

LEHRBUCH
DER
DARSTELLENDE GEOMETRIE

VON

DR. KARL ROHN UND **DR. ERWIN PAPPERITZ**
O. PROFESSOR DER MATHEMATIK O. PROFESSOR DER MATHEMATIK
AN DER UNIVERSITÄT LEIPZIG AN DER BERGAKADEMIE FREIBERG

IN DREI BÄNDEN

ERSTER BAND
ORTHOGONALPROJEKTION
VIELFLACHE, PERSPEKTIVITÄT EBENER FIGUREN,
KURVEN, ZYLINDER, KUGEL, KEGEL, ROTATIONS-
UND SCHRAUBENFLÄCHEN

MIT 351 FIGUREN IM TEXT

VIERTE, ERWEITERTE AUFLAGE

NEUDRUCK



WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG
J. GUTTENTAG, VERLAGSBUCHHANDLUNG · GEORG
REIMER · KARL J. TRÜBNER · VEIT & COMP.

BERLIN W 10 UND LEIPZIG

1932

Archiv-Nr. 120232

Rodardruck von C. G. Röder A.-G., Leipzig

Vorwort zur ersten Auflage.

Für die Studierenden der exakten Wissenschaften liegt die Notwendigkeit vor, sich eine geläufige Raumschauung zu erwerben. Ohne diese ist ein tieferes Eindringen in die einzelnen Naturwissenschaften und technischen Fächer unmöglich. Die praktische Erfahrung hat aber gelehrt, daß genaue Raumvorstellungen schwer zu erlernen sind. Das einzige Mittel hierzu bietet die bildliche Wiedergabe räumlicher Objekte nach mathematischer Methode, also die darstellende Geometrie. Durch sie und nur allmählich unter Behandlung zahlreicher Beispiele wird der Studierende dahin gebracht, sich in den Fragen, welche die räumlichen Formen betreffen, mit Sicherheit zurecht zu finden. Die darstellende Geometrie hat die Methoden zur Abbildung aller der geometrischen Gebilde zu entwickeln, die als Formelemente an den praktisch vorkommenden komplizierteren Objekten wiederkehren. Bei der Auswahl und Anordnung des Stoffes ist aber vor allem als Ziel die Entwicklung der Raumschauung ins Auge zu fassen. Von diesem Gesichtspunkt aus erscheint es zweckmäßig, auch bei den ebenen Figuren zur Erklärung ihrer Eigenschaften und ihrer Abhängigkeit voneinander die sich im Raume vollziehende Projektion zu benutzen und die letztere überhaupt, wo es nur angeht, in den Vordergrund zu stellen. Dies gilt beispielsweise von der Erklärung der Kollinearverwandtschaften ebener Figuren und von der Theorie der Kegelschnitte; bei den letzteren ist die Entstehung aus der Zentralprojektion des Kreises als Ausgangspunkt geeigneter, als die Erzeugungsweise durch projektive Büschel und Reihen, die der mehr formalen Methode der Geometrie der Lage entspricht.

Das vorliegende Buch soll nach der Meinung der Verfasser vornehmlich dem Zwecke dienen, durch die Lösung der Darstellungsprobleme dem Leser die klare Erfassung geometrischer Fragen und die Bildung präziser Raumvorstellungen zu vermitteln. Es setzt

nur die einfachsten geometrischen Kenntnisse voraus, schreitet systematisch vom Leichten zum Schwereren fort und bezieht viele solche stereometrische Aufgaben in den Lehrbereich ein, die zur Erreichung des oben bezeichneten Zieles geeignet erscheinen. Hierdurch dürfte es besonders den Bedürfnissen des Studierenden Rechnung tragen. Dem mit dem Stoff vertrauten Leser wird neben dem Bekannten gewiß manches Neue, manche Vereinfachung von Konstruktionen und Beweisen entgegenreten.

Der Wunsch, die Ergebnisse der darstellenden Geometrie durchweg auf die Projektionsmethoden begründet zu sehen, mag das Erscheinen dieses Buches rechtfertigen. Möge es sich im dargelegten Sinne als nutzbringend erweisen!

Im August 1893.

Karl Rohn. Erwin Papperitz.

Vorwort zur dritten und vierten Auflage.

Bevor wir eine Neubearbeitung des seit längerer Zeit vergriffenen zweiten Bandes vornehmen konnten, hatte sich die Veranstaltung einer dritten Auflage des ersten Bandes unseres Lehrbuches notwendig gemacht. Wir haben uns bei diesem Anlaß entschlossen, den ganzen Stoff neu anzuordnen und ihn statt auf zwei auf drei Bände zu verteilen.

Maßgebend für die neue Einteilung war die gebotene Rücksichtnahme auf die Bedürfnisse der Studierenden. Unser oberstes Ziel war und ist die methodische Schulung der geometrischen Vorstellungskraft, deren kein Studierender exakter Wissenschaften entraten kann. Und als das einzig und allein geeignete Mittel zur Erreichung dieses Zieles betrachten wir das intensive Studium der darstellenden Geometrie. Man muß indessen klar und scharf unterscheiden zwischen den Bedürfnissen, welche die Studierenden der technischen Wissenschaften und die der Mathematik haben. Die Studierenden der technischen Hochschulen, die künftigen Ingenieure, brauchen die

Theorie in geringerem Umfang, dafür aber um so mehr Einübung der graphischen Methoden, denn die exakte Zeichnung ist die „Sprache der Ingenieure“. Sie sollen das Greifbare in der Geometrie beherrschen und verwerten lernen. Anders bei den Studierenden der reinen Mathematik; für diese bildet die beschreibende Geometrie gewissermaßen nur ein Durchgangsstadium, das sie von der grobsinnlichen Auffassung der Raumformen zu einer verfeinerten begrifflichen Erkenntnis ihrer Gesetze hinführt. Auch sie sollen die Anwendbarkeit ihrer Wissenschaft kennen und nicht vernachlässigen; sie sollen aber andererseits in theoretischer Beziehung weiter vorwärts schreiten und selbst komplizierte räumliche Gebilde erforschen lernen, wenn auch die hier zu gewinnenden Kenntnisse nicht immer eine unmittelbare Anwendung auf andere Wissenszweige zulassen; denn die darstellende Geometrie bezweckt für den Mathematiker in erster Linie die Schulung der Raumvorstellung.

Im übrigen war unser Bestreben darauf gerichtet, die Darlegung der Methoden, die Konstruktionen und die Beweise so einfach wie möglich zu gestalten. Die Anwendungsbeispiele, die Literaturnachweise und historischen Anmerkungen sind vermehrt worden.

Der erste Band behandelt vorbereitend die notwendigen Grundlagen der darstellenden Geometrie, d. h. die Kollinearverwandtschaften der ebenen Figuren (Ähnlichkeit, Affinität und Perspektivität), sowie unter tunlichster Beschränkung auf das Notwendige die konstruktive Theorie der Kegelschnitte und die Hauptsätze über die ebenen Kurven, Raumkurven und Flächen. Im wesentlichen aber ist dieser Teil der Methode der orthogonalen Projektion, also dem Grund- und Aufrißverfahren, und seiner Anwendung auf ebenflächige Gebilde, Kugel, Zylinder, Kegel, Rotationsflächen, zyklische Kurven, Schraubenlinien und Schraubenflächen gewidmet. Die Schattenkonstruktionen sind allenthalben berücksichtigt. Dieser Band umfaßt sonach diejenigen Teile der darstellenden Geometrie, die nicht nur jeder Mathematiker, sondern auch jeder Ingenieur unbedingt kennen muß.

Der zweite Band enthält die Axonometrie, die freie und angewandte Perspektive, sowie die Beleuchtungslehre. Wie wichtig die axonometrischen Darstellungsverfahren für Ingenieure sind, denen sie die beste Methode des Skizzierens liefern, und welche Bedeutung die Kenntnis der Perspektive für Architekten und bildende Künstler besitzt, braucht hier nicht besonders hervorgehoben zu werden.

