im Intervall $-\pi < \omega < \pi$ vollständig definiert ist, wird die Übertragungsfunktion des idealen Tiefpaßfilters normalerweise nur in diesem Intervall dargestellt, siehe Bild 2.17(b). Die Übertragungsfunktionen eines idealen Hochpaß-, Bandsperren- und Bandpaßfilters werden in den Bildern 2.18(a), (b) bzw. (c) gezeigt.

Beispiel 2.15:

Die Impulsantwort des Kurzzeitmittelwertsystems aus Beispiel 2.2 lautet

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \leq n \leq M_2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Deshalb gilt für die Übertragungsfunktion

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{n=-M_1}^{M_2} e^{-j\omega n}. \quad (2.110)$$

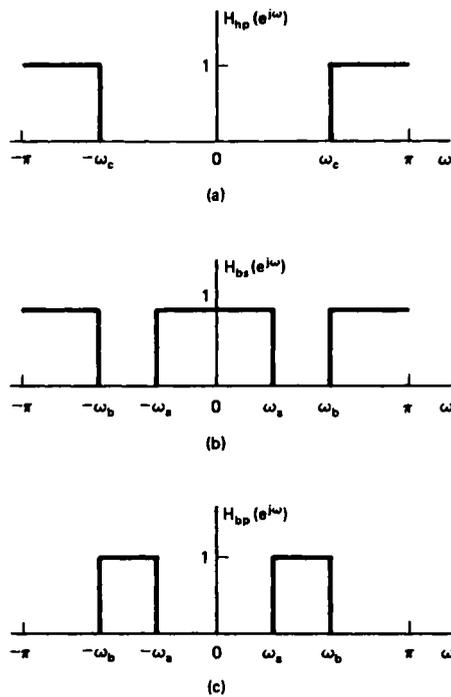


Bild 2.18 Ideale frequenzselektive Filter. (a) Hochpaßfilter, (b) Bandsperrenfilter, (c) Bandpaßfilter. Alle Übertragungsfunktionen sind mit der Periode 2π periodisch; dargestellt wird jeweils nur eine Periode.

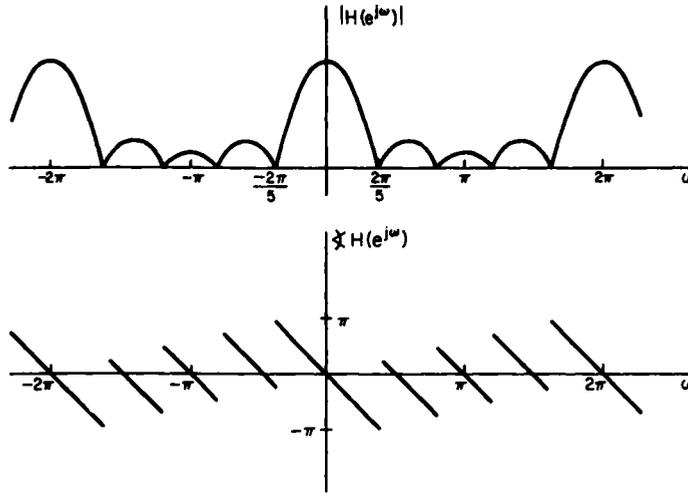


Bild 2.19 (a) Amplitudengang und (b) Phasengang der Übertragungsfunktion des Kurzzeitmittelwertsystems für den Fall: $M_1 = 0$, $M_2 = 4$.

Die Gleichung (2.110) kann mit Hilfe von Gleichung (2.43) in geschlossener Form ausgedrückt werden, für die

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \frac{e^{j\omega M_1} - e^{-j\omega(M_2 + 1)}}{1 - e^{-j\omega}} \\
 &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} e^{-j\omega(M_2 - M_1 + 1)/2} \frac{e^{j\omega(M_1 + M_2 + 1)/2} - e^{-j\omega(M_1 + M_2 + 1)/2}}{1 - e^{-j\omega}} \\
 &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} e^{-j\omega(M_2 - M_1)/2} \frac{e^{j\omega(M_1 + M_2 + 1)/2} - e^{-j\omega(M_1 + M_2 + 1)/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} \\
 &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} e^{-j\omega(M_2 - M_1)/2} \frac{\sin[\omega(M_1 + M_2 + 1)/2]}{\sin(\omega/2)}. \tag{2.111}
 \end{aligned}$$

Der Amplituden- und Phasengang von $H(e^{j\omega})$ sind in Bild 2.19 für $M_1 = 0$, $M_2 = 4$ dargestellt. Man beachte, daß $H(e^{j\omega})$ periodisch ist, wie man es für eine Übertragungsfunktion eines zeitdiskreten Systems erwartet. Weiterhin ist bemerkenswert, daß $|H(e^{j\omega})|$ zu hohen Frequenzen hin abfällt und daß $\angle H(e^{j\omega})$, d. h. die Phase von $H(e^{j\omega})$, sich linear mit der Frequenz ω verändert. Diese Dämpfung an hohen Frequenzen läßt erwarten, daß schnelle Änderungen in der Eingangsfolge geglättet werden; demnach handelt es sich um eine grobe Approximation eines Tiefpaßfilters. Dies entspricht auch dem, was wir intuitiv von einem Kurzzeitmittelwert bildenden System erwarten.

Einer der Vorteile der Übertragungsfunktionsdarstellung eines linearen zeitinvarianten Systems besteht darin, daß die Interpretation des Systemverhaltens, wie in Beispiel 2.15, oft leicht fällt. Wir werden diesen Punkt in Kapitel 5 noch wesentlich ausführlicher beleuchten. Im Moment kehren wir

jedoch wieder zu der Frage zurück, wie wir für eine beliebige Eingangsfolge eine Darstellung der Form nach Gleichung (2.100) bestimmen können.

2.7 Fourier-Transformationsdarstellung von Folgen

Viele Sequenzen können durch ein Fourier-Integral der folgenden Form beschrieben werden:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad (2.112)$$

wobei $X(e^{j\omega})$ gegeben ist durch

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}. \quad (2.113)$$

Die Gleichungen (2.112) und (2.113) bilden zusammen die *Fourier-Darstellung* einer Folge. Die Gleichung (2.112), die *inverse Fourier-Transformation*, ist die *Synthese-Formel*. Dies bedeutet, daß sie $x[n]$ als Superposition infinitesimal kleiner, komplexer sinusförmiger Funktionen der folgenden Form beschreibt:

$$\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega,$$

wobei ω ein Intervall der Breite 2π durchläuft und $X(e^{j\omega})$ den relativen Anteil der jeweiligen komplexen sinusförmigen Komponente festlegt. Auch wenn wir in Gleichung (2.112) als Bereich für ω Werte zwischen $-\pi$ und π gewählt haben, kann dennoch jedes beliebige Intervall der Breite 2π verwendet werden. Die Gleichung (2.113), die *Fourier-Transformation*[†], stellt einen Ausdruck zur Berechnung von $X(e^{j\omega})$ aus der Folge $x[n]$ dar, d. h. zur *Analyse* der Folge $x[n]$, indem bestimmt wird, welche Frequenzanteile zur Erzeugung von $x[n]$ nach Gleichung (2.112) benötigt werden.

Im allgemeinen ist die Fourier-Transformierte eine komplexwertige Funktion in ω . In Analogie zum Frequenzgang drücken wir auch $X(e^{j\omega})$ manchmal in der kartesischen Form

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) \quad (2.114a)$$

oder in polarer Form aus

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\angle X(e^{j\omega})}. \quad (2.114b)$$

[†] Gelegentlich werden wir die Gleichung (2.113) auch als zeitdiskrete Fourier-Transformation bezeichnen, besonders dann, wenn es wichtig ist, sie von der zeitkontinuierlichen Fourier-Transformation zu unterscheiden.

Die Größen $|X(e^{j\omega})|$ und $\angle X(e^{j\omega})$ werden als *Amplituden-* bzw. *Phasengang* der Fourier-Transformierten bezeichnet. Die Fourier-Transformierte wird gelegentlich auch *Fourier-Spektrum* oder einfach nur *Spektrum* genannt. Manchmal verwendet man auch die Begriffe *Betragsspektrum* oder *Amplitudenspektrum* für $|X(e^{j\omega})|$ und der Winkel- oder Phasengang $\angle X(e^{j\omega})$ wird hin und wieder auch als *Phasenspektrum* bezeichnet.

Der Phasengang $\angle X(e^{j\omega})$ ist durch die Gleichung (2.114b) nicht eindeutig bestimmt, da jedes ganzzahlige Vielfache von 2π zu ω addiert werden kann, ohne daß sich der Wert der komplexen Exponentialfunktion verändert. Wenn wir auf die Hauptwerte des Phasengangs zurückgreifen wollen, d. h. wenn wir den Phasengang $\angle X(e^{j\omega})$ auf Werte zwischen $-\pi$ und π beschränken, so werden wir dies durch die Notation $\text{ARG}[X(e^{j\omega})]$ verdeutlichen. In Kapitel 5 werden wir feststellen, daß es vorteilhaft sein kann, sich auf eine Phasenfunktion zu beziehen, die im Intervall $0 < \omega < \pi$ kontinuierlich ist, diese werden wir als $\arg[X(e^{j\omega})]$ bezeichnen.

Durch den Vergleich der Gleichungen (2.92) und (2.113) erkennen wir, daß die Übertragungsfunktion eines linearen zeitinvarianten Systems lediglich die Fourier-Transformierte der Impulsantwort ist und daß die Impulsantwort deshalb aus der Übertragungsfunktion berechnet werden kann, indem man das Fourier-Rücktransformationsintegral anwendet, d. h.

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (2.115)$$

Die Übertragungsfunktion ist, wie wir kürzlich erörterten, eine periodische Funktion. Genauso ist auch die Fourier-Transformierte mit der Periode 2π periodisch. Tatsächlich nimmt die Gleichung (2.113) die Form einer Fourier-Reihe für eine kontinuierliche periodische Funktion $X(e^{j\omega})$ an, und die Gleichung (2.112), die die Folgenwerte $x[n]$ in Abhängigkeit der periodischen Funktion $X(e^{j\omega})$ ausdrückt, nimmt die Gestalt der Integralgleichung an, die zur Bestimmung der Koeffizienten einer Fourier-Reihe verwendet werden würde. Unsere Verwendung der Gleichungen (2.112) und (2.113) konzentriert sich auf die Darstellung der Folge $x[n]$. Dennoch ist es unerlässlich, sich der Äquivalenz zwischen der Fourier-Reihendarstellung kontinuierlicher periodischer Funktionen und der Fourier-Transformationsdarstellung zeitdiskreter Signale bewußt zu sein, da alle vertrauten Eigenschaften der Fourier-Reihen mit der entsprechenden Auslegung der Variablen auf die Fourier-Darstellung einer Folge angewendet werden können.

Wir haben bisher noch nicht explizit gezeigt, daß die Gleichungen (2.112) und (2.113) zueinander inverse sind und haben auch noch nicht bewiesen, welchen Umfang die Klasse von Signalen hat, die in der Form nach Gleichung (2.112) dargestellt werden kann. Um zu zeigen, daß Gleichung (2.112) die Inverse von Gleichung (2.113) ist, bestimmen wir $X(e^{j\omega})$ mit Hilfe von Gleichung (2.113) und setzen das Ergebnis in Gleichung (2.112) ein. Im einzelnen berechnen wir

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\omega m} \right) e^{j\omega n} d\omega = \hat{x}[n], \quad (2.116)$$

wobei wir zunächst $\hat{x}[n]$ verwenden, um das Ergebnis der Fourier-Transformation zu kennzeichnen. Wir müssen zeigen, daß $\hat{x}[n] = x[n]$ ist, wenn $X(e^{j\omega})$ mit Gleichung (2.113) bestimmt werden kann. Man beachte, daß der „Dummy“-Index (Zählindex) der Summation nun durch m beschrieben wird, um ihn von n , dem variablen Index in Gleichung (2.112) zu unterscheiden. Wenn die Summe für alle Werte von ω gleichmäßig konvergiert, dann können wir die Reihenfolge der Integration und Summation vertauschen und erhalten

$$\hat{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega \right). \quad (2.117)$$

Berechnen wir das Integral innerhalb der Klammern, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega &= \frac{\sin \pi(n-m)}{\pi(n-m)} \\ &= \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases} \\ &= \delta[n-m]. \end{aligned}$$

So daß

$$\hat{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \delta[n-m] = x[n],$$

was es zu zeigen galt.

