

S a m m l u n g G ö s c h e n B a n d 9 5 3

Technische Schwungslehre

Von

Prof. Dr.-Ing. habil. L. Zipperer

Karlsruhe i. B.

ehemals Direktor der Ingenieurschule Mittweida
und apl. Professor der Technischen Hochschule Dresden

I

Allgemeine Schwingungsgleichungen
Einfache Schwinger

Mit 101 Abbildungen

Zweite, neubearbeitete Auflage



Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung - J. Guttentag, Verlags-
buchhandlung - Georg Reimer - Karl J. Trübner - Veit & Comp.

Berlin 1953

Alle Rechte, einschließlich der Rechte der Herstellung von Photokopien
und Mikrofilmen, von der Verlagshandlung vorbehalten

Meinem seit Stalingrad vermißten Sohne
Fritz Heinz Zipperer
gewidmet

Copyright by

WALTER DE GRUYTER & CO.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung – J. Guttentag, Verlags-
buchhandlung – Georg Reimer – Karl J. Trübner – Veit & Comp.
Berlin W 35, Genthiner Str. 13

Archiv-Nr. 110 953

Gen. Nr. 722/68/50

Satz und Druck: VEB Leipziger Druckhaus, Leipzig (111/18/203)

Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Literaturverzeichnis	6
1 Grundlagen	7
11 Schwingungsversuch	7
12 Harmonische Bewegung	9
13 Richtkraft (Federkonstante)	11
2 Schwingungsgleichungen für den Massenpunkt	13
21 Freie Schwingungen	13
211 Schwingungen ohne Dämpfung	13
212 Energiegleichung	16
213 Freie Schwingungen mit Geschwindigkeitsdämpfung	18
214 Freie Schwingungen mit Reibungsdämpfung	21
22 Erzwungene Schwingungen	22
221 Antrieb durch Federkräfte	22
2211 Ohne Dämpfung	22
2212 Mit Dämpfung	23
2213 Zahlenbeispiel	26
2214 Erzwungene Schwingungen	29
222 Antrieb durch Massenkräfte	29
23 Zusammengesetzte Schwingungen	31
231 Sinus- und Cosinus-Schwingungen	31
232 Addition bei gleicher Frequenz	32
233 Addition bei ungleichen Frequenzen	32
24 Harmonische Analyse	35
3 Bestimmung der Schwingungsdauer einfacher Systeme	36
31 Schwingungssysteme unter Wirkung der Schwerkraft	36
311 Mathematisches Pendel	36
312 Physisches Pendel	37
313 Metronom von Mälzel	40
314 Mathematisches Pendel mit großem Ausschlag	41
315 Drehpendel (Bifilarpendel)	45
316 Balkenwaage	48
317 Spiegelschwingungen in kommunizierenden Gefäßen	49

	Seite
32 Schwingungssysteme unter Wirkung elastischer Kräfte	51
321 Systeme mit Längsschwingungen	51
3211 Federpendel	51
3212 Zusammengesetzte Federungen	52
3213 Schwinger großer Schwingungsdauer	53
3214 Schwinger hoher Frequenz (Tonpilz)	55
3215 Schwinger mit mehreren Massen	55
3216 Indirektes Verfahren	58
3217 Systeme mit Übersetzungen im elastischen Teil	63
322 Systeme mit Querschwingungen (Biegungsschwingungen)	65
3221 Eingespannter Stab mit Endmasse	65
3222 Stab mit zwei Massen	66
323 Systeme mit Drehschwingungen	68
3231 Schwingungsgleichung	68
3232 Berechnung der Massenträgheitsmomente	70
3233 Mehrmassensysteme	72
3234 Reduktion von Schwingungssystemen	73
3235 Torsionspendel	73
3236 Unruhe einer Ankeruhr	75
33 Elektrische Schwingungen	76
34 Gegenüberstellung der mechanischen und elektrischen Schwin- gungen	78
4 Schwingungen elastischer Stoffe	80
41 Schwingungsgleichung	80
42 Längsschwingungen	85
421 Elastische Stäbe	85
422 Flüssigkeitssäulen	85
423 Gassäulen	86
43 Transversal-Schwingungen (Querschwingungen)	87
431 Saite	87
432 Torsionsschwingungen	87
433 Biegungsschwingungen eines Stabes mit konstantem Quer- schnitt	87
434 Querschwingungen eines Stabes mit veränderlichem Quer- schnitt	94
4341 Eingespannter konischer Stab	94
4342 Eingespannter Stab mit konstantem Trägheitsradius I	95
4343 Allgemeiner Fall des eingespannten verjüngten Stabes	96
435 Stäbe mit Eigen- und Punktmasse	98
4351 Längsschwingungen, Stab und Feder mit Endmasse	98
4352 Biegungsschwingungen eines gestützten Stabes mit Eigenmasse und Punktmasse	101
436 Näherungsverfahren	102
4361 Federpendel	102
4362 Gestützter Stab mit Punktmasse	104
4364 Eingespannter Stab mit Eigen- und Punktmasse am frei schwingenden Ende	104
4364 Torsionspendel	105