Der dritte Band ergänzt die beiden ersten durch die Weiterführung der Theorie und ihre Anwendung auf allerlei dem Techniker

ferner liegende geometrische Fragen, um so die Raumschauung noch zu vertiefen. Er bringt — immer in konstruktiver, der projektiven Geometrie angepaßter Behandlungsweise — die allgemeine Theorie der Kurven und Flächen zweiten Grades, vieler Raumkurven und Flächen höherer Art (darunter vorzugsweise der Regelflächen), sowie die Hauptsätze über die Krümmung der Flächen.

Die drei Bände sind in der neuen Bearbeitung gleichzeitig erschienen. Um die Neubearbeitung auch äußerlich als ein einheitliches Ganzes zu kennzeichnen, ist sie durchgängig als dritte Auflage bezeichnet worden, obgleich nur diejenigen Teile, die früher im ersten Bande vereinigt waren, tatsächlich eine dritte Auflage darstellen.

Zur vierten Auflage des ersten Bandes sei nur bemerkt, daß die stereographische Projektion ausführlicher behandelt wurde und daß in einem Anhang Erwägungen über die Einfachheit und Genauigkeit graphischer Konstruktionen beigelegt sind, die für einen jeden, der möglichst genaue Zeichnungen auszuführen hat, von Wert sein dürften.

Wir hoffen durch die vorgenommene Umarbeitung die Brauchbarkeit unseres Lehrbuches erhöht zu haben. Möge es wiederum freundliche Aufnahme bei den Fachgenossen finden und den Lernenden zum Nutzen dienen!

Im August 1912.

Karl Rohn. Erwin Papperitz.

Inhalt.

	Seite
Einleitung	1
 Erstes Kapitel. Ähnlichkeit und Affinität ebener Figuren.	
Ähnlichkeit ebener Figuren.	
1. 2. Zentralprojektion einer Ebene auf eine zweite parallele Ebene. Ähnlichkeit bei ähnlicher Lage	7
3. Parallelverschiebung der Bildebene. Ähnlichliegende Figuren einer Ebene	8
4. Drei paarweise ähnlichliegende Figuren	9
5. Ähnlichkeitszentra zweier Kreise	10
 Parallelprojektion einer ebenen Figur auf eine andere Ebene.	
6. Parallelprojektion einer Ebene auf eine zweite. Affinität bei affiner Lage	10
7. Eigenschaften affingelegener Figuren	11
8. Drei paarweise affinliegende Figuren	12
9. Affingelegene Figuren in einer Ebene (Indirekte Definition)	13
10. Drehung der einen Figur um die Affinitätsachse	13
 Affine und affingelegene Figuren einer Ebene.	
11. Affingelegene Figuren in einer Ebene (Direkte Definition)	13
12. Affingelegene rechte Winkel	15
13. Affingelegene gleiche Winkel	15
14. Verhältnis affiner Strecken	16
 Die Ellipse als affine Kurve zum Kreise und ihre Konstruktionen.	
15. 16. Ellipse; konjugierte Durchmesser, Achsen	17
17. Der zu einer Ellipse affine Kreis bei gegebener Affinitätsachse	19
18. 19. Konstruktion der Ellipse aus konjugierten Durchmessern (Zwei Verfahren)	20
20. 21. Konstruktion der Ellipse aus den Achsen. Tangente und Normale	21
22. Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus konjugierten Durch- messern	22
23. Mechanische Erzeugung der Ellipse	23
24. Konstruktion der Ellipse aus fünf Punkten	25

	Seite
Zweites Kapitel. Darstellung der Punkte, Geraden und Ebenen in Grund- und Aufriß. Bestimmung der einfachen Beziehungen dieser Grundgebilde zueinander.	
Das Grund- und Aufrißverfahren.	
25. Orthogonalprojektion	26
26. Grundriß- und Aufrißverfahren. Zwei-Tafel-System	27
27. Projektionen und Tafelabstände eines Punktes	28
28—30. Projektionen und Spurpunkte einer Geraden	28
31. Spurlinien einer Ebene	29
32—34. Drei-Tafel-System Seitenriß	30
35. 36. Besondere Lagen einer Geraden oder Ebene. Hilfsprojektion	31
37. 38. Vereinigung der Tafeln mit der Zeichnungsebene. Zeichnungsregeln	32
Darstellung der Grundgebilde: Punkt, Gerade, Ebene in verschiedenen Lagen.	
39—41. Der Punkt	34
42—44. Die Gerade	35
45. Die Ebene	38
Punkte, Gerade und Ebenen in vereinigt Lage. Verbindungs- und Schnittelemente. Parallelismus.	
46—51. Kriterien für die vereinigte Lage und den Parallelismus zweier Grundgebilde	39
52. Haupt- oder Streichlinien einer Ebene	42
53—65. Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen die durch Bedingungen (nämlich als Schnitt-, Verbindungs- oder Parallelelemente) bestimmt sind	43
Gerade und Ebenen in rechtwinkliger Stellung. Abstände und Winkel. Die Umlegung in eine Tafel und die Drehung um die Parallele zu einer Tafel.	
66. Projektion eines rechten Winkels in einen rechten Winkel	50
67—70. Normalen einer Ebene. Falllinien. Lot aus einem Punkt auf eine Ebene. Normalebene zu einer Geraden durch einen Punkt	51
71—73. Bestimmung der wahren Länge einer Strecke	52
74. Teilung einer Strecke	53
75. 76. Tafelneigungen einer Geraden. Eine Gerade mit gegebenen Tafelneigungen zu zeichnen	54
77. 78. Tafelneigungen einer Ebene. Eine Ebene mit gegebenen Tafelneigungen zu zeichnen	55
79. Der senkrechte Abstand eines Punktes von einer Ebene	56
80. Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur durch Umlegung in eine Tafel	57
81. Affinität zwischen Grund- und Aufriß einer ebenen Figur	58
82—84. Winkel zweier Geraden, zweier Ebenen, einer Geraden und einer Ebene	59
85. Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur durch Paralleldrehung zu einer Tafel	61
86. Abstand eines Punktes von einer Geraden	62
87. Errichtung einer Normalen von gegebener Länge in einem Punkte eines Dreiecks	63

	Seite
98. Drehung eines Punktes um eine Tafelparallele durch einen gegebenen Winkel	64
89—91. Der kürzeste Abstand zweier windschiefer Geraden	65
Lösung verschiedener stereometrischer Aufgaben durch Projektionsmethoden.	
92—94. Rotationskegel. Zwei Kegel mit gemeinsamer Spitze. Polarkegel	68
95. Rotationszylinder	70
96. Neigungskreis in einer Ebene für Gerade und Ebenen durch einen außerhalb gelegenen Punkt	70
97. Gerade von gegebener Tafelneigung in einer Ebene	71
98. Ebenen von gegebener Tafelneigung durch eine Gerade	71
99. Schnittlinien zweier Rotationskegel mit gemeinsamer Spitze	72
100. Gemeinsame Tangentialebenen zweier Rotationskegel mit gemeinsamer Spitze	73
101. 102. Anwendung auf Gerade und Ebenen mit gegebenen Tafelneigungen	75
103. Gerade, die zwei windschiefe Gerade unter gegebenen Winkeln schneiden	75
104. Ebenen durch einen Punkt, die mit zwei Geraden gegebene Winkel einschließen	76
105. Gerade in einer Ebene, die von zwei festen Punkten außerhalb gegebene Abstände haben	76
106. Gerade durch einen Punkt, die von zwei Geraden vorgeschriebene Abstände haben	77
107. Dreieck, von dem eine Projektion und die Form der andern gegeben ist	79
108. Dreieck, von dem eine Projektion und die Form gegeben ist.	79
109. Schiefe Parallelprojektion eines Kreises in eine gegebene Ellipse	81
Drittes Kapitel. Ebenflächige Gebilde, Körper.	
Die körperliche Ecke; das Dreikant.	
110. Das n -Kant und seine Bestimmungsstücke	83
111. Seiten- und Winkelsumme des konkaven n Kants, Polar- n -Kant	84
112. Das Dreikant. Die sechs Fundamentalaufgaben	85
113—120. Konstruktion des Dreikants aus Seiten und Winkeln	86
121. Dreikant und das zugehörige sphärische Dreieck	93
122. Konstruktion eines Dreikants aus andern Bestimmungsstücken	95
Allgemeines über Vielfache; reguläre Vielfache.	
123. Das Vielfach oder Polyëder. Satz von Euler	96
124. Anzahl der Bestimmungsstücke eines Vielfachs	98
125. 126. Folgerungen aus dem Eulerschen Satze	99
127. Wahrer und scheinbarer Umriß eines Polyëders	100
128. Reguläre Polyëder. Konstruktion des Achtflachs	101
129. 130. Konstruktion des Zwölfflachs	102
131. 132. Konstruktion des Zwanzigflachs	105
133. Reguläre Sternpolyëder	108
134. Tetraëder, dessen Projektionen der Form nach bekannt sind	108
135. Konstruktion des Würfels aus der Kantenlänge und den Richtungen der ersten Kantenprojektionen	110