Das Problem, die Klasse der Signale festzulegen, die mit Hilfe der Gleichung (2.112) dargestellt werden kann, ist äquivalent zu der Bestimmung der Konvergenz der unendlichen Summe aus Gleichung (2.113). Das bedeutet, daß wir uns mit den Bedingungen zu beschäftigen haben, die von den Termen der Summe in Gleichung (2.113) erfüllt werden müssen, so daß

$$|X(e^{j\omega})| < \infty \quad \text{für alle } \omega,$$

wobei $X(e^{j\omega})$ für den Grenzwert der endlichen Summe mit $M \rightarrow \infty$ steht

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M x[n] e^{-j\omega n}. \quad (2.118)$$

Eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz kann, wie folgt, gefunden werden:

$$\begin{aligned}
 |X(e^{j\omega})| &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right| < \infty \\
 &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| |e^{-j\omega n}| < \infty \\
 &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty.
 \end{aligned}$$

Deshalb existiert $X(e^{j\omega})$, wenn $x[n]$ *absolut summierbar* ist. Weiterhin kann in diesem Fall gezeigt werden, daß die Reihe gleichmäßig gegen eine kontinuierliche Funktion in ω konvergiert[†].

Da eine stabile Folge laut Definition absolut summierbar ist, besitzen alle stabilen Folgen Fourier-Transformierte. Daraus folgt außerdem, daß jedes stabile System eine endliche und kontinuierliche Übertragungsfunktion besitzt.

Die absolute Summierbarkeit ist eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer Fourier-Darstellung. In den Beispielen 2.12 und 2.15 haben wir die Fourier-Transformierten der Folgen $\delta[n-n_d]$ und $[1/(M_1+M_2+1)](u[n+M_1]-u[n-M_2-1])$ berechnet. Diese Folgen sind absolut summierbar, da sie eine endliche Länge besitzen. Zweifelsfrei ist jede endlich lange Folge absolut summierbar und besitzt deshalb eine Fourier-Darstellung. In dem Zusammenhang mit linearen zeitinvarianten Systemen ist jedes FIR-System stabil und wird daher einen endlichen und kontinuierlichen Frequenzgang annehmen. Ist eine Folge unendlich lang, so müssen wir auf die Konvergenz der unendlichen Summe achten. Das folgende Beispiel verdeutlicht diesen Fall.

Beispiel 2.16:

Es sei $x[n] = a^n u[n]$. Die Fourier-Transformierte dieser Folge lautet

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n \\
 &= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \text{ wenn } |ae^{-j\omega}| < 1 \text{ oder } |a| < 1.
 \end{aligned}$$

Offensichtlich ist die Bedingung $|a| < 1$ die Voraussetzung für eine absolute Summierbarkeit von $x[n]$, d. h.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1 - |a|} < \infty \text{ wenn } |a| < 1. \quad (2.119)$$

Die absolute Summierbarkeit ist eine *hinreichende* Bedingung für die Existenz einer Fourier-Transformierten. Außerdem garantiert sie eine gleichmäßige Konvergenz. Einige Folgen sind zwar nicht absolut, aber im quadratischen Mittel summierbar, d. h.

[†] Anmerkung des Übersetzers: Eine gleichmäßige Konvergenz bedeutet, daß der Ausdruck $\lim_{M \rightarrow \infty} |X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|$ für alle Werte von ω gegen Null strebt.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty. \quad (2.120)$$

Derartige Folgen können durch eine Fourier-Transformierte dargestellt werden, wenn wir bereit sind, die Bedingung der gleichmäßigen Konvergenz der unendlichen Summe, die $X(e^{j\omega})$ definiert, etwas abzuschwächen. Im einzelnen liegt in diesem Fall eine Konvergenz im quadratischen Mittel vor, d. h. mit

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (2.121a)$$

und

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M x[n]e^{-j\omega n}, \quad (2.121b)$$

ergibt sich

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0. \quad (2.122)$$

Mit anderen Worten, der Fehler $|X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|$ wird wohl nicht für jeden Wert von ω den Wert Null erreichen, wenn M gegen ∞ läuft, aber die „Gesamtenergie“ des Fehlers strebt gegen Null. Das Beispiel 2.17 illustriert diesen Fall.

Beispiel 2.17:

Lassen Sie die Impulsantwort des idealen Tiefpaßfilters aus Beispiel 2.14 bestimmen. Die Übertragungsfunktion lautet

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi, \end{cases} \quad (2.123)$$

selbstverständlich mit der Periodizität von 2π . Die Impulsantwort $h_{lp}[n]$ kann mit Hilfe der Fourier-Transformations-Synthesegleichung (2.112) bestimmt werden

$$\begin{aligned} h_{lp}[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Wir beachten, daß der ideale Tiefpaß nichtkausal ist, da $h_{lp}[n]$ für $n < 0$ ungleich Null ist. Außerdem ist $h_{lp}[n]$ nicht absolut summierbar. Die Folgenwerte nähern sich zwar mit $n \rightarrow \infty$ der Null, jedoch nur mit $1/n$. Dies begründet sich auf der Unstetigkeit von $X(e^{j\omega})$ an der Stelle $\omega = \omega_c$. Da $h_{lp}[n]$ nicht absolut summierbar ist, konvergiert der Ausdruck

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n}$$

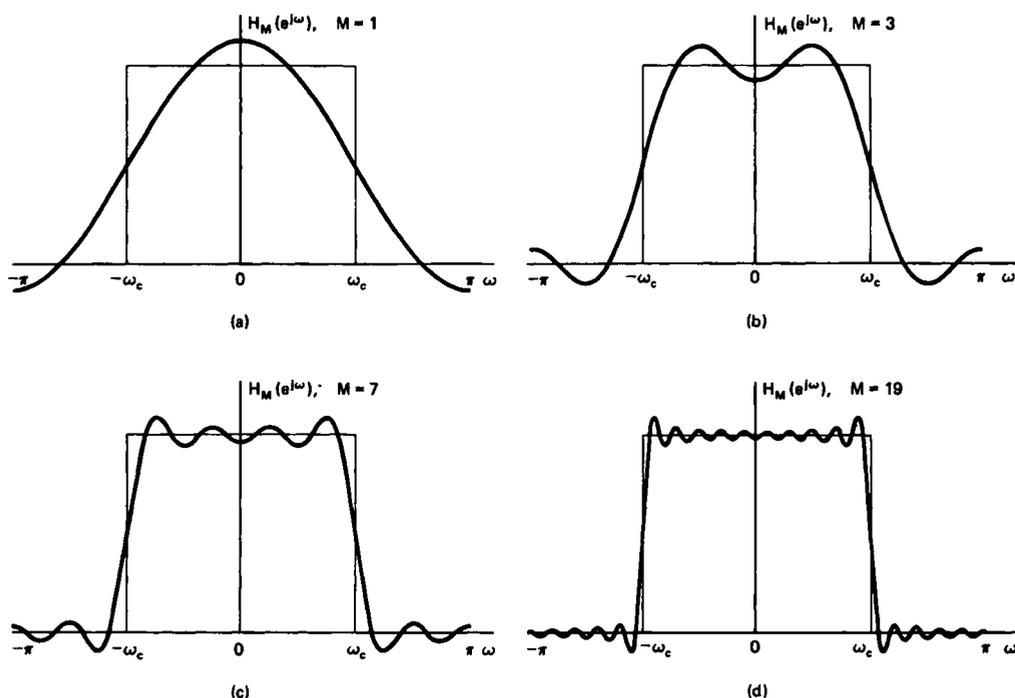


Bild 2.20 Konvergenz der Fourier-Transformation. Das oszillatorische Verhalten bei $\omega = \omega_c$ wird oft als Gibbsche Phänomen bezeichnet.

nicht gleichmäßig für alle ω . Um einen intuitiven Eindruck davon zu bekommen, nehmen wir $H_M(e^{j\omega})$ als Summe einer endlichen Anzahl von Termen an

$$H_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n}. \quad (2.125)$$

Es läßt sich zeigen, daß $H_M(e^{j\omega})$ ausgedrückt werden kann durch

$$H_M(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{\sin[(2M+1)(\omega-\theta)/2]}{\sin[(\omega-\theta)/2]} d\theta.$$

Die Funktion $H_M(e^{j\omega})$ wird in Bild 2.20 für verschiedene Werte von M ausgewertet. Man beachte, daß die Oszillationen bei $\omega = \omega_c$ (oft als Gibbsche Phänomen bezeichnet) mit zunehmendem M zwar schneller werden, die Amplitude der Schwingung jedoch nicht abnimmt. Tatsächlich kann gezeigt werden, daß mit $M \rightarrow \infty$ die Maximalamplitude der Schwingungen zwar nicht gegen Null geht, aber die Oszillationen an die Stelle $\omega = \omega_c$ zusammenrücken. Deshalb konvergiert die unendliche Summe nicht gleichmäßig gegen die unstetige Funktion $H_{lp}(e^{j\omega})$ aus Gleichung (2.123). Indessen ist $h_{lp}[n]$ nach Gleichung (2.124) quadratisch summierbar, und dementsprechend konvergiert $H_{lp}(e^{j\omega})$ im quadratischen Mittel gegen $H_{lp}(e^{j\omega})$, d. h.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega}) - H_M(e^{j\omega})|^2 d\omega \rightarrow 0.$$

Auch wenn die Abweichung zwischen $\lim_{M \rightarrow \infty} H_M(e^{j\omega})$ und $H_{lp}(e^{j\omega})$ unwesentlich erscheinen mag, da sich die Funktionen nur bei $\omega = \omega_c$ unterscheiden, werden wir doch in Kapitel 7 sehen, daß dieses Verhalten endlicher Summen erhebliche Auswirkungen auf den Entwurf zeitdiskreter Filtersysteme hat.

Manchmal ist es nützlich, eine Fourier-Darstellung für bestimmte Folgen zu kennen, die weder absolut summierbar noch quadratisch summierbar sind. Einige dieser Sequenzen erläutern wir anhand der folgenden Beispiele.

Beispiel 2.18:

Wir untersuchen die Folge $x[n] = 1$ für alle n . Diese Folge ist weder absolut noch quadratisch summierbar, und die Gleichung (2.113) konvergiert in diesem Fall weder gleichmäßig noch im quadratischen Mittel. Trotzdem ist es möglich und hilfreich, eine Fourier-Transformierte zu dieser Folge zu definieren, und zwar als periodische Dirac-Impulsfolge

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi r). \quad (2.126)$$

In diesem Fall sind die Impulse Funktionen einer kontinuierlichen Variablen und sind deshalb von „unendlicher Höhe, der Breite Null und der Fläche Eins“, was zu der Tatsache konsistent ist, daß die Gleichung (2.113) nicht konvergiert. Die Verwendung der Gleichung (2.126) als Fourier-Darstellung der Folge $x[n] = 1$ ist prinzipiell gerechtfertigt, da die formale Substitution der Gleichung (2.126) in Gleichung (2.112) zu dem korrekten Ergebnis führt. Das Beispiel 2.19 beschreibt eine Verallgemeinerung dieses Beispiels.

Beispiel 2.19:

Wir betrachten eine Folge $x[n]$, deren Fourier-Transformierte eine periodische Dirac-Impulsfolge ist

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r). \quad (2.127)$$

Setzen wir $X(e^{j\omega})$ in das Fourier-Rücktransformationsintegral der Gleichung (2.112) ein und beachten wir, daß die Integration nur eine Periode von $X(e^{j\omega})$ einschließt, so erhalten wir

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega n} d\omega. \quad (2.128)$$

Benutzen wir die Ausblendeigenschaft des Dirac-Impulses, so folgt für ein beliebiges n

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}$$

Für $\omega_0 = 0$ vereinfacht sich $x[n]$ zu der Folge, die in Beispiel 2.18 betrachtet wurde.

Zweifelsfrei ist die Folge $x[n]$ aus Beispiel 2.19 weder absolut noch quadratisch summierbar, und $|X(e^{j\omega})|$ ist nicht für alle ω endlich. Somit bedarf die mathematische Beziehung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) \quad (2.129)$$

einer speziellen Interpretation. Eine solche Interpretation liefert die Theorie der verallgemeinerten Funktionen (Lighthill, 1958). Mit Hilfe dieser Theorie kann das Konzept der Fourier-Darstellung auf die Klasse von Folgen korrekt erweitert werden, die als Summe von diskreten Frequenzkomponenten darstellbar sind, wie z. B.

$$x[n] = \sum_k a_k e^{j\omega_k n}, \quad -\infty < n < \infty. \quad (2.130)$$

Mit dem Ergebnis aus Beispiel 2.19 folgt, daß

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_k 2\pi a_k \delta(\omega - \omega_k + 2\pi r) \quad (2.131)$$

eine folgerichtige Darstellung der Fourier-Transformierten von $x[n]$ aus Gleichung (2.130) ist.