Inhaltsverzeichnis

5

	Seite
5 Anhang	106
51 Grundlagen der Rechnung mit komplexen Zahlen	106
511 Gaußsches Koordinatensystem	106
512 Addition (Subtraktion) komplexer Zahlen	107
513 Multiplikation (Division) komplexer Zahlen	110
514 Potenzieren (Radizieren) komplexer Zahlen	110
52 Harmonische Analyse	111
521 Tafelverfahren Zipperer	113
522 Beispiel	117
Namen- und Sachverzeichnis	119

Anmerkung:

Gleichungen sind abschnittsweise numeriert, z. B. (303), (416).

Abbildungen sind durchnummeriert, z. B. (Abb. 43).

Literaturhinweise sind in eckigen Klammern angegeben, z. B. [4].

Literaturverzeichnis

- [1] Duffing, Erzwungene Schwingungen. Vieweg.
 - [2] Föppel, O., Grundzüge der technischen Schwingungslehre. Springer 1931.
 - [3] Geiger, I., Mechanische Schwingungen und ihre Messungen. Springer 1927.
 - [4] Hartog, J. P., Mechanical Vibrations. New York-London 1947.
Deutsche Ausgabe: Mesmer; 2. Aufl. 1952.
 - [5] Hort, W., Technische Schwingungslehre. Springer 1922.
 - [6] Hort, W., u. Thoma, A., Differentialgleichungen des Ingenieurs. Springer 1939.
 - [7] Karman-Biot, Mathematical Methods in Engineering. New York-London.
 - [8] Klotter, K., Technische Schwingungslehre. Springer 1950.
 - [9] Lehr, E., Schwingungstechnik. Bd. I u. II. Springer 1930, 1934.
 - [10] Schneider, E., Mathematische Schwingungslehre. Springer 1924.
 - [11] Timoshenko, S., Vibration Problems in Engineering. Deutsche Ausgabe: Schwingungsprobleme der Technik. Von Malkin-Helly. Springer 1932.
 - [12] Tölpke, F., Mechanik deformierbarer Körper. Springer 1949.
- Ferner: Lehrbücher der Physik und Mechanik. — Ingenieur-Taschenbücher: Dubbel (1940) — Hütte (1948) — Kröner-Uhland (1952).
- Ausführliches Verzeichnis amerikanischer Literatur in [4].

1 Grundlagen

11 Schwingungsversuch

Belasten wir die Feder (Abb. 1) mit einem Gewicht mg , so nimmt die Feder im Abstand d^1) eine neue Ruhelage an. Wird sie aus dieser gebracht, so führt sie Schwingungen aus, die wir durch Aufzeichnen der Bewegung auf einen gleichförmig bewegten Papierstreifen sichtbar machen können. Versuche mit verschiedenen Massen und Federn zeigen uns, daß die Schwingungsdauer T (sek) abhängig ist von der Masse und einem Eigenschaftswert der Feder. An Stelle der Schwingungsdauer T kann auch der reziproke Wert $\frac{1}{T} = f$, die Frequenz, die Anzahl der Schwingungen in der Sekunde angegeben werden; ihre Dimension ist s^{-1} oder Hz (Hertz). Die Schwingungsauslässe nehmen ab infolge der ihr entgegenwirkenden Reibungskräfte, insbesondere, wenn wir an dem Körper eine in eine Flüssigkeit eintauchende Platte anbringen. Die Schwingung wird gedämpft; die Dämpfung kann so stark sein, daß die Masse, ohne über die Nullage hinauszuschwingen, langsam wieder in diese zurückkriecht; aperiodische Bewegung.

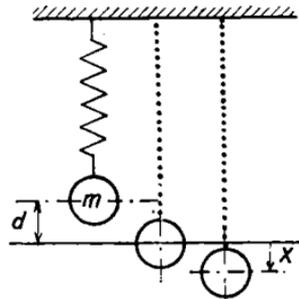


Abb. 1

¹⁾ d entspricht der Durchfederung f der Festigkeitslehre.