	Seite
136. Konstruktion des Würfels aus den Längen der ersten Kantenprojektionen	111
137. Die einem Vierfach umschriebene Kugel	112
138. Die einem Vierfach eingeschriebene Kugel	113
Ebene Schnitte und Netze von Vielflachen, insbesondere Prismen und Pyramiden.	
139. Ebener Schnitt und wahre Gestalt einer einzelnen Seitenfläche. Netz des Vielflachs	114
140. Prismen und Pyramiden	115
141. 142. Schnitt und Netz vom geraden und schiefen Prisma	116
143. Schnitt und Netz einer Pyramide	119
144. Bestimmung eines vierseitigen Pyramidenstumpfes aus Basis- und Schnittfläche und deren Neigungswinkel	121
Durchdringung zweier Vielflache.	
145. Allgemeines über die Durchdringungsfigur	122
146. Durchdringung von Würfel und Tetraëder	122
147. Durchdringung von Prisma und Pyramide in spezieller Lage	125
148—150. Durchdringung von Prismen und Pyramiden in allgemeiner Lage	126
Schlagschatten und Eigenschatten bei Vielflachen.	
151. Schlag- und Eigenschattenbegrenzung bei parallelen Lichtstrahlen	128
152. Eigenschatten eines Zwölfflachs und Schlagschatten auf die Tafeln	129
153. Schlagschatten eines Vielflachs auf ein anderes (Abgestumpfte Pyramide und Achtfach)	130
Beispiele für angewandte Schattenkonstruktion.	
154. Freitreppe	132
155. Fenster	133
156. Dachfläche mit Schornstein	135
Viertes Kapitel. Perspektivität ebener Figuren. Harmonische Gebilde.	
Zentralprojektion einer Ebene auf eine andere Ebene.	
157. Zentralprojektion einer ebenen Figur	136
158. Spezialfälle: Affine, ähnliche, kongruente Figuren	137
159. Flucht- und Verschwindungspunkt einer Geraden. Flucht- und Verschwindungslinie einer Ebene	137
160. Unendlich ferne Elemente. Richtung der Geraden, Stellung der Ebene	138
161. Bestimmung der Zentralprojektion bei gegebener Original- und Bildebene	139
162. Drei paarweise perspektive Figuren	138
163. Drehung einer von zwei perspektiven Figuren um die Achse	139
164. Vereinigung von Original- und Bildebene durch Drehung	140
165. Perpektive Beziehungen zwischen Grund- und Schnittpolygon einer Pyramide	141

	Seite
Perspektive in der Ebene.	
166. Eigenschaften perspektiver oder zentrisch-kollinearer Figuren einer Ebene	141
167. Übergang von der ebenen zur räumlichen Perspektive	142
163. 169. Bestimmungstücke der Perspektive, Gegenachsen (Flucht- und Verschwindungslinie) und Gegenpunkte (Flucht- und Verschwindungspunkt)	142
170. Verwandlung der räumlichen Perspektive durch Parallelprojektion in eine ebene	144
171. Winkelrelation bei perspektiver Abbildung	144
Perspektive Grundgebilde.	
172. 173. Die einförmigen Grundgebilde: Punktreihe, Strahlbüschel, Ebenenbüschel. Perspektive Lage zweier Grundgebilde	145
174. Perspektive Punktreihen, Gegenpunkte	146
175—180. Unendlich viele perspektive Lagen dreier Punkte einer Geraden zu dreien einer zweiten. Das Entsprechen aller Punkte der beiden Reihen ist hierbei stets das gleiche. Folgerungen hieraus	146
181. 182. Unendlich viele perspektive Lagen von drei Strahlen eines Büschels mit drei Strahlen eines zweiten. Ihre perspektive Beziehung ist dadurch bestimmt	149
183. Entsprechende Paare rechtwinkliger Strahlen	150
184. Folgerungen	151
185. Kongruente Schnitte aus perspektiven Büscheln	151
186. Von zwei perspektiven Büscheln kann jedes als Orthogonalprojektion des andern angesehen werden	152
187. 188. Unendlich viele perspektive Lagen von drei Ebenen eines Büschels mit drei Ebenen eines zweiten. Ihre perspektive Beziehung ist dadurch bestimmt. Entsprechende Paare rechtwinkliger Ebenen. Folgerungen	152
189. Projektivität von einförmigen Grundgebilden	154
190. $ABCD$, $BADC$, $CDAB$ und $DCBA$ sind projektiv	154
191—193. Überführung zweier beliebiger Vierecke in perspektive Lage	154
Harmonische Grundgebilde. Vierseit und Viereck.	
194. Das vollständige Vierseit	157
195—198. Definition der harmonischen Lage von vier Punkten. Harmonische Beziehungen am Vierseit	158
199. Acht verschiedene projektive Anordnungen von vier harmonischen Punkten	160
200. Vier harmonische Strahlen oder Ebenen	160
201. Konstruktion des vierten harmonischen Punktes	161
202. 203. Das vollständige Viereck; harmonische Beziehungen an ihm. Konstruktion des vierten harmonischen Strahles	161
204. Spezielle harmonische Punkte und Strahlen	162
205. Verwandlung eines Vierecks durch Perspektive in ein Quadrat	164
Metrische Beziehungen zwischen perspektiven Grundgebilden.	
206. 207. Verhältnisgleichung zwischen ähnlichen und affinen Strecken	164
208. 209. Messung von Strecken und Winkeln (Das Vorzeichen)	165

	Seite
210. 211. Bestimmung jedes Elementes in einer Punktreihe, einem Strahl- oder Ebenenbüschel durch ein Abstandsverhältnis	166
212. 213. Das Doppelverhältnis von vier Punkten, Strahlen oder Ebenen	167
214—217. Doppelverhältnisgleichheit bei projektiven einförmigen Grundgebilden. Umkehrung	168
218. Das Doppelverhältnis von vier harmonischen Punkten	170

Involutorische Grundgebilde.

219—221. Vertauschbares Entsprechen bei involutorischen Punktreihen. Mittelpunkt der Involution; ihre Gegenpunkte decken sich	171
222. 223. Gleichlaufende und entgegenlaufende involutorische Reihen. Letztere besitzen Doppelpunkte; ihre harmonische Lage zu den Punktepaaren	172
224. Zwei Punktepaare bestimmen eine Involution. Konstruktion der Paare mittels eines vollständigen Vierecks	173
225. Herstellung der involutorischen Lage	174
226. Metrische Beziehungen	175
227. 228. Vertauschbares Entsprechen bei involutorischen Strahl- oder Ebenenbüscheln; Doppelstrahlen, ihre harmonische Lage zu den Strahlenpaaren	175
229. Zwei Strahlenpaare bestimmen eine Involution. Konstruktion der Paare mittels eines Vierseits	176
230. Das Rechtwinkelpaar. Metrische Beziehungen	176
231. Die Involution rechtwinkliger Strahlenpaare	177
232. Die Punktinvolution als Schnitt kongruenter Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlen rechtwinklig sind	178
233. Konstruktion der Doppelpunkte einer Punktinvolution	178
234. Schnitt einer Strahleninvolution mit einem Kreis durch ihren Scheitel	179
235. Konstruktion der Rechtwinkel- und Doppelstrahlen einer Strahleninvolution	180
236. Die Punktinvolution ohne Doppelpunkte als Schnitt einer Involution rechter Winkel	181

Fünftes Kapitel. Die Kegelschnitte als Kreisprojektionen.

Perspektivität zweier Kreise im Raume und in der Ebene. Pol und Polare beim Kreise.