Eine andere Folge, die weder absolut noch quadratisch summierbar ist, ist der Einheitssprung $u[n]$. Auch wenn es nicht ganz so einfach zu zeigen ist, existiert für diese Folge eine Fourier-Transformierte mit der folgenden Darstellung:

$$U(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{r=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi r). \quad (2.132)$$

2.8 Symmetrie-Eigenschaften von Fourier-Transformierten

Bei der Verwendung der Fourier-Transformierten ist es nützlich, genauere Kenntnisse von der Art und Weise zu haben, wie sich die Eigenschaften der Folge ihrerseits in der Fourier-Transformierten manifestieren und umgekehrt. In diesem Abschnitt und in Abschnitt 2.9 werden wir eine Reihe solcher Eigenschaften diskutieren und zusammenfassen.

Symmetrieeigenschaften der Fourier-Transformierten sind oft sehr hilfreich. Die folgende Diskussion stellt diese Eigenschaften vor, während die Beweise in den Aufgaben 2.29 und 2.30 durchgeführt werden sollen. Bevor die Eigenschaften vorgestellt werden können, müssen noch ein paar Definitionen getroffen werden.

Eine *konjugiert symmetrische Folge* $x_e[n]$ ist als eine Folge definiert, für die $x_e[n] = x_e^*[-n]$ gilt. Eine *konjugiert antisymmetrische Folge* $x_o[n]$ ist als eine Folge definiert, für die $x_o[n] = -x_o^*[-n]$ gilt, wobei das Zeichen: * für

konjugiert komplex steht. Eine beliebige Folge $x[n]$ läßt sich als Summe einer konjugiert symmetrischen und einer konjugiert antisymmetrischen Folgen darstellen. Im einzelnen ergibt sich

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n], \quad (2.133a)$$

wobei gilt, daß

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]) \quad (2.133b)$$

und

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n]). \quad (2.133c)$$

Eine reelle Folge, die konjugiert symmetrisch ist, so daß $x_e[n] = x_e[-n]$ gilt, wird als *gerade Folge* (even) bezeichnet. Eine reelle Folge die konjugiert antisymmetrisch ist, so daß $x_o[n] = -x_o[-n]$ nennt man *ungerade Folge* (odd).

Die Fourier-Transformierte $X(e^{j\omega})$ läßt sich in eine Summe aus einer konjugiert symmetrischen und einer konjugiert antisymmetrischen Funktion zerlegen, und zwar

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}), \quad (2.134a)$$

wobei

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] \quad (2.134b)$$

und

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]. \quad (2.134c)$$

Offensichtlich ist $X_e(e^{j\omega})$ konjugiert symmetrisch und $X_o(e^{j\omega})$ konjugiert antisymmetrisch, d. h.

$$X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega}) \quad (2.135a)$$

und

$$X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega}). \quad (2.135b)$$

Genau wie bei den Folgen wird auch eine reelle kontinuierliche Funktion, die konjugiert symmetrisch ist, als *gerade Funktion* und eine, die konjugiert antisymmetrisch ist, als *ungerade Funktion* bezeichnet.

Die Symmetrieeigenschaften der Fourier-Transformation sind in der Tabelle 2.1 zusammengefaßt. Die ersten sechs Eigenschaften gelten für eine allgemeine komplexe Folge $x[n]$ mit der Fourier-Transformierten $X(e^{j\omega})$. Die Eigenschaften 1 und 2 werden in Aufgabe 2.29 behandelt. Eigenschaft 3 folgt aus den Eigenschaften 1 und 2 und der Tatsache, daß die Fourier-Transformierte einer Summe aus zwei Folgen mit der Summe ihrer einzelnen Fourier-Transformierten identisch ist [Linearität]. Im einzelnen ist die Fourier-Transformierte

Folge $x[n]$	Fourier-Transformierte $X(e^{j\omega})$
1. $x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2. $x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3. $\Re\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$ (konjugiert-symmetrischer Teil von $X(e^{j\omega})$)
4. $j \Im\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$ (konjugiert-antisymmetrischer Teil von $X(e^{j\omega})$)
5. $x_e[n]$ (konjugiert-symmetrischer Teil von $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega})$
6. $x_o[n]$ (konjugiert-antisymmetrischer Teil von $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega})$
Die folgenden Eigenschaften gelten nur, wenn $x[n]$ reell ist.	
7. Jede reelle Folge $x[n]$	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (Fourier-Transformierte ist konjugiert-symmetrisch)
8. Jede reelle Folge $x[n]$	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ (Realteil ist gerade)
9. Jede reelle Folge $x[n]$	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ (Imaginärteil ist ungerade)
10. Jede reelle Folge $x[n]$	$ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $ (Betrag ist gerade)
11. Jede reelle Folge $x[n]$	$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$ (Phase ist ungerade)
12. $x_e[n]$ (gerader Teil von $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega})$
13. $x_o[n]$ (ungerader Teil von $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega})$

Tabelle 2.1 Symmetrieeigenschaften der Fourier-Transformation.

von $\Re\{x[n]\} = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[n])$ der konjugiert symmetrischen Anteil von $X(e^{j\omega})$, d. h. $X_e(e^{j\omega})$. Genauso besitzt $j\Im\{x[n]\} = 1/2(x[n] - x^*[n])$ oder äquivalent $j\Im\{x[n]\}$ eine Fourier-Transformierte, die nach der Eigenschaft 4 mit dem konjugiert antisymmetrischen Anteil $X_o(e^{j\omega})$ übereinstimmt. Betrachtet man die Fourier-Transformierte von $x_e[n]$ und $x_o[n]$, welche die konjugiert symmetrischen und konjugiert antisymmetrischen Anteile von $x[n]$ darstellen, so ergeben sich unmittelbar die Eigenschaften 5 und 6.

Falls $x[n]$ eine reelle Folge ist, werden diese Symmetrieeigenschaften besonders einfach und äußerst hilfreich. Im einzelnen ist die Fourier-Transformierte einer reellen Folge konjugiert symmetrisch, d. h. $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (Eigenschaft 7). Drückt man $X(e^{j\omega})$ durch seinen Real- und Imaginärteil aus

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}), \quad (2.136)$$

so folgen die Eigenschaften 8 und 9

$$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega}) \quad (2.137a)$$

und

$$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega}). \quad (2.137b)$$

Mit anderen Worten, der Realteil der Fourier-Transformierten einer reellen Folge ist eine gerade Funktion und der Imaginärteil eine ungerade Funktion. Schreibt man $X(e^{j\omega})$ in seiner Polardarstellung

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\angle X(e^{j\omega})}, \quad (2.138)$$

so erhält man auf eine ähnliche Art und Weise, daß der Amplitudengang $|X(e^{j\omega})|$ der Fourier-Transformierten einer reellen Folgen $x[n]$ eine gerade Funktion bezüglich ω ist und für den Phasengang $\angle X(e^{j\omega})$ nur eine ungerade Funktion in ω gewählt werden kann (Eigenschaften 10 und 11). Außerdem wird bei reellen Folgen der gerade Anteil von $x[n]$ in $X_R(e^{j\omega})$ transformiert und der ungerade Anteil von $x[n]$ in $jX_I(e^{j\omega})$ (Eigenschaften 12 und 13).

Beispiel 2.20:

Zur Verdeutlichung einiger dieser Eigenschaften betrachten wir nochmals die Folge aus dem Beispiel 2.16, wo wir zeigten, daß sich die Fourier-Transformierte der reellen Folge $x[n] = a^n u[n]$ ergibt zu

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad \text{für } |a| < 1. \quad (2.139)$$

Dann gilt

$$X^*(e^{-j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = X(e^{j\omega}), \quad (\text{Eigenschaft 7})$$

$$X_R(e^{j\omega}) = \frac{1 - a \cos \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega} = X_R(e^{-j\omega}), \quad (\text{Eigenschaft 8})$$

$$X_I(e^{j\omega}) = \frac{a \sin \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega} = -X_I(e^{-j\omega}), \quad (\text{Eigenschaft 9})$$

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{(1 + a^2 - 2a \cos \omega)^{1/2}} = |X(e^{-j\omega})|, \quad (\text{Eigenschaft 10})$$

$$\angle X(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \left(\frac{a \sin \omega}{1 - a \cos \omega} \right) = -\angle X(e^{-j\omega}). \quad (\text{Eigenschaft 11})$$

Diese Funktionen sind in Bild 2.21 für $a > 0$ abgebildet, im einzelnen für $a = 0.9$ (durchgezogene Linien) und $a = 0.5$ (gestrichelte Linien). In der Aufgabe 2.27 werden die entsprechenden Verläufe für $a < 0$ behandelt.

2.9 Theoreme der Fourier-Transformation

Zusätzlich zu den Symmetrieeigenschaften spiegeln sich auch mehrere andere Theoreme (siehe Absätze 2.9.1-2.9.7), die bei Folgen gültig sind, in deren Fourier-Transformierten wider. Wir werden feststellen, daß diese Theoreme in den meisten Fällen nahezu identisch sind mit den entsprechenden Theoremen für zeitkontinuierliche Signale und deren Fourier-Transformierten. Um die Theoreme leichter angeben zu können, führen wir folgende Operatorschreibweisen ein:

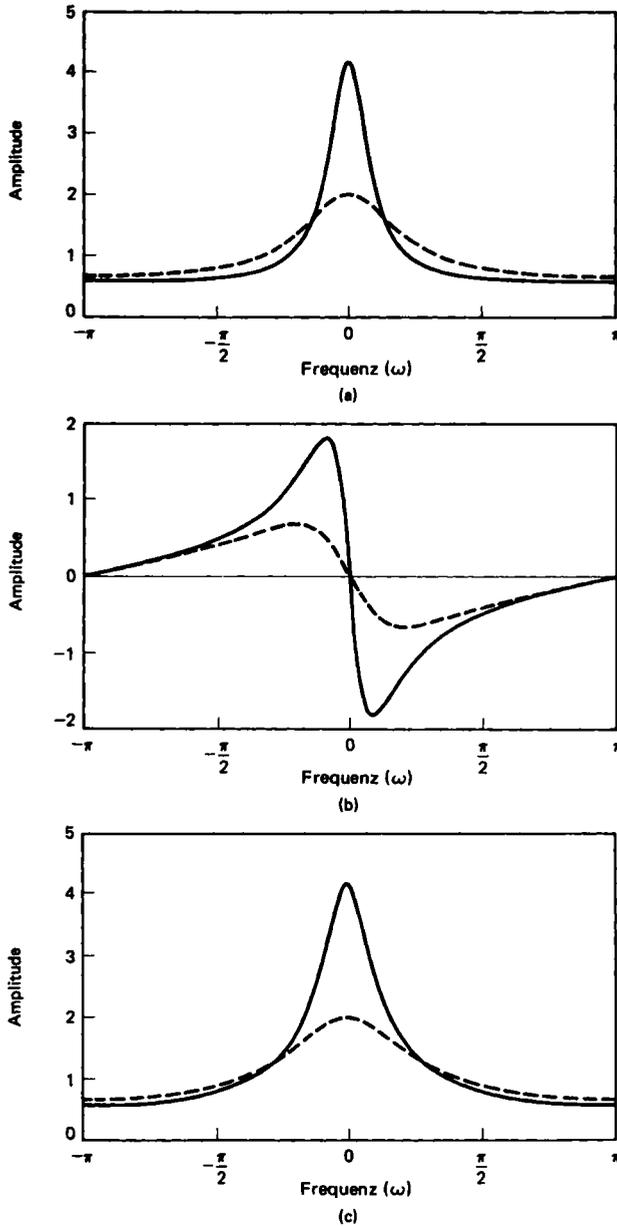


Bild 2.21 Darstellung der Übertragungsfunktion eines Systems mit der Impulsantwort $h[n] = a^n u[n]$. (a) Realteil. (b) Imaginärteil. (c) Amplitudengang. $a > 0$, Für $a = 0.9$ (durchgezogene Linien) und $a = 0.5$ (gestrichelte Linien).

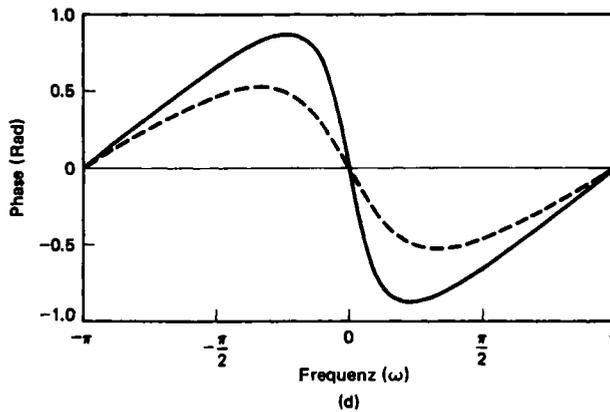


Bild 2.21 (fortgesetzt) (d) Phasengang.