Aus Abb. 2 sind diese drei Schwingungsformen zu ersehen. Ist die Geschwindigkeit c des bewegten Papierstreifens, die Schwingungsdauer T einer vollen Schwingung (Rückkehr in die Ruhelage) und deren Länge λ bekannt, so muß

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad (101)$$

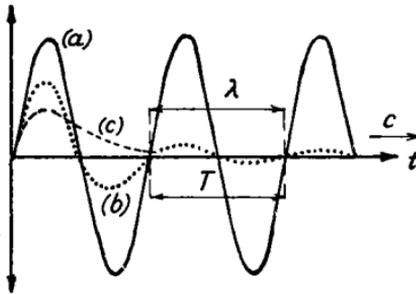


Abb. 2

sein. Wir nennen c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit (m s^{-1}) und λ die Wellenlänge. Den meisten Lesern ist diese Beziehung bekannt

aus der Umrechnung der Rundfunkwellen von Wellenlänge und $\text{kHz} = 1000 \text{ Hz}$. Mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 300000 \text{ km s}^{-1}$ besteht die Beziehung:

$$\lambda(\text{m}) f(\text{kHz}) = 300000 (\text{km s}^{-1}).$$

Die aufgezeichnete Kurve der ungedämpften Schwingung (Abb. 2, a) zeigt einen sinusförmigen Verlauf.

Wir erweitern unseren gedachten Versuch und bewegen den Aufhängepunkt der Feder ebenfalls nach dem Sinusgesetz, was durch eine Kurbelschleife vollständig, durch einen Kurbeltrieb um so angenäherter erreicht werden kann, je größer das Verhältnis von Kurbelstange zur Kurbel ist. Bei sehr langsamer Bewegung des Aufhängepunktes, kleiner Frequenz, stimmen die Bewegungen der Masse mit denen des Aufhängepunktes überein. Mit zunehmender Frequenz werden die Masseausschläge immer größer; bis diese bei einer Frequenz $f = f_0$, der Eigenfrequenz des Schwingungssystems, der freien Schwingung des ersten Versuches, einen sehr großen, theoretisch ∞ großen Wert annehmen. Mit weiterer Frequenzsteigerung nehmen die

Ausschläge wieder ab, bei ∞ großem f bleibt die Masse in Ruhe. Diese Versuchsergebnisse sind in Abb. 2 wieder gegeben; die zweite Kurve b zeigt den Verlauf bei vorhandener Dämpfung. Ist diese klein, so liegt der Maximalausschlag nahe bei f_0 .

Wir haben also folgende Schwingungsvorgänge zu betrachten:

freie und erzwungene Schwingungen, ohne oder mit Dämpfung.

Im nächsten Abschnitt werden diese Vorgänge mathematisch behandelt werden. Wir wollen jedoch versuchen, die zunächst wichtigste Aufgabe, die Bestimmung der Schwingungsdauer T , auf elementarem Wege zu finden.

12 Harmonische Bewegung

Das Kreispendedel (Abb. 3) ist aus der Physik bekannt. Die Masse m führt eine gleichförmige Kreisbewegung mit der Umfangsgeschwindigkeit $v = r\omega$ aus. Auf sie wirken die Zentrifugalkraft Z (ω ist die Winkelgeschwindigkeit s^{-1}) und senkrecht das Gewicht $G = mg$. Die Resultierende R wirkt in Richtung des Fadens. Es ist $mg = R \cos \alpha$ und $m r \omega^2 = R \sin \alpha$, woraus sich ergibt

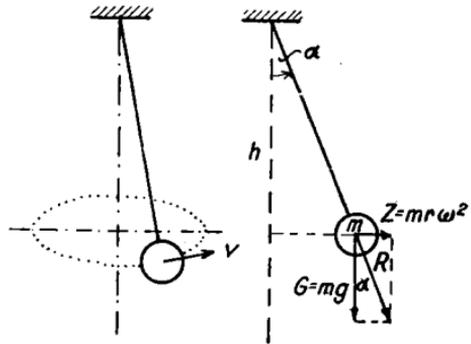


Abb. 3

$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$. Benötigt die

Masse für einen Umlauf T Sekunden, so wird wegen $v = r\omega$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$. Damit erhält man für die

Umlaufsdauer $T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$; sie ist unabhängig von der Größe der Masse.

Projizieren wir die Kreisbewegung (Umfang in 12 Teile geteilt) auf einen Durchmesser (Abb. 4), so erhalten wir eine hin- und hergehende geradlinige Bewegung; die Entfernung der einzelnen Punkte ist nicht mehr gleich. Aus