237. 238. Schiefer Kreiskegel	181
239—241. Wechselschnitte. Zwei beliebige Kreise einer Kugel sind perspektiv. Umkehrung	183
242. Symmetrieebenen und Achsen des schiefen Kreiskegels	185
243—245. Räumliche und ebene Perspektive zweier Kreise	185
246. Der Kreis und die unendlich ferne Gerade als Bild eines Kreises und einer ihn nicht schneidenden Geraden	189
247. Der Kreis und sein Mittelpunkt als Bild eines Kreises und eines von ihm eingeschlossenen Punktes	190
248. Der Kreis und drei Punkte seiner Peripherie als Bild eines Kreises und dreier Peripheriepunkte	191
249. 250. Jeder Kreis ist zu sich selbst perspektiv; Achse oder Zentrum ist dabei beliebig	192

	Seite
251. 252. Definition und Eigenschaften von Pol und Polare beim Kreise	194
253—255. Satz vom umgeschriebenen Vierseit und eingeschriebenen Viereck beim Kreise; seine Bedeutung für Pol und Polare; Polardreieck	196

Ellipse, Parabel und Hyperbel als perspektive Bilder des Kreises.

256—258. Definition der Kegelschnitte als perspektiver Bilder eines Kreises; Polareigenschaften; umgeschriebenes Vierseit und eingeschriebenes Viereck; Polardreieck	198
259—261. Drei Arten der Kegelschnitte: Ellipse, Hyperbel, Parabel	200
262. Die Parabel als perspektives Bild des Kreises; Durchmesser und Achse	202
263. 264. Eigenschaften der Parabel; ihre Gleichung; ihr Krümmungskreis im Scheitel	204
265. 266. Die Hyperbel als perspektives Bild des Kreises; konjugierte Durchmesser, Achsen und Asymptoten	206
267—269. Eigenschaften der Hyperbel; ihre Gleichung bezogen auf die Asymptoten; ihr Krümmungskreis im Scheitel	208
270. 271. Die Ellipse als perspektives Bild des Kreises; sie kann stets auch als affines Bild eines Kreises erhalten werden	211
272—274. Eigenschaften der Ellipse; ihre Gleichung; ihre Krümmungskreise in den Scheiteln	212

Sechstes Kapitel. Ebene Kurven und Raumkurven.

Begriff des Unendlichekleinen in der Geometrie.

275. Endliche, unendliche und unendlich kleine Größen. Die Vergleichung endlicher Größen	215
276. Die Vergleichung unendlich kleiner Größen. Ordnungen derselben	216
277. Gleichungen zwischen unendlich kleinen Größen. Bestimmter Grenzwert für das Verhältnis zweier und für die Summe unendlich vieler unendlich kleiner Größen	217
278—280. Wichtige Beispiele für geometrische unendlich kleine Größen verschiedener Ordnungen	218

Erzeugung ebener Kurven.

281. Erzeugung einer ebenen Kurve als Bahn eines bewegten Punktes. Nachbarpunkte, Kurvenelement. Stetigkeit. Sekante, Tangente. Stetigkeit in bezug auf die Tangente	219
282. 283. Erzeugung durch eine bewegte Gerade als Hüllkurve. Nachbar-tangenten, Kontingenzwinkel, Berührungspunkt. Die Stetigkeit als projektive Eigenschaft. Asymptoten	220
284. Gleichzeitige doppelte Erzeugung der Kurve. Fortschreitungs- und Drehungssinn des Punktes bzw. der zugehörigen Tangente. Gewöhnlicher Kurvenpunkt, Wendepunkt, Rückkehrpunkt, Schnabelspitze, Doppelpunkt, isolierter Punkt	221

Konstruktion von Tangenten und Normalen.

285. Zeichnung einer Kurve aus Punkten und Tangenten derselben	222
286. Tangente einer gegebenen Kurve aus gegebenem Punkte und ihr Berührungspunkt	223

	Seite
287. 288. Tangente und Normale in gegebenem Punkte einer gezeichneten Kurve	224
289. Normale aus gegebenem Punkte zu einer gezeichneten Kurve	225
290. Tangentenkonstruktion mittels der zur Konstruktion der Kurve selbst dienenden Hilfskurven	226
291—295. Beispiele: Ellipse, Cassinische Kurve, Konchoide, Pascalsche Schneckenlinie	227
Krümmung der Kurven, Evoluten.	
296. 297. Krümmungsmaß. Mittlere Krümmung eines Kurvenbogens, Krümmung einer Kurve in gegebenem Punkte. Stetigkeit in bezug auf die Krümmung. Die für das Krümmungsmaß in Betracht kommenden unendlich kleinen Größen	230
298. Krümmungskreis und Krümmungsmittelpunkt. Konkave und konvexe Seite einer Kurve, Krümmungswechsel	231
299—301. Der den Krümmungskreis bestimmende Grenzprozeß. Dreipunktige Berührung des Krümmungskreises mit der Kurve. Krümmungsmittelpunkt als Schnitt benachbarter Kurvennormalen	232
302. Evolute und Evolventen einer Kurve	234
303. Vierpunktige Berührung des Krümmungskreises mit der Kurve, Scheitelpunkte. Verhalten der Evolute	234
304. Verhalten der Krümmung im Wendepunkte, Rückkehrpunkte und bei der Schnabelspitze	235
305. Konstruktion des Krümmungskreises für einen Punkt einer gezeichneten Kurve	236
306. Beziehung zwischen der Krümmung einer ebenen Kurve und der ihres perspektiven Bildes	237
Rektifikation von Kurven.	
307. Regel zur näherungsweise Rektifikation. Rektifikation eines Kreises	239
Raumkurven und ihre Projektionen; abwickelbare Flächen.	
308. Entstehung einer Raumkurve. Kurvenelement, Tangente, Schmiegungebene. Normalebene, Hauptnormale, Binormale, Rektifizierende Ebene	240
309. Gleichzeitige Bewegungen des erzeugenden Punktes, der Tangente und der Schmiegungebene. Stetigkeit. Kontingenz- und Torsionswinkel. Krümmung, Torsion	240
310. Die zur Raumkurve gehörige abwickelbare Fläche. Ihre Erzeugung durch die Tangenten und Schmiegungebenen	241
311. Die Raumkurve als Rückkehrkurve der abwickelbaren Fläche	242
312. Abwickelung der Fläche und der auf ihr liegenden Kurven	242
313. Elemente, die bei der Abwickelung erhalten bleiben: Bogenlängen der Kurven und ihre Winkel mit den Erzeugenden, Kontingenzwinkel, Bogenelemente und Krümmung der Rückkehrkurve	243
314. Beziehung zwischen den Krümmungsradien entsprechender Punkte einer Kurve der abwickelbaren Fläche und der abgewickelten Kurve	244