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \mathcal{F}\{x[n]\}, \\ x[n] &= \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\}, \\ x[n] &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}). \end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß \mathcal{F} für die Operation: „Berechne die Fourier-Transformierte von $x[n]$ “ und \mathcal{F}^{-1} entsprechend für die inverse Operation steht. Die meisten Theoreme werden ohne Beweis angegeben. Zu den Beweisen, welche dem Leser als Übung überlassen wurden (Aufgabe 2.31), werden im allgemeinen nur einfache Variablen-Modifikationen bei der Summation oder Integration benötigt. Die Theoreme dieses Abschnittes sind in Tabelle 2.2 zusammengefaßt.

2.9.1 Linearität der Fourier-Transformation

Gilt

$$x_1[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_1(e^{j\omega})$$

und

$$x_2[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_2(e^{j\omega}),$$

dann folgt

$$ax_1[n] + bx_2[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}). \quad (2.140)$$

2.9.2 Zeit- und Frequenzverschiebung

Ist

$$x[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}),$$

dann gilt für die zeitverschobene Folge

Folge	Fourier-Transformierte
$x[n]$	$X(e^{j\omega})$
$y[n]$	$Y(e^{j\omega})$
1. $ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
2. $x[n - n_d]$ (n_d ist ganzzahlig)	$e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$
3. $e^{j\omega n_0} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ wenn $x[n]$ reell ist $X^*(e^{j\omega})$
5. $nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
6. $x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
7. $x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega - \theta)})d\theta$
Parsevalsches Theorem	
8. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2$	$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$
9. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n]$	$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega}) d\omega$

Tabelle 2.2 Theoreme der Fourier-Transformation.

$$x[n - n_d] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega}) \quad (2.141)$$

und für die frequenzverschobene Fourier-Transformierte

$$e^{j\omega n_0} x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j(\omega - \omega_0)}). \quad (2.142)$$

2.9.3 Zeitumkehr

Für

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}),$$

ergibt sich für die Folge mit Zeitumkehr

$$x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{-j\omega}). \quad (2.143)$$

Wenn die Folge $x[n]$ reell ist, vereinfacht sich das Theorem zu

$$x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(e^{j\omega}). \quad (2.144)$$

2.9.4 Differentiation im Frequenzbereich

Gilt

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}),$$

dann ergibt sich für die Differentiation im Frequenzbereich

$$nx[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}. \quad (2.145)$$

2.9.5 Das Parsevalsche Theorem

Mit

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}),$$

gilt

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega. \quad (2.146)$$

Die Funktion $|X(e^{j\omega})|^2$ wird als *Energiedichtespektrum* bezeichnet, da sie die Energieverteilung über der Frequenz bestimmt. Natürlich ist das Energiedichtespektrum nur für Signale mit einer endlichen Energie definiert. Eine verallgemeinerte Form des Parsevalschen Theorems wird in Aufgabe 2.34 vorgestellt.

2.9.6 Das Faltungstheorem

Gilt

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$$

und

$$h[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(e^{j\omega})$$

und ist außerdem

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n], \quad (2.147)$$

dann folgt

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}). \quad (2.148)$$

Daher zieht eine Faltung von Folgen die Multiplikation der dazugehörigen Fourier-Transformierten nach sich. Es ist bemerkenswert, daß die Zeitverschiebungseigenschaft ein Spezialfall des Faltungstheorems ist, da

$$\delta[n - n_d] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega n_d} \quad (2.149)$$

und für $h[n] = \delta[n - n_d]$ folgt $y[n] = x[n] * \delta[n - n_d]$. Deshalb gilt

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} \quad \text{und} \quad Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega}).$$

Eine formale Herleitung des Faltungstheorems ist einfach dadurch zu erreichen, daß man die Definition der Fourier-Transformation auf die Folge $y[n]$, gemäß Gleichung (2.147), anwendet. Dieses Theorem kann auch als eine direkte Folgerung aus der Tatsache interpretiert werden, daß komplexe Exponentialfunktionen Eigenfunktionen eines linearen zeitinvarianten Systems sind. Dazu rufe man sich ins Gedächtnis zurück, daß $H(e^{j\omega})$ die Übertragungsfunktion des linearen zeitinvarianten Systems ist, dessen Impulsantwort mit $h[n]$ bezeichnet wird. Erinnern wir uns außerdem daran, daß für

$$x[n] = e^{j\omega n},$$

folgt, daß

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}.$$

Das bedeutet, daß komplexe Exponentialfunktionen *Eigenfunktionen* des linearen zeitinvarianten Systems sind, wobei $H(e^{j\omega})$, die Fourier-Transformierte von $h[n]$, den Eigenwert darstellt. Mit der Definition der Fourier-Transformations-Synthesegleichung in Integralform stimmt die Darstellung einer Folge $x[n]$ mit einer Superposition komplexer Exponentialfunktionen von infinitesimaler Größe überein, d. h.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_k X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega n} \Delta\omega.$$

Mit der Eigenschaft von Eigenfunktion eines linearen zeitinvarianten Systems und dem Superpositionsprinzip ergibt sich das Ausgangssignal letztlich zu

$$y[n] = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_k H(e^{jk\Delta\omega})X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega n} \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega.$$

Daher können wir schlußfolgern, daß

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}),$$

was wir auch schon in Gleichung (2.148) erhalten haben.

2.9.7 Das Modulations- oder Fenstertheorem

Ist

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$$

und

$$w[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} W(e^{j\omega})$$

und gilt außerdem

$$y[n] = x[n]w[n], \quad (2.150)$$

dann folgt hieraus

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta. \quad (2.151)$$

Die Gleichung (2.151) ist eine periodische Faltung, d. h. sie stellt eine Faltung von zwei periodischen Funktionen dar, wobei sich die Integrationsgrenzen nur über eine Periode erstrecken. Die Dualität, die den meisten Fourier-Transformationstheoremen innewohnt, wird deutlich, wenn man das Faltungs- und das Modulationstheorem gegenüberstellt. Im Gegensatz zu dem zeitkontinuierlichen Fall, wo die Dualität vollständig ist, ergeben sich im zeitdiskreten Fall jedoch grundlegende Unterschiede, da die Fourier-Transformation durch eine Summe beschrieben wird, während die Rücktransformation ein Integral mit einem periodischen Integranden ist. Obgleich wir für den zeitkontinuierlichen Fall feststellen können, daß die Faltung im Zeitbereich einer Multiplikation im Frequenzbereich entspricht und umgekehrt, muß diese Aussage für den zeitdiskreten Fall etwas modifiziert werden. Im einzelnen ist die zeitdiskrete Faltung von Folgen (Faltungssumme) äquivalent zur Multiplikation der zugehörigen periodischen Fourier-Transformierten, und die Multiplikation von Folgen korrespondiert mit der *periodischen* Faltung der dazugehörigen Fourier-Transformierten.

Die Theoreme dieses Abschnittes und eine Reihe wichtiger Fourier-Transformationspaare sind in den Tabellen 2.2 bzw. 2.3 zusammengefaßt. Ein Anwendungsgebiet in dem sich die Kenntnis der Theoreme und Eigenschaften der Fourier-Transformation als nützlich erweisen, ist die Bestimmung der Fourier-Transformierten bzw. Rücktransformierten. Oft ist es mit Hilfe der Theoreme und bekannter Transformationspaare möglich, eine Folge in dem Sinne darzustellen, daß sie mittels Operationen auf einer anderen Folge beschrieben wird, deren Transformierte bereits bekannt ist. Dadurch kann eine Vereinfachung einer sonst schwierigen und aufwendigen Aufgabe erreicht werden. Die Beispiele 2.21-2.24 werden dies verdeutlichen.

Beispiel 2.21:

Es sei $x[n] = a^n u[n - 5]$. Diese Folge kann übergeführt werden in

$$x[n] = a^5 a^{n-5} u[n - 5]. \quad (2.152)$$

Unter Verwendung der Theoreme 1 und 2 aus der Tabelle 2.2 und dem Transformationspaar 4 aus der Tabelle 2.3 erhalten wir

$$X(e^{j\omega}) = \frac{a^5 e^{-j\omega 5}}{1 - a e^{-j\omega}}. \quad (2.153)$$

Folge	Fourier-Transformierte
1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3. 1 $(-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
4. $a^n u[n]$ ($ a < 1$)	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
6. $(n + 1)a^n u[n]$ ($ a < 1$)	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
7. $\frac{r^n \sin \omega_p(n + 1)}{\sin \omega_p} u[n]$ ($ r < 1$)	$\frac{1}{1 - 2r \cos \omega_p e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
8. $\frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$
9. $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(M + 1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
11. $\cos(\omega_0 n + \phi)$	$\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [e^{j\phi}\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + e^{-j\phi}\delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$

Tabelle 2.3 Fourier-Transformationspaare.

Beispiel 2.22:

Gehen Sie davon aus, daß

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - be^{-j\omega})}. \quad (2.154)$$

Setzt man $X(e^{j\omega})$ unmittelbar in Gleichung (2.112) ein, so führt dies auf ein Integral, das, bei Verwendung von reellen Integrationstechniken, nur schwer zu berechnen ist. Benutzt man die Partialbruchzerlegung, die wir in Kapitel 4 genauer untersuchen werden, so entsteht indessen ein Ausdruck der Form

$$X(e^{j\omega}) = \frac{a/(a-b)}{1 - ae^{-j\omega}} - \frac{b/(a-b)}{1 - be^{-j\omega}}. \quad (2.155)$$

Mit Hilfe des 1. Theorems aus der Tabelle 2.2 und dem Transformationspaar 4 der Tabelle 2.3 ergibt sich schließlich

$$x[n] = \left(\frac{a}{a-b}\right)a^n u[n] - \left(\frac{b}{a-b}\right)b^n u[n]. \quad (2.156)$$

Beispiel 2.23:

Gegeben sei die Fourier-Transformierte

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_d}, & \omega_c < |\omega| < \pi, \\ 0, & |\omega| < \omega_c, \end{cases} \quad (2.157)$$

die selbstverständlich eine Periodendauer von 2π besitzt. Diese Fourier-Transformierte läßt sich ausdrücken durch

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}(1 - R(e^{j\omega})),$$

wobei $R(e^{j\omega})$ mit der Periode 2π periodisch ist und

$$R(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi. \end{cases}$$

Um die Rücktransformierte von $R(e^{j\omega})$ zu bestimmen, verwenden wir das Ergebnis aus Beispiel 2.17. Zusammen mit den Eigenschaften 1 und 2 der Tabelle 2.2 ergibt sich für $x[n]$

$$\begin{aligned} x[n] &= \delta[n - n_d] - r[n - n_d] \\ &= \delta[n - n_d] - \frac{\sin \omega_c(n - n_d)}{\pi(n - n_d)}. \end{aligned}$$

Beispiel 2.24:

Wir möchten die Impulsantwort eines linearen zeitinvarianten Systems bestimmen, für welches das Eingangssignal $x[n]$ und das Ausgangssignal $y[n]$ die folgende lineare Differenzgleichung mit konstanten Koeffizienten erfüllen:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]. \quad (2.158)$$

In Kapitel 5 werden wir feststellen, daß es bei linearen Differenzgleichungen sinnvoller ist, die z -Transformation statt der Fourier-Transformation zu benutzen. Trotzdem liefert dieses Beispiel einen Hinweis auf die Nützlichkeit von Transformationsmethoden zur Analyse von linearen Systemen. Um die Impulsantwort $h[n]$ zu bestimmen, setzen wir $x[n] = \delta[n]$ und erhalten aus Gleichung (2.158)

$$h[n] - \frac{1}{2}h[n-1] = \delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-1]. \quad (2.159)$$

Wenden wir die Fourier-Transformation auf beide Seiten von Gleichung (2.159) an und benutzen wir die Eigenschaften 1 und 2 aus der Tabelle 2.2, so erhalten wir

$$H(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}e^{-j\omega}H(e^{j\omega}) = 1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega} \quad (2.160)$$

oder

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}. \quad (2.161)$$

Um $h[n]$ zu bestimmen, müssen wir die Fourier-Rücktransformierte von $H(e^{j\omega})$ berechnen. Mit diesem Ziel vor Augen, schreiben wir die Gleichung (2.161) um zu

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}. \quad (2.162)$$

Mit dem 4. Transformationspaar der Tabelle 2.3 folgt dann

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

Benutzen wir diese Transformation zusammen mit der Eigenschaft 3 aus der Tabelle 2.2, so ergibt sich

$$-\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} -\frac{\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}. \quad (2.163)$$

Basierend auf der Eigenschaft 1 der Tabelle 2.2 folgt dann schließlich

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]. \quad (2.164)$$

2.10 Zeitdiskrete Zufallssignale

Die vorherigen Abschnitte befaßten sich mit der mathematischen Darstellung von zeitdiskreten Signalen und Systemen und den Schlußfolgerungen, die sich aufgrund solcher mathematischen Darstellungen ergeben. Wir haben gezeigt, daß zeitdiskrete Signale und Systeme sowohl eine Zeitbereichs- als auch eine Frequenzbereichsdarstellung besitzen, wobei beide eine wichtige Aufgabe in der Theorie und dem Entwurf von zeitdiskreten Systemen zur Signalverarbeitung übernehmen. Bisher nahmen wir immer an, daß die Signale deterministisch sind, d. h. jeder Wert einer Folge ist durch einen mathematischen Ausdruck, einer Datentabelle oder durch eine andere Gesetzmäßigkeit vollständig bestimmt.