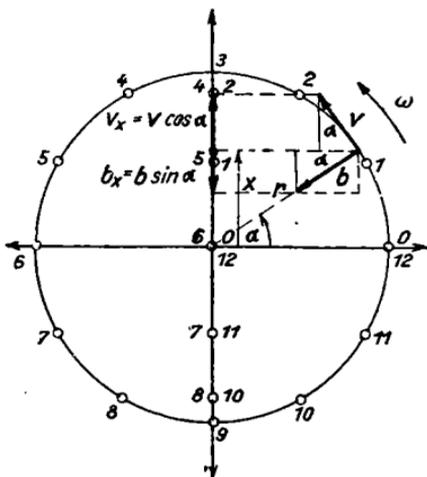


Abb. 4

der Abbildung ist uns schwer abzulesen:

$$x = r \sin \alpha = r \sin \omega t,$$

da der Fahrstrahl sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω dreht. In Richtung der geradlinigen Bewegung sind

$$\text{und } v_x = v \cos \omega t$$

$$b_x = b \sin \omega t \\ = r \omega^2 \sin \omega t = \omega^2 x,$$

letztere, die Beschleunigung stets der Bewegung entgegengesetzt gerichtet, dem Mittel-

punkt zu. Zu diesen Gleichungen gelangt man auch durch zweimaliges Differenzieren des Weges nach der Zeit:

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = r \omega \cos \omega t$$

und

$$b_x = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -r \omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x^1).$$

¹⁾ \dot{x} , \ddot{x} sind die Bezeichnungen für den ersten und zweiten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit.

Die Gleichung für Beschleunigung $b_x = \omega^2 x$ liefert $\omega^2 = \frac{b_x}{x} = b_0$, wenn b_0 die Beschleunigung im Abstand $x=1$ von der Ruhelage aus ist. Schließlich wird

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{b_0}} \text{ (sek).}$$

Nach dem Newtonschen Grundgesetz ist $K_0 = m b_0$, wobei K_0 die Kraft für $x=1$ ist, die Richtkraft; im Abstand x wirkt demnach die Kraft $K = K_0 x$ oder $K = c x$, wenn von nun an c für die Richtkraft gesetzt wird; sie diejenige Kraft ist, die im Abstand l auf die Masse m wirkt. Hiermit erhalten wir für die freie ungedämpfte Schwingung folgende Beziehungen:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{\text{Masse}}{\text{Richtkraft}}} \text{ (sek)}, \quad (102)$$

und da

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (103)$$

ist:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \text{ (s}^{-1}\text{) (Kreisfrequenz)} \quad (104)$$

und den wichtigen Satz:

„Ist in einem schwingenden System die Beschleunigung dem negativen Ausschlag direkt proportional, so liegt eine harmonische, eine Sinus-Schwingung vor.“

13 Richtkraft (Federkonstante)

Mit obigem Satz muß die auf die Masse wirkende Kraft proportional dem Ausschlag x sein. Dies läßt sich nach den Lehren der Festigkeit verwirklichen, wenn die Proportionalitätsgrenze nicht überschritten wird, das Hooksche Gesetz $\sigma = \varepsilon E$ (Spannung = Dehnung mal Elastizitätsmodul) gilt und ferner $\varepsilon = \frac{\lambda}{l} \left(\text{Dehnung} = \frac{\text{Verlängerung}}{\text{Stablänge}} \right)$

und $\sigma = \frac{P}{F}$ (Spannung = $\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$). Abb. 5 gibt das Federdiagramm $\lambda = f(K)$. Unter der Wirkung des Gewichts $G = mg$ der Masse ist die Durchfederung d (Eichung der Feder). Mit c wurde die Richtkraft bezeichnet; führt man mit C (Federung, Nachgiebigkeit) in (cm kg^{-1}) ein, so ist

die eine Größe gleich dem reziproken Wert der anderen; $cC=1$, was auch aus den ähnlichen Dreiecken des Federungsdiagramms entnommen werden kann. Unter der Wirkung des Gewichtes der Masse war die Verlängerung d . Das Diagramm gibt die Beziehung $c = \frac{mg}{d}$, womit

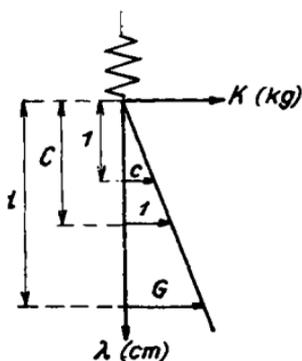


Abb. 5

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{d}{g}}, \quad (105)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{d}} \quad (106)$$

wird, und wenn die minutliche Schwingungszahl mit $\omega = \frac{2\pi n}{60}$ eingeführt wird:

$$n = \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{d}} \cong 300 \sqrt{\frac{1}{d}} \text{ (min}^{-1}\text{)}, \quad (107)$$

da $\sqrt{981} \cong 10\pi$ ist. Zu beachten ist, daß letztere Formel nur für senkrechte Schwingungsrichtung unter Wirkung der Erdanziehung gilt.

Zum Abschluß noch die Anwendung der abgeleiteten Formeln für ein U-Manometer (Abb. 6). Masse der Flüssigkeitssäule: $m = \frac{fl\gamma}{g}$; Richtkraft = Gewicht der Säule