	Seite
315. Geodätische Linien auf der abwickelbaren Fläche	244
316. Der Richtkegel einer Raumkurve	245
317. Evolutenfläche und Evolventen	245
318. Ebene Projektionen einer Raumkurve. Rückkehr-, Doppel- und Wendepunkte, die den Tangenten, Sehnen und Schmiegungebenen durch das Projektionszentrum entsprechen	245
319. Singularitäten bei den Raumkurven. Stationäre Ebene, Streckungspunkt, Rückkehrpunkt	246
320. Konstruktion der Tangente und Schmiegungeebene in einem Punkte einer Raumkurve	246
Krumme Oberflächen.	
321. Bestimmung einer krummen Fläche durch ein sie überdeckendes Kurvensystem, Nachbarkurven. Erzeugung durch stetige Bewegung einer konstanten oder ihre Form ändernden Kurve	248
322. 323. Tangenten und Tangentialebenen einer Fläche. Knotenpunkte	248
324. 325. Flächennormale, Normalschnitte. Isolierter, gewöhnlicher Doppelpunkt oder Rückkehrpunkt im Schnitt mit der Tangentialebene; elliptische, hyperbolische oder parabolische Krümmung. Haupttangente. Spezialfälle der abwickelbaren, der Kegel- und Zylinderflächen	249
326. Tangentenkegel einer Fläche aus einem Raumpunkte	251
Siebentes Kapitel. Kugel, Zylinder, Kegel.	
Kugel, Zylinder und Kegel, ihre Projektionen, Eigen- und Schlagschatten.	
327. 328. Bestimmung der Projektionen eines Flächenpunktes. Sichtbare und unsichtbare Flächenteile. Doppelkurven, wahrer und scheinbarer Umriss. Projektion einer auf der Fläche liegenden Kurve. Projizierender Zylinder, zur Projektionsrichtung parallele Tangentialebenen	252
329. Lichtstrahlenzylinder, Lichtgrenze auf der Fläche. Flächenteile im Lichte, im Eigen- und Schlagschatten	253
330. Darstellung der Kugel, der Lichtgrenze auf ihr und ihres Schlagschattens	254
331. Zylinderflächen. Ihre Entstehung, Mantellinien. Tangentialebenen	256
332. Wahrer und scheinbarer Umriss einer Zylinderfläche. Lichtgrenze, Eigen- und Schlagschatten	256
333. Darstellung des elliptischen Zylinders, Lichtgrenze, Schlagschatten	258
334. Hohlzylinder, Schlagschatten auf der Innenfläche	259
335. Tangentialebenen eines Zylinders aus gegebenem Raumpunkte	260
336. Kegelflächen. Ihre Entstehung, Spitze, Mantellinien, Tangentialebenen	260
337. Wahrer und scheinbarer Umriss einer Kegelfläche. Lichtgrenze, Eigen- und Schlagschatten	261
338. Darstellung des geraden Kreiskegels in beliebiger Lage. Lichtgrenze, Eigen- und Schlagschatten	262
339. Hohlkegel, Schlagschatten auf der Innenfläche. Tangentialebenen des Kegels aus gegebenem Raumpunkte	264

	Seite
Kugel, Zylinder, Kegel; ihre ebenen Schnitte und Abwickelungen.	
340. Schnitt einer Kugel mit gegebener Ebene	265
341. Schnitt eines beliebigen Zylinders mit gegebener Ebene: Abwicklung	265
342. 343. Ebener Schnitt eines geraden Kreiszyllinders; Abwicklung	267
344. 345. Ebener Schnitt eines schiefen Kreiszyllinders; Abwicklung	268
346. 347. Ebener Schnitt und Abwicklung eines geraden Kreiskegels	273
348. 349. Ebener Schnitt und Abwicklung eines schiefen Kreiskegels	275
350. 351. Die geodätischen Kurven auf dem geraden Kreiskegel	279
Durchdringung von Kugel-, Zylinder- und Kegelflächen.	
352. 353. Allgemeines über Durchdringungen; Durchdringung von Zylinder- und Kegelflächen	281
354. 355. Durchdringung zweier Zylinderflächen, deren Grundkurven Kegelschnitte sind	282
356. 357. Durchdringung eines geraden Kreiskegels mit einem geraden Kreiszyllinder	285
358. 359. Durchdringung von Kugel und Kegel	289
360. Konjugierte Durchmesser und Diametralebenen einer Kegelfläche	291
361. Zwei Kegelflächen mit einem gemeinsamen Kegelschnitt	292
Die stereographische Projektion.	
362. Zweck der stereographischen Projektion	293
363—365. Abbildung des Kreises als Kreis. Konzentrische Kreise	293
366. Das stereographische Bild ist konform	296
367. 368. Orthogonale Kreisbüschel	297
369. Verhältnis von wahrer Länge zur Bildlänge	298
370. 371. Pol und Poldistanz, Meridiane und Parallelkreise, geographische Länge und Breite	299
372. Bilder der Meridiane und Parallelkreise	301
373. Bildkreise durch gegebene Punkte	302
374. 375. Die wahre Größe eines Bildkreisbogens	303
376. 377. Bildnetz für eine Landkarte	305
378. 379. Abbildung der Kugel auf einen Zylinder. Mercatorprojektion und Loxodromie	307
380. Projektion von De la Hire	309
Schlagschatten auf Kegel- und Zylinderflächen.	
381. Bildung der Schlagschatten einer Fläche auf eine andere. Darstellungsverfahren	309
382. Schlagschatten einer Kugelschale auf einen Kegel	310
Beispiele für Anwendungen.	
383. Bemerkungen über Schattenkonstruktion an zusammengesetzten Gebilden	312
384. Allgemeines über Steinschnitt	313
385. Runder Eckturm. Schatten	314
386. Gewölbte Mauernische. Schatten und Steinschnitt	315
387. Dorische Säule. Schatten	317
388. Kuppelgewölbe mit Stichkappenfenstern	319

Achtes Kapitel. Rotationsflächen.**Allgemeines. Eigen- und Schlagschatten, ihr gegenseitiges Verhalten.**

389.	Entstehung der Rotationsfläche durch Rotation einer Kurve	321
390.	Die Rotationsfläche als Hüllfläche einer rotierenden Fläche	321
391.	Definition des Kegel, Zylinder- und Kugelverfahrens bei der Bestimmung von Umriß oder Lichtgrenze	322
392.	Die gemeinsamen Punkte der Eigen- und Schlagschattengrenze	323
393.	Eigen- und Schlagschatten an einer Randkurve	323
394.	Die Punkte der Lichtgrenze mit tangierendem Lichtstrahl	325
395.	Wahrer und scheinbarer Umriß	326

Allgemeine Rotationsflächen, Schnitte, Durchdringung, Eigen- und Schlagschatten.

396.	Tangentialebene und Schnittkurve	326
397.	Durchdringung von Rotationsflächen	328
398. 399.	Eigen- und Schlagschatten einer Rotationsfläche	328
400.	Lichtgrenze bei Zentralbeleuchtung	332

Die Ringfläche.

401.	Parallel- und Meridiankreise	332
402.	Die anderen Kreise auf der Fläche	333
403.	Umriß bei geneigter Achse	334
404.	Konstruktion der Lichtgrenze	336
405.	Eigen- und Schlagschatten bei vertikaler Achse	337

Das Rotationshyperboloid und seine Anwendung.

406.	Die beiden Scharen von Erzeugenden	339
407.	Konstruktion aus gegebenen Elementen	340
408.	Asymptotenkegel	342
409.	Die Schnittpunkte einer Geraden mit der Fläche und ihrem Asymptotenkegel	342
410. 411.	Die Schnittkurve der Fläche mit einer Ebene und ihre Konstruktion	344
412.	Eigen- und Schlagschatten bei Parallelbeleuchtung	347
413.	Tangentialebene und Berührungskurve	349
414.	Das Hyperboloid, das die Ringfläche längs eines Parallelkreises oskuliert	350
415.	Die Haupttangente einer beliebigen Rotationsfläche	351
416.	Die Tangente der Lichtgrenze einer Ringfläche	352
417.	Die Krümmungskreise in den Scheitelpunkten der Lichtgrenze	354
418.	Die Tangente der Lichtgrenze einer Rotationsfläche bei Zentralbeleuchtung	356
419.	Die Punkte der Lichtgrenze einer Ringfläche mit tangierendem Lichtstrahl	357

Die Rotationsflächen 2. Grades.

420. 421.	Schnitte. Tangentenkegel	359
422.	Durch zwei beliebige ebene Schnitte der Fläche gehen zwei Kegelflächen	362
423.	Die beiden Tangentialebenen durch eine feste Gerade	363