In vielen Fällen ist der Prozeß, der das Signal erzeugt, so komplex, daß eine exakte Beschreibung des Signals extrem schwierig oder unerwünscht, wenn nicht sogar ganz unmöglich ist. In solchen Fällen ist es unerlässlich, das Signal durch einen stochastischen Prozeß zu modellieren. Beispielsweise werden wir in Kapitel 6 sehen, daß eine Vielzahl von Effekten, die uns bei der Implementierung von digitalen Signalverarbeitungsalgorithmen mit endlicher Registerlänge begegnen werden, als additives Rauschen dargestellt werden können, d. h. als eine stochastische Folge. Viele mechanische Systeme erzeugen akustische oder vibratorische Signale, die ausgewertet werden können, um frühzeitig mögliche Fehler festzustellen; auch diese Signale werden oft am besten durch stochastische Signale modelliert. Sprachsignale, die zur automatischen Spracherkennung oder einer Bandbreitereduktion aufbereitet werden und Musiksignale, die zur Qualitätserhöhung besonders präpariert werden, sind nur zwei weitere Beispiele aus vielen.

Ein stochastisches Signal betrachten wir als eine Musterfunktion aus einem Ensemble zeitdiskreter Signale, die durch einen Satz von Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen beschrieben werden. Mit anderen Worten unterliegt ein spezielles Signal zu einer bestimmten Zeit, einer Amplitudenverteilung, die durch ein zugrunde liegendes Wahrscheinlichkeitssystem bestimmt ist.

Der Schlüssel zur mathematischen Darstellung solcher Signale liegt in deren Beschreibung im Sinne von Momenten (Durchschnittswerten). Auch wenn stochastische Signale weder absolut summierbar noch quadratisch summierbar sind und folglich auch deren direkten Fourier-Transformierten nicht existieren, so lassen sich viele (wenn auch nicht alle) Eigenschaften dieser Signale mit Hilfe der *Autokorrelations-* oder *Autokovarianzfolge* beschreiben, für die die Fourier-Transformierten sehr häufig existieren. Wie wir in diesem Abschnitt erörtern werden, ergibt sich für die Fourier-Transformierte der Autokovarianzfolge eine hilfreiche Interpretation als Verteilung der Signalleistung über der Frequenz. Die Verwendung der Autokovarianzfolge und ihrer Transformierten hat einen weiteren wichtigen Vorteil: Die Auswirkungen einer Verarbeitung eines stochastischen Signals mit Hilfe eines zeitdiskreten linearen Systems läßt sich bequem über die Auswirkungen des Systems auf die Autokovarianzfolge beschreiben.

Im weiteren gehen wir davon aus, daß der Leser mit den Grundbegriffen stochastischer Systeme wie einfache und zentrale Momente, Korrelations- und Kovarianzfunktion und dem Leistungsdichtespektrum vertraut ist. Einen kurzen Überblick und eine Zusammenfassung der Notation und der Grundbegriffe befinden sich im Anhang A. Eine ausführliche Behandlung der Theorie der Zufallssignale ist in verschiedenen, sehr guten Texten nachzulesen; z. B. in Davenport (1970) und Papoulis (1984). Unser vorrangiges Ziel in diesem Abschnitt ist es, einen spezifizierten Satz von Ergebnissen vorzustellen, der zur Darstellung von stochastischen Signalen in den späteren Kapiteln benutzt wird. Deshalb betrachten wir zunächst schwach stationäre Zufallssignale und deren Darstellung im Zusammenhang mit einer Verarbeitung in einem linearen zeitinvarianten System. Obwohl wir zur Vereinfachung annehmen, daß

$x[n]$ und $h[n]$ reelle Folgen sind, lassen sich die Ergebnisse recht einfach auf den komplexen Fall erweitern.

Zunächst betrachten wir ein stabiles zeitinvariantes System mit der Impulsantwort $h[n]$. $x[n]$ sei eine reellwertige Folge, die eine Musterfolge eines schwach stationären zeitdiskreten Zufallsprozesses sei. Dann ist das Ausgangssignal des linearen Systems eine Musterfunktion des Ausgangszufallsprozesses, die mit dem Eingangsprozeß über die folgende lineare Transformation verbunden ist:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k]x[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k].$$

Da das System stabil ist, muß $y[n]$ beschränkt sein, sofern $x[n]$ beschränkt ist. Wir werden im Laufe dieses Abschnittes zeigen, daß ein stationärer[†] Eingangsprozeß einen stationären Ausgangsprozeß erzeugt. Das Eingangssignal könnte durch seinen Mittelwert m_x und seiner Autokorrelationsfunktion $\phi_{xx}[m]$ charakterisiert sein, oder wir besitzen zusätzliche Informationen über die Wahrscheinlichkeitsverteilungen erster oder sogar zweiter Ordnung. Zur Beschreibung des Ausgangszufallsprozesses $y[n]$ benötigen wir ähnliche Informationen. In vielen Anwendungsfällen reicht es aus, sowohl den Ein- wie auch den Ausgangsprozeß mit einfachen Momenten, wie dem Mittelwert, der Varianz und der Autokorrelationsfunktion, zu beschreiben. Deshalb werden wir die Beziehungen zwischen dem Ein- und Ausgang für dieser Größen berechnen.

Die ersten Momente, d.h. der lineare Mittelwert von Ein- und Ausgangsprozeß, lauten

$$m_{x_n} = \mathcal{E}\{x_n\}, \quad m_{y_n} = \mathcal{E}\{y_n\}, \quad (2.165)$$

wobei $\mathcal{E}\{\cdot\}$ die Notation für den Erwartungswert ist. Zur Vereinfachung der Notation werden wir nicht allzu sorgfältig in der Unterscheidung zwischen Zufallsvariablen x_n und y_n und ihren Werten $x[n]$ und $y[n]$ sein, so daß Gleichung (2.165) alternativ auch folgendermaßen formuliert werden könnte:

$$m_x[n] = \mathcal{E}\{x[n]\}, \quad m_y[n] = \mathcal{E}\{y[n]\}. \quad (2.166)$$

Ist $x[n]$ stationär, dann ist $m_x[n]$ unabhängig von n und wird als m_x geschrieben; mit einer entsprechenden Notation folgt für $m_y[n]$ dann m_y , falls $y[n]$ stationär ist.

Der Mittelwert des Ausgangsprozesses ergibt sich zu

$$m_y[n] = \mathcal{E}\{y[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\mathcal{E}\{x[n-k]\},$$

wobei wir die Tatsache ausgenutzt haben, daß der Erwartungswert einer Summe mit der Summe der Erwartungswerte identisch ist. Da der Eingangsprozeß stationär ist, gilt $m_x[n-k] = m_x$ und folglich

[†] Im folgenden verwenden wir den Begriff *stationär* und meinen damit inuner „*schwach stationär*“.

$$m_y[n] = m_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]. \quad (2.167)$$

Der Gleichung (2.167) können wir entnehmen, daß der Mittelwert des Ausgangsprozesses ebenfalls konstant ist. Ein zu Gleichung (2.167) äquivalenter Ausdruck in Abhängigkeit von der Übertragungsfunktion lautet

$$m_y = H(e^{j0})m_x. \quad (2.168)$$

Nehmen wir vorübergehend an, daß der Ausgangsprozeß instationär sei, dann ergibt sich die Autokorrelationsfunktion des Ausgangsprozesses für einen reellen Eingangsprozeß zu

$$\begin{aligned} \phi_{yy}[n, n+m] &= \mathcal{E}\{y[n]y[n+m]\} \\ &= \mathcal{E}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[k]h[r]x[n-k]x[n+m-r]\right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r] \mathcal{E}\{x[n-k]x[n+m-r]\}. \end{aligned}$$

Da $x[n]$ als stationär angenommen wird, hängt der Erwartungswert $\mathcal{E}\{x[n-k]x[n+m-r]\}$ nur von der Zeitdifferenz $m+k-r$ ab. Deshalb gilt

$$\phi_{yy}[n, n+m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r] \phi_{xx}[m+k-r] = \phi_{yy}[m]. \quad (2.169)$$

Dies bedeutet, daß die ausgangsseitige Autokorrelationsfolge nur von der Zeitdifferenz m abhängt. Infolgedessen ist der Ausgangsprozeß eines linearen zeitinvarianten Systems, das mit einem schwach stationären Eingangsprozeß angeregt wird, selbst schwach stationär.

Mit der Substitution $l = r - k$ kann die Gleichung (2.169) geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \phi_{yy}[m] &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \phi_{xx}[m-\ell] \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]h[\ell+k] \\ &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \phi_{xx}[m-\ell]c[\ell], \end{aligned} \quad (2.170)$$

wobei wir folgende Definition benutzen:

$$c[\ell] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]h[\ell+k]. \quad (2.171)$$

Eine Folge mit der Gestalt von $c[\ell]$ wird oft als *aperiodische Autokorrelationsfolge* oder einfach als *Impulskorrelationsfolge* von $h[n]$ bezeichnet. Es wird noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, daß $c[\ell]$ die Autokorrelationsfolge einer aperiodischen Folge, d. h. einer Folge mit endlicher Energie, ist und sie sollte nicht mit der Autokorrelationsfolge einer Sequenz mit unendlicher Energie verwechselt werden. In der Tat ist zu erkennen, daß $c[\ell]$ einfach aus der

diskreten Faltung von $h[n]$ mit $h[-n]$ berechnet wird. Die Gleichung (2.170) kann dann interpretiert werden, indem man sich vorstellt, daß die Autokorrelationsfolge des Ausgangssignals eines linearen Systems mit der Faltung der Eingangsausokorrelationsfolge und der Impulskorrelationsfolge des Systems übereinstimmt.

Die Gleichung (2.170) legt es nahe, daß die Fourier-Transformation zur Beschreibung der Antwort eines linearen zeitinvarianten Systems auf stochastische Eingangsprozeß sehr nützlich ist. Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß die Folge $x[n]$ mittelwertfrei ist, d. h. $m_x = 0$; daraus folgt, daß die Autokorrelations- und Autokovarianzfolge identisch sind. Wir erhalten dann mit Hilfe von $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$, $\Phi_{yy}(e^{j\omega})$ und $C(e^{j\omega})$ als den Fourier-Transformierten von $\phi_{xx}[m]$, $\phi_{yy}[m]$ bzw. $c[l]$ aus Gleichung (2.170)

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = C(e^{j\omega})\Phi_{xx}(e^{j\omega}). \quad (2.172)$$

Genauso erhalten wir aus Gleichung (2.171)

$$\begin{aligned} C(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) \\ &= |H(e^{j\omega})|^2, \end{aligned}$$

und somit

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2\Phi_{xx}(e^{j\omega}). \quad (2.173)$$

Die Gleichung (2.173) liefert den Grund für die Bezeichnung *Leistungsdichtespektrum*. Im einzelnen folgt hieraus

$$\mathcal{E}\{y^2[n]\} = \phi_{yy}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{yy}(e^{j\omega}) d\omega \quad (2.174)$$

= mittlere Gesamtleistung des Ausgangssignals.

Setzen wir Gleichung (2.173) in Gleichung (2.174) ein, so erhalten wir

$$\mathcal{E}\{y^2[n]\} = \phi_{yy}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega. \quad (2.175)$$

Rechnen Sie damit, daß $H(e^{j\omega})$ ein ideales Bandpaßfilter ist, siehe Bild 2.18(c). Wir wissen, daß $\phi_{xx}[m]$ eine gerade Folge ist, d. h.

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \Phi_{xx}(e^{-j\omega}).$$

Auch $|H(e^{j\omega})|^2$ ist eine gerade Funktion bezüglich ω . Deshalb können wir schreiben

$$\begin{aligned} \phi_{yy}[0] &= \text{mittlere Leistung des Ausgangssignals.} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\omega_a}^{\omega_b} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega + \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_b}^{-\omega_a} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega. \end{aligned} \quad (2.176)$$

Daher kann die Fläche unter $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ in den Intervallen $\omega_a \leq |\omega| \leq \omega_b$ benutzt werden, um den quadratischen Mittelwert des Eingangssignals in diesem Frequenzband zu beschreiben. Wir stellen fest, daß die Ausgangsleistung nie negativ sein kann, also gilt

$$\lim_{(\omega_b - \omega_a) \rightarrow 0} \phi_{yy}[0] \geq 0.$$

Dieses Ergebnis führt zusammen mit der Gleichung (2.176) zu dem Schluß, daß

$$\Phi_{xx}(\omega) \geq 0. \quad (2.177)$$

Wir merken uns, daß das Leistungsdichtespektrum eines reellen Signals immer reell, gerade und nie negativ ist.

Ein weiteres wichtiges Ergebnis ergibt sich aus der Kreuzkorrelation zwischen der Ein- und Ausgangsfolge eines linearen zeitinvarianten Systems

$$\begin{aligned} \phi_{xy}[m] &= \mathcal{E}\{x[n]y[n+m]\} \\ &= \mathcal{E}\{x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n+m-k]\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\phi_{xx}[m-k]. \end{aligned} \quad (2.178)$$

In diesem Fall erkennen wir, daß sich die Kreuzkorrelation zwischen der Ein- und Ausgangsfolge aus der Faltung der Impulsantwort mit der Eingangsautokorrelationsfolge ergibt.

Die Fourier-Transformierte der Gleichung (2.178) lautet

$$\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\Phi_{xx}(e^{j\omega}). \quad (2.179)$$

Dieses Ergebnis führt auf eine äußerst nützliche Anwendung, wenn am Eingang weißes Rauschen anliegt; d. h. $\phi_{xx}[m] = \sigma_x^2 \delta[m]$. Indem wir dies in Gleichung (2.176) einsetzen, erhalten wir

$$\phi_{xy}[m] = \sigma_x^2 h[m], \quad (2.180)$$

d. h. die Kreuzkorrelation zwischen der Ein- und Ausgangsfolge eines linearen Systems ist für ein mittelwertfreies weißes Rauschen am Eingang proportional zur Impulsantwort des Systems. Auf eine analoge Weise erhalten wir für das Leistungsdichtespektrum eines weiß rauschenden Eingangssignals

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma_x^2, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi. \quad (2.181)$$

Somit folgt aus Gleichung (2.179)

$$\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = \sigma_x^2 H(e^{j\omega}), \quad (2.182)$$

d. h. das Kreuzleistungsdichtespektrum ist in diesem Fall proportional zur Übertragungsfunktion des Systems. Daher können die Gleichungen (2.180)

und (2.182) dazu benutzt werden, um die Impulsantwort bzw. die Übertragungsfunktion eines linearen zeitinvarianten Systems zu schätzen, falls es möglich ist, den Ausgangsprozeß bei Anregung mit weißem Rauschen zu messen.

2.11 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir eine Reihe von grundlegenden Definitionen im Bezug auf zeitdiskrete Signale und Systeme erörtert. Wir betrachteten die Definition eines Satzes von Grundfolgen, die Definition und Darstellung von linearen zeitinvarianten Systemen in Abhängigkeit von der Faltungssumme und einige Folgerungen aus der Stabilität und Kausalität. Für die Klasse von Systemen, für die das Ein- und Ausgangssignal eine lineare Differenzgleichung mit konstanten Koeffizienten erfüllen, bei der vom Anfangsruhezustand ausgegangen wird, wurde gezeigt, daß sie eine wichtige Untergruppe der linearen zeitinvarianten Systeme ist. Die rekursive Lösung solcher Differenzgleichungen wurde diskutiert und die Klasse der FIR- und IIR-Systeme definiert.

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Analyse und Darstellung linearer zeitinvarianter Systeme besteht in deren Frequenzbereichsdarstellung. Die Antwort eines Systems auf eine komplexe exponentielle Eingangsfunktion wurde untersucht, was zu der Definition der Übertragungsfunktion führte. Die Beziehung zwischen der Impulsantwort und der Übertragungsfunktion wurde dann als ein Fourier-Transformationspaar interpretiert.

Die Eigenschaften der Fourier-Darstellungen wurden sehr ausführlich behandelt und eine Reihe von nützlichen Fourier-Transformationspaaren vorgestellt. In den Tabellen 2.1 und 2.2 sind die Eigenschaften bzw. Theoreme zusammengefaßt, und die Tabelle 2.2 enthält einige nützliche Fourier-Transformationspaare.

Das Kapitel schließt mit einer Einführung von zeitdiskreten Zufallssignalen. Diese grundlegenden Ideen und Ergebnisse hierzu werden in späteren Kapiteln benutzt und dort weiterentwickelt.

Auch wenn der Inhalt dieses Kapitel erarbeitet wurde, ohne sich direkt auf zeitkontinuierliche Signale zu beziehen, entsteht eine sehr wichtige Aufgabenklasse der zeitdiskreten Signalverarbeitung durch die Abtastung solcher Signale. Dementsprechend behandeln wir im Kapitel 3 die Beziehungen zwischen zeitkontinuierlichen Signalen und Folgen, die durch eine periodische Abtastung erhalten werden.

Aufgaben

2.1: Betrachtet sei ein beliebiges lineares System mit einer Eingangsfolge $x[n]$ und der Ausgangsfolge $y[n]$. Zeigen Sie, daß $y[n]$ für alle n Null ist, falls $x[n] = 0$ für alle n gilt.

2.2: Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der Linearität (Gleichungen (2.25)), daß sowohl das ideale Verzögerungssystem (Beispiel 2.1) als auch das Kurzzeitmittelwertsystem lineare Systeme sind.

2.3: Untersuchen Sie jedes der folgenden Systeme auf die Eigenschaften: (1) Stabilität, (2) Kausalität, (3) Linearität, (4) Zeitinvarianz und auf (5) Gedächtnislosigkeit.

- (a) $T(x[n]) = g[n]x[n]$ für ein gegebenes $g[n]$
- (b) $T(x[n]) = \sum_{k=n_0}^n x[k]$
- (c) $T(x[n]) = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$
- (d) $T(x[n]) = x[n - n_0]$
- (e) $T(x[n]) = e^{x[n]}$
- (f) $T(x[n]) = ax[n] + b$
- (g) $T(x[n]) = x[-n]$
- (h) $T(x[n]) = x[n] + 3u[n + 1]$

2.4: Über das System in Bild A2.4 ist bekannt, daß es *zeitinvariant* ist. Wenn am Eingang des Systems die Signale: $x_1[n]$, $x_2[n]$ oder $x_3[n]$ anliegen, so erhält man die Systemantworten: $y_1[n]$, $y_2[n]$ bzw. $y_3[n]$, siehe Bild A2.4.

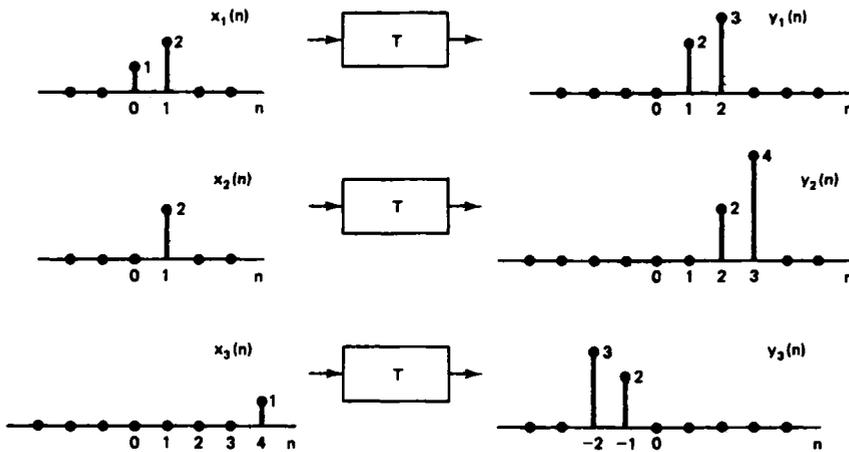


Bild A2.4

- (a) Stellen Sie fest, ob das System T linear sein kann.
- (b) Welche Systemantwort $y[n]$ ergibt sich, wenn am Eingang des Systems T die Folge $\delta[n]$ anliegt?
- (c) Bestimmen Sie alle möglichen Eingangsfolgen $x[n]$, für die die Antworten des Systems T ausschließlich mit den angegebenen Informationen berechnet werden können.

2.5: Das System L aus Bild A2.5 sei *linear*. Gezeigt werden drei Ausgangsfolgen: $y_1[n]$, $y_2[n]$ und $y_3[n]$, welches die Antworten auf die Eingangsfolgen: $x_1[n]$, $x_2[n]$ bzw. $x_3[n]$ darstellen.

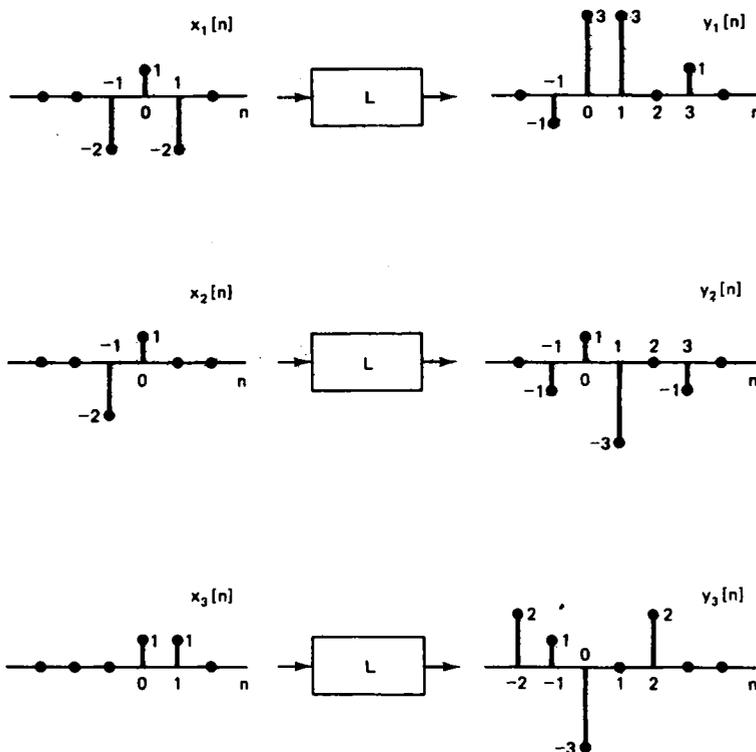


Bild A2.5

- (a) Stellen Sie fest, ob das System L zeitinvariant sein kann.
 (b) Welche Systemantwort $y[n]$ ergibt sich, wenn am Eingang des Systems L die Folge $\delta[n]$ anliegt?

2.6: Für jedes Folgenpaar aus Bild A2.6 ist mit Hilfe der diskreten Faltung die Systemantwort des linearen zeitinvarianten Systems mit Impulsantwort $h[n]$ auf die Eingangsfolge $x[n]$ zu bestimmen.

2.7: Das Bild A2.7 zeigt die Impulsantwort eines linearen zeitinvarianten Systems. Bestimmen Sie die Antwort des Systems auf die Eingangsfolge $x[n] = u[n - 4]$ und skizzieren Sie diese möglichst genau.