	Seite
Rotationsflächen, die sich längs einer Kurve berühren.	
424. Aus der Meridiankurve der einen Fläche die der anderen zu konstruieren	365
425. Die Hüllfläche des geraden Kreiszyllinders	366
426. Zwei Hyperboloide, die sich längs einer Erzeugenden berühren	367
Beispiel für Anwendungen.	
427. Elliptisch gewölbte Kuppel mit Rundbogenfenstern	371
Neuntes Kapitel. Zyklische Linien und Schraubenlinien.	
Rollkurven.	
428—430. Erzeugung der Rollkurven in der Ebene. Normale und Tangente der Rollkurve. Momentanzentrum (Pol). Bewegung einer starren Figur in der Ebene. Polbahn, Polkurve	373
431—433. Krümmungszentra einer Rolllinie. Beziehung zwischen den Krümmungszentren von Polbahn, Polkurve und Rolllinie. Spitzen, Wendepunkte	375
434. Hüllkurve einer rollenden Kurve	378
Zyklische Linien.	
435. Entstehung von zyklischen Linien. Aufzählung der Arten	379
436. Radlinien, Sinuslinie, Spiralen. Ursprungspunkt, Gang, Windung	380
437. Gespitzte Zyklode	380
438. Gestreckte Zyklode	382
439. Verschlungene Zyklode	383
440—442. Epizykloiden	384
433. Hypozykloiden	387
444. Gespitzte Kreisevolvente	388
445. Gestreckte und verschlungene Kreisevolvente	389
446. Archimedische Spirale	390
447. 448. Sinuslinien	391
Die Schraubenlinie.	
449—451. Schraubenlinie und Schraubenbewegung. Achse und Steigungswinkel der Schraubenlinie. Rechts- und linksgängige Windung. Ganghöhe, reduzierte Ganghöhe	393
452. Schmiegungeebene, Krümmungsradius. Reziproke Schraubenlinien	395
453. Tangenten der Schraubenlinie, ihre abwickelbare Fläche, Richtungskegel	396
454. Die verschiedenen Formen der Parallelprojektion einer Schraubenlinie	397
455. Die Schraubenlinie in orthogonaler Projektion	398
456. Tangenten und Schmiegungeebenen der Schraubenlinie	400
457—460. Bestimmungsstücke einer Schraubenbewegung. Erklärung der Bewegung eines Körpers im Raume durch sukzessive Verschraubungen. Momentanachse. Kongruente und affine Parallelprojektionen kongruenter Raumfiguren. Bedingung für die augenblicklichen Bewegungsrichtungen dreier Punkte eines Körpers	401

	Seite
Anwendungen aus der Theorie der Zahnräder.	
461. Methode der Hilfspolbahnen	406
462. Methode der sekundären Polbahnen	408
463. Methode der Äquidistanten	409
464. Zykloidenverzahnung	410
465. Evolventenverzahnung	411
466. Triebstockverzahnung	413
Zehntes Kapitel. Schraubenflächen.	
Allgemeines über Schraubenflächen.	
467. Erzeugung einer Schraubenfläche als Bahn einer verschraubten Kurve. Achse, Erzeugende, Meridian- und Normal-schnitte. Geschlossene und offene Schraubenflächen. Kehl-schraubenlinie	414
468. Erzeugung einer Schraubenfläche als Hüllfläche einer ver-schraubten Fläche. Charakteristik. Rückkehrkante	415
469. Tangentialebenen und Normalen	416
470. Wahrer und scheinbarer Umriß der Schraubenfläche für ortho-gonale Projektion und bei vertikaler Achse	416
471—474. Methoden zur Bestimmung des wahren Umrisses bzw. der Lichtgrenze einer Schraubenfläche für eine beliebige Parallel-projektion. Pol und Polachse einer Geraden in bezug auf eine Verschraubung. Die Lichtgrenzpunkte auf den Schraube-nlinien oder auf den Erzeugenden. Die Lichtgrenzpunkte auf den Normalschnitten und bei Regelflächen auf den erzeugen-den Geraden	417
Allgemeines über Regelschraubenflächen.	
475. Abwickelbare Regelflächen. Erzeugende, Tangentialebene, Rückkehrkurve. Hüllfläche einer bewegten Ebene. Rich-tungskegel	422
476. Windschiefe Regelflächen. Zentralpunkt einer Erzeugenden, Striktionslinie. Tangential- und asymptotische Ebene. Asym-ptotische abwickelbare Fläche, Richtungskegel	423
477. Einteilung der Regelschraubenflächen	423
478. Verschraubung einer Ebene. Formen des Normalschnittes einer Regelschraubenfläche	424
Die abwickelbare Schraubenfläche.	
479. Die abwickelbare Schraubenfläche in orthogonaler Projektion	426
480. Meridianschnitt. Schnitt mit einer beliebigen Ebene	428
481. Gleiten und Rollen der erzeugenden Geraden als Tangente an der Rückkehrschraubenlinie. Schnittpunkte der Fläche mit einer Geraden	429
482. Abwicklung der Fläche und der Kurven auf ihr	430
483. Eigen- und Schlagschattengrenzen der Fläche bei Parallel-beleuchtung	433
Windschiefe Regelschraubenfläche.	
484. Geschlossene gerade Schraubenfläche in orthogonaler Projek-tion. Schnittpunkte mit einer Geraden, Schnitt mit einer Ebene	435

	Seite
485. 486. Eigen- und Schlagschattengrenzen derselben	436
487. Offene gerade Schraubenfläche. Entstehung und Darstellung	439
488. 489. Lichtgrenze und Schlagschattengrenzen derselben	440
490. Geschlossene schiefe Schraubenfläche. Richtungskegel	443
491. Meridianschnitt, Doppelkurven, Normalschnitt. Tangentialebene	445
492. 493. Wahrer und scheinbarer Umriß der Fläche für die zweite Projektion	445
494. Eigen- und Schlagschattengrenzen derselben	448
495—498. Untersuchung der Kurven 4. Ordnung, die den Grundriß ihrer Lichtgrenze bilden	451
499. Offene schiefe Schraubenfläche. Richtungskegel. Kehl- schraubenlinie. Normalschnitt, Doppelkurven, Meridianschnitt	456
500. Asymptotische abwickelbare Fläche. Striktionslinie	458
501. Wahrer und scheinbarer Umriß für die erste und zweite Projektion	458
502. Eigen- und Schlagschattengrenzen	459
503—505. Untersuchung der Kurven 4. Ordnung, die den Grundriß der Lichtgrenze bilden	461
Zyklische Schraubenflächen.	
506. Die Schraubenfläche von kreisförmigem Normalschnitt. Eigen- und Schlagschatten	468
507. 508. Die Schlangrohrfläche (Serpentine). Lichtgrenze und Schlag- schatten	471
Schrauben.	
509. Schraube und Schraubenmutter. Kern, Gewinde, Schrauben- profil. Scharfgängiges, flachgängiges und mehrfaches Ge- winde	476
510. Flachgängige Schraube, Eigen- und Schlagschatten	476
511. Scharfgängige Schraube, Eigen- und Schlagschatten	478
512. Die Schraubenmutter einer scharfgängigen Schraube, Eigen- und Schlagschatten	481
Anwendungsbeispiel.	
513. Zerlegbare Wendeltreppe	483
Anhang.	
Einfachheit und Genauigkeit graphischer Konstruktionen.	
514—517. Postulate der Konstruktion. Werkzeuge des Geometers. Gra- phische Charaktere und Operationen. Ihre Bewertung in der Geometrographie. Maß der Einfachheit einer Konstruktion.	486
518—525. Theorie der graphischen Konstruktionsfehler	489
Literaturnachweise und historische Anmerkungen	494

EINLEITUNG.

Alle Zweige der Geometrie haben die Untersuchung gesetzmäßig entstandener Raumgebilde (ebener und räumlicher Figuren) zum Gegenstande. Während aber die Geometrie der Lage und die analytische Geometrie das hierdurch bezeichnete Ziel auf rein theoretischem Wege zu erreichen suchen, beschäftigt sich die darstellende Geometrie, wie schon ihr Name besagt, mit der praktischen Durchführung des Prozesses der Darstellung oder Konstruktion der Figuren, die für die vorgenannten beiden Disziplinen an sich nebensächlich ist und mit steigender Entwicklung des Anschauungsvermögens mehr und mehr entbehrlich wird. Die darstellende Geometrie ist eine angewandte mathematische Disziplin: sie dient den Bedürfnissen der Praxis in verschiedenen Zweigen der technischen Wissenschaften und der Kunst. Zugleich aber bildet sie für den Mathematiker und Techniker das wirksamste Mittel, um das Vermögen der räumlichen Anschauung, dessen sie bei der Behandlung räumlicher geometrischer Fragen allenthalben bedürfen, bis zu möglichst hohem Grade zu entwickeln.

Der Zweck der darstellenden Geometrie ist die Bestimmung der Raumgebilde nach Gestalt, Größe und Lage durch die Konstruktion. Sie bedient sich dabei in der Hauptsache ebener Bilder derselben, indem sie zeigt, wie man mittels geeigneter Methoden einerseits von den irgendwie definierten räumlichen Objekten ihre Bilder gewinnen, andererseits wie man von diesen ausgehend auf die Eigenschaften der dargestellten Gebilde zurückschließen kann. In dieser letzteren Beziehung dient sie also dazu, geometrische Eigenschaften räumlicher und ebener Gebilde aufzufinden und zu beweisen.

Außer auf die Strenge und Einfachheit des mathematischen Gedankenganges hat die darstellende Geometrie bei der Ausbildung ihrer Methoden auch auf die Erreichung größtmöglicher Genauigkeit für die praktische Ausführung der Konstruktionen Bedacht zu nehmen. Unter den verschiedenen möglichen Methoden, die zur gesetzmäßigen Abbildung der Raumfiguren führen, wählt sie demgemäß nur eine kleine Anzahl, als für ihre Zwecke geeignet, aus. Diese beziehen sich sämtlich auf die Konstruktion der ebenen Bilder durch Projektion.

Die Methode des Projizierens ist aus den Vorgängen beim Sehen der Gegenstände abstrahiert. Die Zentralprojektion entsteht, wenn man aus einem gegebenen Projektionszentrum (Augpunkt) durch die Punkte des Objektes projizierende Strahlen (Sehstrahlen) zieht und diese mit einer Ebene, der Bildebene, schneidet. Statt des Projektionszentrums kann auch eine feste Richtung für die projizierenden Strahlen gegeben werden, so daß sie gegen die Bildebene gleiche Neigung erhalten, insbesondere zu ihr rechtwinklig werden; hierbei ergibt sich die schiefe oder speziell die orthogonale Parallelprojektion. Diese Methoden empfehlen sich vor anderen durch die Bildlichkeit der Darstellungen, d. h. dadurch, daß die Gesichtseindrücke, die wir von letzteren haben, in allem Wesentlichen mit denen übereinstimmen, wie sie die dargestellten Objekte selbst hervorrufen würden. Hiermit ist der weitere Vorteil verknüpft, daß bei ihrer Zugrundelegung die Entwicklung der geometrischen Beziehungen an den räumlichen Objekten sich am deutlichsten gestaltet.

Mit Rücksicht auf die Anwendungen sucht man die Anschaulichkeit der Darstellungen räumlicher Objekte dadurch zu erhöhen, daß man ihnen die Wiedergabe der Beleuchtungsverhältnisse für eine geeignet angenommene Lichtquelle, namentlich die Eigen- und Schlagschatten in genauer Konstruktion hinzufügt. Die Lichtquelle wird entweder durch einen leuchtenden Punkt im Endlichen vertreten, oder man nimmt sie in unendlicher Ferne an, so daß die Lichtstrahlen parallel werden. Die Theorie der Schattenkonstruktionen ist in der Projektionslehre enthalten; die Theorie der Beleuchtung gesetzmäßig gestalteter Oberflächen schließt sich eng an die erstere an, bedarf aber besonderer Auseinandersetzungen.

In letzter Linie kommen für die darstellende Geometrie Methoden in Betracht, welche auf die Konstruktion räumlicher Abbilder oder Modelle der Raumfiguren abzielen. Hierbei bedarf die Konstruktion von Modellen, insoweit sie mit den gegebenen Objekten kongruent oder (bei verändertem Maßstabe) in allen Teilen ähnlich sind, ihrer unmittelbaren Faßlichkeit wegen, keiner näheren Erläuterung. Daneben kommt die sogenannte Reliefperspektive gelegentlich zur Anwendung. Ihre Theorie läßt sich als eine Verallgemeinerung der Projektionsmethode an deren Darlegung ohne Schwierigkeit anfügen.

Die darstellende Geometrie bedarf zu ihrer Entwicklung keiner anderen theoretischen Voraussetzungen als der Begriffe und Lehr-

sätze der elementaren Planimetrie und Stereometrie. Diese bezeichnen daher auch das Maß der mathematischen Vorkenntnisse, die zum Verständnisse dieses Lehrbuches erforderlich sind und auf die Bezug genommen wird, ohne Erklärungen oder Beweise hinzuzufügen. An die Elemente der Raumlehre anknüpfend bildet die darstellende Geometrie selbständig die Lehre von den Projektionen aus. Das Verfahren des Projizierens aber, das in erster Linie benutzt wird, um die Darstellung gegebener Raumfiguren zu gewinnen, soll gleichzeitig dazu dienen, Eigenschaften derselben zu erkennen und zu beweisen. Auch sollen die Projektionsmethoden auf höhere stereometrische Fragen angewandt und diese durch Konstruktion gelöst werden. Dann erst wird dem Zwecke der mathematischen Schulung der Anschauung genügend Rechnung getragen; denn jede konstruktive Lösung besteht in einer methodisch geordneten Folge von Operationen, deren geometrische Bedeutungen, im Gegensatz zu denen der rechnenden Operationen, einzeln anschaulich erfaßt, in ihrer Gesamtheit aber bei der graphischen Ausführung überblickt werden können.

Durch ihre Methode wird unsere Wissenschaft naturgemäß auch zur Untersuchung solcher Eigenschaften der Figuren geführt, die sich bei den durch Projektion gewonnenen Bildern wiederfinden. Diese durch Projektion unzerstörbaren oder projektiven Eigenschaften der Raumgebilde sind es, die in allgemeiner Weise aufgefaßt die Grundlagen der Geometrie der Lage ausmachen. Bei letzterer fällt die Rücksicht auf Darstellbarkeit fort; sie operiert lediglich mit Begriffen. Die darstellende Geometrie aber bereitet die Bildung dieser Begriffe vor, indem sie alle geometrischen Gesetze untersucht, die durch den wirklichen Vorgang der Projektion direkt begründet werden.

Steht also die darstellende Geometrie zur Geometrie der Lage in näherer Beziehung als zur analytischen Geometrie, da diese die Gebilde und ihre Eigenschaften durch Gleichungen zwischen Maßzahlen bestimmt, so kann sie doch auf den Gebrauch von Maßrelationen nicht völlig verzichten, weil die Bestimmung der Größenverhältnisse, ebensogut wie die der Lagebeziehungen, in ihrer Aufgabe liegt. Aber sie verwendet nur die einfachsten Formen derselben, wobei an die Stelle der Rechnung mit analytischen Größen sogleich die Konstruktion treten kann.

Irgend eine Aufgabe der darstellenden Geometrie ist als gelöst zu betrachten, wenn sie zurückgeführt ist auf solche Elementaroperationen, die man ohne weiteres mit bekannten Hilfsmitteln

durchführen kann. Unter jenen Elementaroperationen aber sind lediglich die folgenden, die sich sämtlich auf eine ebene Zeichnungsfläche beziehen, zu verstehen:

- das Ziehen gerader Linien durch gegebene Punkte; insbesondere das Ziehen gerader Linien, die zu einer gegebenen Geraden parallel sind, oder auf ihr rechtwinklig stehen;
- das Schlagen von Kreisen um ein gegebenes Zentrum und mit gegebenem Radius.

Bezüglich des Entwicklungsganges mag folgendes im voraus bemerkt werden. Mit dem Einfachsten wird begonnen; so geht bei der Darstellung räumlicher Objekte die orthogonale der schiefen Parallel- und der Zentralprojektion voraus. Zuerst werden durch diese Projektionen ebene Figuren abgebildet. Vereinigt man dann Bild und Originalebene in geeigneter Weise, so ergeben sich mittelbar geometrische Abhängigkeiten, die zwischen Figuren ein und derselben Ebene stattfinden; sie werden Kollinearverwandtschaften oder Kollineationen genannt, weil dabei geraden Linien stets wieder Geraden entsprechen. Bei paralleler Lage von Bild- und Originalebene liefert die schiefe Parallelprojektion kongruente Figuren, die Zentralprojektion aber ähnliche Figuren bei ähnlicher Lage. Ist dagegen die Bildebene beliebig gegen die Originalebene gelegen, so erhält man eine Verwandtschaft ebener Figuren, die bei Parallelprojektion als Affinität bei affiner Lage und bei Zentralprojektion als zentrische Kollineation ebener Systeme oder gewöhnlich als Perspektivität bezeichnet wird.