2.8: Betrachtet sei ein zeitdiskretes, lineares zeitinvariantes System mit der Impulsantwort $h[n]$. Zeigen Sie, daß die Ausgangsfolge $y[n]$ eine periodische

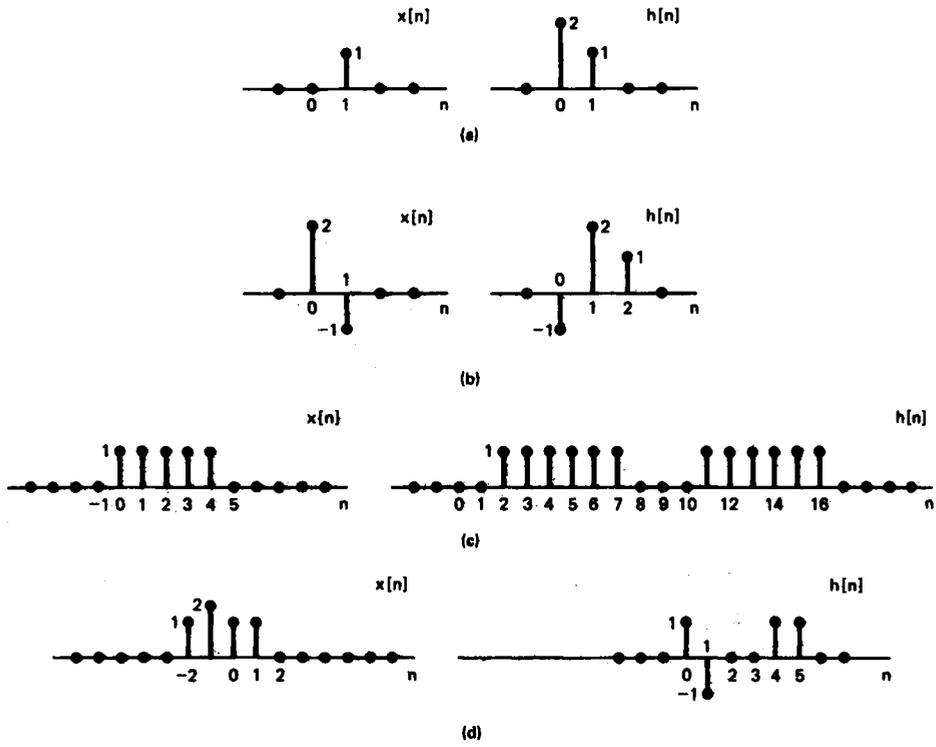


Bild A2.6

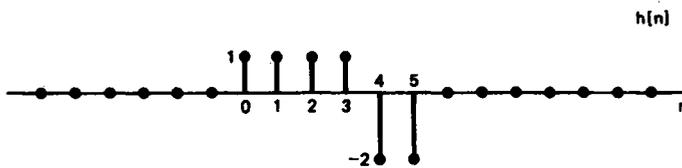


Bild A2.7

Folge mit der Periodendauer N ist, falls die Eingangsfolge $x[n]$ mit der Periode N periodisch ist, d. h. $x[n] = x[n + N]$.

2.9: Ein lineares zeitinvariantes System besitzt die Impulsantwort

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases} \\ = u[n].$$

Bestimmen Sie die Antwort dieses Systems auf die Eingangsfolge $x[n]$ aus Bild A2.9, die folgendermaßen beschrieben werden kann:

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ a^n, & 0 \leq n \leq N_1, \\ 0, & N_1 < n < N_2, \\ a^{n-N_2}, & N_2 \leq n \leq N_2 + N_1, \\ 0, & N_2 + N_1 < n. \end{cases} \quad 0 < a < 1$$

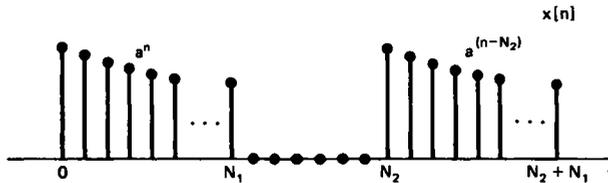


Bild A2.9

2.10: (a) Über die Impulsantwort eines linearen zeitinvarianten Systems ist bekannt, daß sie außerhalb des Intervalls $N_0 \leq n \leq N_1$ identisch Null ist. Die Eingangsfolge $x[n]$ verschwindet außerhalb des Intervalls $N_2 \leq n \leq N_3$. Als Ergebnis wird eine Folge erwartet, die außerhalb des Intervalls $N_4 \leq n \leq N_5$ keine von Null verschiedenen Werte enthält. Bestimmen Sie N_4 und N_5 in Abhängigkeit von N_0 , N_1 , N_2 und N_3 .

(b) Wieviele aufeinanderfolgende Werte von $y[n]$ können maximal ungleich Null sein, wenn $x[n]$ abgesehen von N aufeinanderfolgenden Punkten verschwindet und $h[n]$ nur für M aufeinanderfolgende Werte ungleich Null ist?

2.11: Bestimmen Sie mit Hilfe der direkten Berechnung der Faltungssumme die Sprungantwort des linearen zeitinvarianten Systems, dessen Impulsantwort $h[n]$ gegeben ist durch

$$h[n] = a^{-n}u[-n], \quad 0 < a < 1.$$

2.12: Die Kausalität eines Systems wurde in Absatz 2.2.4 definiert. Zeigen Sie mit Hilfe dieser Definition, daß die Kausalität bei einem linearen zeitinvarianten System erzwingt, daß die Impulsantwort für $n < 0$ verschwindet. Ein Lösungsweg besteht darin, zu zeigen, daß das System *nicht* kausal sein kann, wenn $h[n]$ für $n < 0$ *ungleich* Null ist und daß es zwangsläufig kausal sein muß, wenn die Impulsantwort für $n < 0$ verschwindet.

2.13: In Abschnitt 2.5 haben wir festgestellt, daß die Lösung einer homogenen Differenzgleichung

$$\sum_{k=0}^N a_k y_h[n-k] = 0 \quad (\text{A2.13-1})$$

von der folgenden Form ist:

$$y_h[n] = \sum_{m=1}^N A_m z_m^n, \quad (\text{A2.13-2})$$

wobei die A_m beliebig gewählt werden können und die z_m die N Nullstellen des nachstehenden Polynoms sind:

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = 0, \quad (\text{A2.13-3})$$

d. h.

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = \prod_{m=1}^N (1 - z_m z^{-1}). \quad (\text{A2.13-4})$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Form der homogenen Lösung zu der Differenzgleichung

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = 2x[n-1] \quad (\text{A2.13-5})$$

(b) Bestimmen Sie mit den Randbedingungen $y[-1] = 1$ und $y[0] = 0$ die Koeffizienten A_m der homogenen Lösung.

(c) Nun betrachten wir die Differenzgleichung

$$y[n] - y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = 2x[n-1]. \quad (\text{A2.13-6})$$

Zeigen Sie, daß die Randbedingungen $y[-1] = 1$ und $y[0]=0$ nicht erfüllt werden können, wenn sich die homogene Lösung nur aus Termen der Form nach Gleichung (A2.13-2) zusammensetzt.

(d) Kommen in der Gleichung (A2.13-3) zwei gleiche Nullstellen vor, dann muß für $y_h[n]$ anstelle von Gleichung (A2.13-2) folgende Form angesetzt werden:

$$y_h[n] = \sum_{m=1}^{N-1} A_m z_m^n + nB_1 z_1^n, \quad (\text{A2.13-7})$$

wobei wir angenommen haben, daß z_1 die doppelte Nullstelle ist. Bestimmen Sie unter Verwendung von Gleichung (A2.13-7) die allgemeine Form von $y_h[n]$ für die Differenzgleichung (A2.13-6). Überprüfen Sie explizit, ob die von Ihnen bestimmte Lösung die Gleichung (A2.13-6) mit $x[n] = 0$ erfüllt.

- (e) Bestimmen Sie die Koeffizienten A_1 und B_1 der homogenen Lösung, die Sie im Aufgabenteil (d) erhalten haben, wenn $y[-1] = 1$ und $y[0] = 0$ gilt.

2.14: Gegeben sei die folgende lineare Differenzgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n-1].$$

Bestimmen Sie $y[n]$, wenn $x[n] = \delta[n]$ und $y[n] = 0$ für $n < 0$ gilt.

2.15: Betrachtet sei ein System mit der Eingangsfolge $x[n]$ und der Ausgangsfolge $y[n]$, die der folgenden Differenzgleichung genügen:

$$y[n] = ny[n-1] + x[n].$$

Das System ist kausal und befindet sich im Anfangsruhezustand; d. h. , falls $x[n] = 0$ für $n < n_0$ ist, dann wird $y[n] = 0$ für $n < n_0$.

- (a) Bestimmen Sie für $x[n] = \delta[n]$ die Folge $y[n]$ für alle n .
 (b) Ist das System linear? Begründen Sie Ihre Antwort.
 (c) Ist das System zeitinvariant? Begründen Sie Ihre Antwort.

2.16: Betrachtet sei ein System mit der Eingangsfolge $x[n]$ und der Ausgangsfolge $y[n]$. Die Ein-Ausgangsbeziehung des Systems ist durch die beiden folgenden Eigenschaften definiert:

1. $y[n] - ay[n-1] = x[n]$
2. $y[0] = 1$

- (a) Stellen Sie fest, ob das System zeitinvariant ist.
 (b) Stellen Sie fest, ob das System linear ist.
 (c) Nehmen Sie an, daß die Differenzgleichung (die erste Eigenschaft) weiterhin gültig ist, aber der Wert für $y[0]$ nun auf Null gesetzt wird. Beeinflußt dies Ihre Antworten zum Teil (a) oder (b)?

2.17: Ein kausales zeitinvariantes System wird durch folgende Differenzengleichung beschrieben:

$$y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = 2x[n-1].$$

- (a) Bestimmen Sie die homogene Lösung des Systems, d. h. die möglichen Ausgangsfolgen, wenn $x[n] = 0$ für alle n gilt.
- (b) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems.
- (c) Bestimmen Sie die Sprungantwort des Systems.

2.18: (a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H(e^{j\omega})$ des linearen und zeitinvarianten Systems, dessen Ein- und Ausgangsfolgen die nachstehende Differenzgleichung erfüllen:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2].$$

- (b) Bestimmen Sie eine Differenzgleichung, die das System charakterisiert, dessen Übertragungsfunktion gegeben ist durch

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\omega}}.$$

2.19: Welches der folgenden zeitdiskreten Signale könnte eine Eigenfunktion irgendeines stabilen LTI-Systems sein?

- (a) $5^n u[n]$
- (b) $e^{j2\omega n}$
- (c) $e^{j\omega n} + e^{j2\omega n}$
- (d) 5^n
- (e) $5^n \cdot e^{j2\omega n}$

2.20: Gegeben sei das lineare zeitinvariante System mit der Impulsantwort

$$h[n] = \left(\frac{j}{2}\right)^n u[n], \quad \text{wobei } j = \sqrt{-1}$$

Bestimmen Sie die eingeschwingene Systemantwort, d. h. die Antwort des Systems bei großen n , für die Anregung

$$x[n] = \cos(\pi n)u[n].$$

2.21: Die drei Systeme A , B und C besitzen die Ein- und Ausgangssignale, die in Bild A2.21 angegeben sind. Stellen Sie fest, ob jedes System linear und zeitinvariant sein könnte. Falls Sie mit „ja“ antworten, ist explizit anzugeben, ob das gegebene Ein-/Ausgangspaar vom mehr als nur einen LTI-System erfüllt werden könnte. Erklären Sie Ihre Antwort ausführlich.

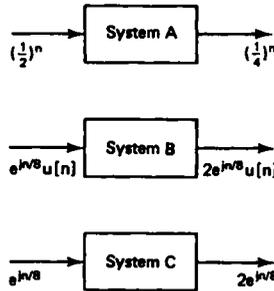


Bild A2.21

2.22: In einem nichtlinearen System nach Bild A2.22 ergibt sich der Ausgang M zu

$$M = \max_n \left| \sum_{k=0}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^k x^2[n-k] \right|,$$

wobei $|\cdot|$ die Betragsbildung darstellt. Da M mit dem maximalen Wert über der Zeit (d. h. für alle n) übereinstimmt, ist M konstant.

Nehmen Sie an, daß $x[n]$ eine komplexe Exponentialfunktion der Form $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ ist. Für verschiedene Werte von ω_0 ergibt sich ein anderer Wert für M ; d. h. für diese Klasse von Eingangsfolgen ist M eine Funktion von ω_0 , was durch die Notation $M(\omega_0)$ berücksichtigt wird.

Geben Sie an, ob $M(\omega_0)$ bezüglich ω_0 periodisch ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Periode.



Bild A2.22

2.23: Ein lineares zeitinvariantes System besitzt die Übertragungsfunktion

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega^3}, & |\omega| < \frac{2\pi}{16} \left(\frac{3}{2}\right) \\ 0, & \frac{2\pi}{16} \left(\frac{3}{2}\right) \leq |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

Die Eingangsfolge des Systems sei eine periodische Dirac-Impulsfolge mit der Periode $N = 16$; d. h. ,

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n + 16k].$$

Bestimmen Sie die Ausgangsfolge des Systems.

2.24: Die *erste Vorwärtsdifferenz* ist eine häufig verwendete, mathematische Operation, die definiert ist durch

$$y[n] = \nabla(x[n]) = x[n] - x[n - 1],$$

wobei $x[n]$ die Eingangsfolge und $y[n]$ die Ausgangsfolge des ersten Vorwärtsdifferenzsystems ist.

- (a) Zeigen Sie, daß dieses System linear und zeitinvariant ist.
- (b) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems.
- (c) Berechnen und skizzieren Sie die Übertragungsfunktion (Amplituden- und Phasengang).
- (d) Zeigen Sie, wenn

$$x[n] = f[n] * g[n],$$

dann folgt

$$\nabla(x[n]) = \nabla(f[n]) * g[n] = f[n] * \nabla(g[n]),$$

wobei das Zeichen $*$ für die diskrete Faltung steht.

- (e) Bestimmen Sie die Impulsantwort eines Systems, das mit dem ersten Vorwärtsdifferenzsystem in Reihe geschaltet werden könnte, um die Eingangsfolge zu rekonstruieren; d. h. bestimmen Sie $h_i[n]$ mit

$$h_i[n] * \nabla(x[n]) = x[n].$$

2.25: Wir untersuchen das System aus Bild A2.25.

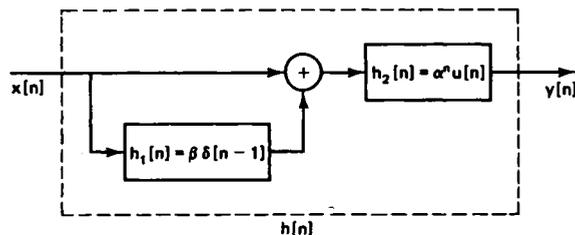


Bild A2.25

- (a) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Gesamtsystems.
- (b) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems.

(c) Geben Sie eine Differenzgleichung an, die die Ausgangsfolge $y[n]$ mit der Eingangsfolge $x[n]$ verknüpft.

(d) Ist das System kausal? Unter welcher Bedingung wäre das System stabil?

2.26: $H(e^{j\omega})$ bezeichne die Übertragungsfunktion eines LTI-Systems, dessen Impulsantwort $h[n]$ im allgemeinen komplex ist.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Gleichung (2.92), daß $H^*(e^{j\omega})$ die Übertragungsfunktion eines Systems mit der Impulsantwort $h^*[n]$ ist, wobei das Zeichen * für konjugiert komplex steht.

(b) Zeigen Sie, daß, wenn $h[n]$ reell ist, die Übertragungsfunktion konjugiert symmetrisch ist, d. h. $H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$.

2.27: Bestimmen und skizzieren Sie die nachstehenden Ausdrücke als Funktion von ω für $X(e^{j\omega}) = 1/(1 - ae^{-j\omega})$ mit $-1 < a < 0$.

(a) $\Re\{X(e^{j\omega})\}$

(b) $\Im\{X(e^{j\omega})\}$

(c) $|X(e^{j\omega})|$

(d) $\angle X(e^{j\omega})$

2.28: (a) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte der Folge

$$r[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Betrachtet sei die Folge

$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi n}{M} \right), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Skizzieren Sie $w[n]$ und drücken Sie die Fourier-Transformierte von $w[n]$ als Funktion der Fourier-Transformierten von $r[n]$ aus. *Hinweis:* Beschreiben Sie zunächst $w[n]$ in Abhängigkeit von $r[n]$ und den komplexen Exponentialfolgen

$$e^{jK(2\pi n/M)} \quad \text{und} \quad e^{-jK(2\pi n/M)}.$$

(c) Skizzieren Sie die Amplitudengänge von $R(e^{j\omega})$ und $W(e^{j\omega})$.

2.29: Die Fourier-Transformierte von $x[n]$ sei $X(e^{j\omega})$. Mit Hilfe der Analyse- und Synthesegleichungen der Fourier-Transformation (Gleichungen (2.212) und (2.113)) ist zu zeigen, daß

(a) $X^*(e^{-j\omega})$ die Fourier-Transformierte von $x^*[n]$ ist und

(b) $X^*(e^{j\omega})$ die Fourier-Transformierte von $x^*[-n]$ ist.

2.30: Für reelle Folgen $x[n]$ ist zu zeigen, daß die Eigenschaft 7 in der Tabelle 2.1 aus der Eigenschaft 1 folgt und daß sich die Eigenschaften 8 bis 11 aus der Eigenschaft 7 ergeben.

2.31: In Abschnitt 2.9 haben wir eine Reihe von Theoremen der Fourier-Transformation ohne Beweis angegeben. Weisen Sie unter Verwendung der Analyse- oder Synthesegleichungen der Fourier-Transformation (Gleichungen (2.212) und (2.113)) die Gültigkeit der Theoreme 1-5 in der Tabelle 2.2 nach.

2.32: In Absatz 2.9.6 wurde intuitiv argumentiert, daß

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}), \quad (\text{A2.32} - 1)$$

wobei $Y(e^{j\omega})$, $H(e^{j\omega})$ und $X(e^{j\omega})$ die Fourier-Transformierten der Ausgangsfolge $y[n]$, der Impulsantwort $h[n]$ bzw. der Eingangsfolge $x[n]$ eines linearen zeitinvarianten Systems sind; d. h.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]. \quad (\text{A2.32} - 2)$$

Bestätigen Sie die Gleichung (A2.32-1), indem Sie die Fourier-Transformation auf die Faltungssumme in Gleichung (A2.32-2) anwenden.

2.33: Weisen Sie die Gültigkeit des Modulationstheorems (Theorem 7, Tabelle 2.2) nach, indem Sie die Fourier-Synthesegleichung (2.112) auf die Gleichung (2.151) anwenden und das Theorem 3 aus der Tabelle 2.2 einsetzen.

2.34: Es seien $x[n]$ und $y[n]$ komplexe Folgen und $X(e^{j\omega})$ bzw. $Y(e^{j\omega})$ deren Fourier-Transformierte.

(a) Mit Hilfe des Faltungstheorems (Theorem 6, Tabelle 2.2) und geeigneter Eigenschaften aus der Tabelle 2.1 ist die Folge in Abhängigkeit von $x[n]$ und $y[n]$ zu bestimmen, deren Fourier-Transformierte durch $X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})$ gegeben ist.

(b) Verwenden Sie das Ergebnis aus Teil (a), um zu zeigen, daß

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega}) d\omega. \quad (\text{A2.34})$$

Die Gleichung (A2.34) ist eine verallgemeinerte Form des Parsevalschen Theorems, das in Absatz 2.9.5 eingeführt wurde.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Gleichung (A2.34) den Zahlenwert der Summe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi n/4)}{2\pi n} \frac{\sin(\pi n/6)}{5\pi n}.$$

2.35: $X(e^{j\omega})$ bezeichne die Fourier-Transformierte des Signals $x[n]$, das in Bild A2.35 zu sehen ist. Führen Sie folgende Rechnungen aus, ohne $X(e^{j\omega})$ explizit auszurechnen.

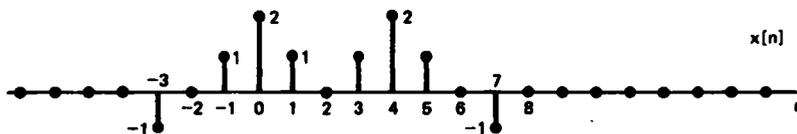


Bild A2.35

- Berechnen Sie $X(e^{j\omega})|_{\omega=0}$.
- Bestimmen Sie $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$.
- Berechnen Sie $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$.
- Bestimmen und skizzieren Sie das Signal, dessen Fourier-Transformierte mit $\text{Re}\{X(e^{j\omega})\}$ übereinstimmt.

2.36: Eine Folge $x[n]$ habe die Fourier-Transformierte $X(e^{j\omega})$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $X(e^{j\omega})$ die Fourier-Transformierten von $y_s[n]$, $y_d[n]$ und $y_e[n]$. Für das in Bild A2.36 dargestellte $X(e^{j\omega})$ sind alle drei $Y(e^{j\omega})$ zu skizzieren.

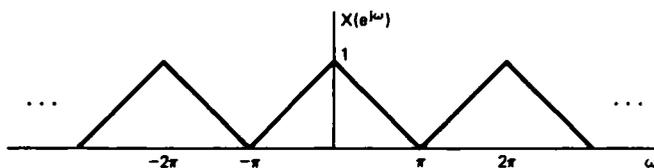


Bild A2.36

- Abtaster

$$y_d[n] = \begin{cases} x[n], & n \text{ gerade,} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

- Kompressor

$$y_d[n] = x[2n]$$

- Expander

$$y_e[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ gerade,} \\ 0, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Beachten Sie, daß $y_s[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + (-1)^n x[n]\}$ und $-1 = e^{j\pi}$ ist.

2.37: Für das System aus Bild A2.37 ist die Ausgangsfolge $y[n]$ zu bestimmen, wenn als Eingangsfolge $x[n] \delta[n]$ anliegt und $H(e^{j\omega})$ ein ideales Tiefpaßfilter ist, das beschrieben wird durch

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

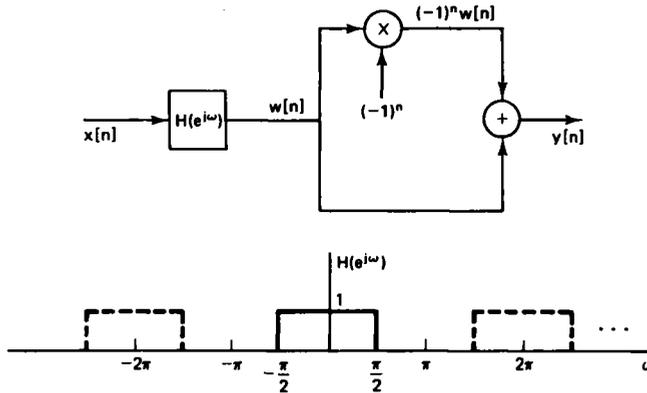


Bild A2.37

2.38: $x[n]$ und $y[n]$ seien zwei stationäre und unkorrelierte Zufallssignale. Zeigen Sie für

daß gilt

$$w[n] = x[n] + y[n],$$

$$m_w = m_x + m_y \quad \text{und} \quad \sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2.$$

2.39: $e[n]$ sei eine weiß rauschende Folge und $s[n]$ sei eine Folge, die zu $e[n]$ unkorreliert ist. Zeigen Sie, daß die Folge

$$y[n] = s[n]e[n]$$

weiß ist, d. h.

$$E\{y[n]y[n+m]\} = A\delta[m],$$

wobei A eine Konstante ist.

2.40: $x[n]$ sei ein reeller, stationärer und weiß rauschender Prozeß, der mittelwertfrei ist und die Varianz σ_x^2 besitzt. Wenn $x[n]$ am Eingang eines linearen zeitinvarianten Systems mit der Impulsantwort $h[n]$ anliegt, entsteht der dazugehörige Ausgangsprozess $y[n]$. Zeigen Sie

- (a) $\mathcal{E}\{x[n]y[n]\} = h[0]\sigma_x^2$;
 (b) $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^2[n]$.

2.41: $x[n]$ sei ein reeller, stationärer und weiß rauschender Prozeß, der mittelwertfrei ist und die Varianz σ_x^2 besitzt. Die Folge $x[n]$ liegt am Eingang einer Reihenschaltung von zwei kausalen, linearen, zeitdiskreten und zeitinvarianten Systemen an, siehe Bild A2.41.

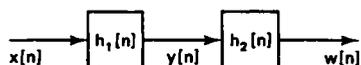


Bild A2.41

- (a) Ist $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{\infty} h_1^2[k]$?
 (b) Ist $\sigma_w^2 = \sigma_y^2 \sum_{k=0}^{\infty} h_2^2[k]$?
 (c) Es sei nun $h_1[n] = a^n u[n]$ und $h_2[n] = b^n u[n]$. Bestimmen Sie zunächst die Impulsantwort des Gesamtsystems aus Bild A2.41 und berechnen Sie damit σ_w^2 . Ist dies, wenn Ihre Antwort zum Aufgabenteil (b) „ja“ war, im Einklang mit Ihrer Antwort im Teil (c)?

2.42: Manchmal ist man am statistischen Verhalten eines linearen zeitinvarianten Systems interessiert, bei dem am Eingang plötzlich ein Zufallssignal angelegt wird. Eine solche Situation beschreibt das Bild A2.42.

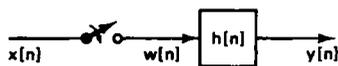
(Schalter bei $n = 0$ geschlossen)

Bild A2.42

$x[n]$ sei ein stationärer, weiß rauschender Prozeß. Dann ist der Eingangsprozeß $w[n]$ des Systems, der gegeben ist durch

$$w[n] = \begin{cases} x[n], & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

ein instationärer Prozeß, so wie auch $y[n]$ instationär ist.

- (a) Leiten Sie einen Ausdruck für den Mittelwert des Ausgangsprozesses in Abhängigkeit des Eingangsmittelwertes her.