Gerade deshalb, weil die genannten Verwandtschaften ebener Gebilde aus Projektionen im Raume entstanden gedacht werden können, haben sie für die darstellende Geometrie eine prinzipielle Wichtigkeit; die bei der Darstellung räumlicher Objekte auftretenden Probleme führen immer wieder auf sie zurück. Es erschien daher zweckmäßig, sie an geeigneter Stelle ausführlich zu behandeln. Wir beginnen also die Darlegung der Methoden der Parallelprojektion mit einem Kapitel über Ähnlichkeit und Affinität bei ebenen Figuren. Dementsprechend würde ein Kapitel über Perspektivität ebener Figuren vor der Behandlung der Perspektive räumlicher Figuren seinen natürlichen Platz finden. Wir ziehen es aber vor, ein solches bereits an einer früheren Stelle einzuschalten und später darauf zurück zu verweisen, weil für gewisse Gebilde schon an und für sich die Gesetze der Perspektivität in Betracht kommen, namentlich für Pyramiden und Kegel und ihre ebenen Schnitte.

Bei der Entwicklung der Projektionsmethoden für beliebige (nicht ebene) Objekte wird jedesmal mit der Darstellung der einfachen Grundgebilde: Punkt, Gerade, Ebene und der Lösung der aus ihren möglichen Beziehungen sich ergebenden Fundamentalaufgaben begonnen, um daran die Darstellung und Untersuchung der komplizierteren Gebilde in angemessener Ordnung anzuschließen.

Schließlich mögen noch einige Bemerkungen über die hauptsächlichsten, zum Teil am gehörigen Orte noch näher zu erläuternden Bezeichnungen und Abkürzungen Platz greifen. Wir werden durchgängig:

Punkte mit großen lateinischen Buchstaben: $A, B, \dots P, \dots$,

Gerade mit kleinen lateinischen Buchstaben: $a, b, \dots g, \dots$,

Ebenen mit großen griechischen Buchstaben: $A, B, \dots E, \dots$,

Winkel mit kleinen griechischen Buchstaben: $\alpha, \beta, \dots \varphi, \dots$,

bezeichnen, und zwar verwenden wir meist die ersten Buchstaben des betreffenden Alphabets für gegebene oder bekannte Elemente, für variable oder unbekannt aber die später folgenden Buchstaben.

Als Zeichen der Verbindung mehrerer Elemente durch ein neues Grundgebilde, welches sie zusammengenommen bestimmen, dient die bloße Nebeneinanderstellung der sie bezeichnenden Buchstaben. Es bedeutet also:

$g = AB$ die gerade Verbindungslinie der Punkte A und B ,

$E = ABC$ die Verbindungsebene der drei Punkte A, B, C ,

$\Delta = Ab$ die Verbindungsebene des Punktes A und der Geraden b ,

$\Gamma = ab$ die Verbindungsebene der sich schneidenden Geraden a und b .

Zur Bezeichnung der Schnittelemente wählen wir das zwischen die betreffenden Buchstaben einzufügende Symbol \times . Hiernach bedeutet:

$P = g \times h$ den Schnittpunkt der in einer Ebene liegenden Geraden g und h .

$Q = g \times E$ den Schnittpunkt der Geraden g und der Ebene E ,

$g = E \times \Delta$ die Schnittlinie der Ebenen E und Δ .

Wie gebräuchlich, legen wir parallelen Geraden einen unendlich fernen Schnittpunkt (Richtungspunkt, Richtung), parallelen Ebenen eine unendlich ferne Schnittlinie (Stellungsgerade, Stellung) bei.

Diese Bezeichnungen werden miteinander nach Bedürfnis kombiniert; z. B. würde $AB \times PQR$ den Schnittpunkt der Verbindungslinie der Punkte A, B mit der Verbindungsebene der Punkte P, Q, R darstellen, usf.

Als Dreieckszeichen dient \triangle , als Winkelzeichen \sphericalangle , so daß $\triangle ABC$ das Dreieck mit den Ecken A, B, C ,

$\alpha = \sphericalangle ABC$ den Winkel, welchen die Schenkel BA und BC am Scheitel B einschließen,

$\beta = \sphericalangle ab$ den Winkel der Geraden a und b ,

$\gamma = \sphericalangle aE$ den Neigungswinkel der Geraden a gegen die Ebene E ,

$\varphi = \sphericalangle E\Delta$ den Winkel der Ebenen E und Δ

bezeichnet.

R ist das Symbol für den rechten Winkel oder 90° , $2R$ für den gestreckten Winkel usf.

Neben den bereits üblichen Abkürzungen \parallel , \nparallel , \perp , \sim , \cong für parallel, parallel und gleich, senkrecht, ähnlich und kongruent, führen wir noch ein neues Symbol für den senkrechten Abstand ein; es soll nämlich $(P \perp g)$ die Entfernung des Punktes P von der Geraden g , $(P \perp E)$ die des Punktes P von der Ebene E repräsentieren.

Übrigens wird für die geometrischen Beziehungen keineswegs ausschließlich die symbolische Schreibweise angewendet werden. Dieselbe soll nur bei Beweisen die Übersicht erleichtern und bei der unvermeidlichen Wiederholung geläufiger Operationen die Möglichkeit der Kürzung gewähren.

Im besonderen sind folgende feststehende Bezeichnungen zu nennen:

Π_1, Π_2 für die beiden rechtwinkligen Projektionsebenen bei orthogonaler Projektion, x für ihre Schnittlinie oder Achse.

P', P'' für die Projektionen eines Punktes P ,

g', g'' für die Projektionen einer Geraden g ,

G_1, G_2 für die Spurpunkte einer Geraden g ,

e_1, e_2 für die Spurlinien einer Ebene E .

Schiefe Parallelprojektionen werden durch Anhängung des unteren Index s , zentralperspektive Bilder durch die des Index c bezeichnet. Die Umlegung einer ebenen Figur in eine andere Ebene um die zu beiden gehörige Spurlinie charakterisieren wir durch den unteren oder oberen Index o , Elemente, die durch Drehung um irgendeine Gerade eine neue Lage erhalten haben, ebenso durch den Index Δ , endlich Schatten durch den unteren oder oberen Index $*$ oder * .

Ziffern auf halber Höhe, z. B. 1 , verweisen auf die Literaturnachweise am Ende des Bandes.

ERSTES KAPITEL.

Ähnlichkeit und Affinität ebener Figuren.

1. Bevor wir die allgemeinen Gesetze der orthogonalen Parallelprojektion entwickeln und sie auf räumliche Gebilde anwenden, betrachten wir die ebenen Gebilde für sich. Hierbei beschränken wir uns nicht auf die orthogonale Parallelprojektion, sondern behandeln zuerst — gewissermaßen als Vorstufe — die einfachste Form der Zentralprojektion, bei welcher Original- und Bildebene parallel liegen, hierauf aber sogleich die schiefe Parallelprojektion. Aus diesen beiden im Raume zu vollziehenden Projektionsarten werden die Ähnlichkeit und die Affinität zwischen Figuren einer Ebene abgeleitet; ihre Kombination ergibt eine allgemeinere Verwandtschaft, die Affinität im weiteren Sinne, die uns jedoch hier nicht beschäftigen soll.¹⁾

Ähnlichkeit ebener Figuren.

2. Es sei eine Ebene E im Raume gegeben. Zu ihr parallel werde eine zweite Ebene E_1 und außerhalb beider ein Punkt O nach Willkür festgelegt.

Zieht man durch alle Punkte einer in E gelegenen Figur von dem Zentrum O ausgehende, projizierende Strahlen, ebenso durch alle Geraden dieser Figur projizierende Ebenen, so liefern diese Strahlen und Ebenen in ihrem Schnitt mit der Ebene E_1

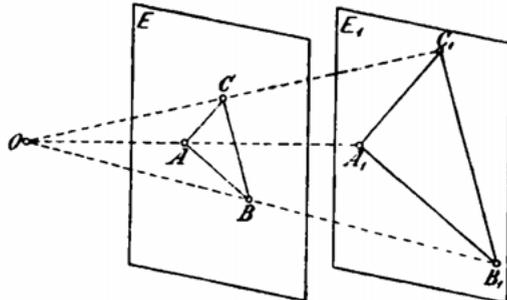


Fig. 1.

als Bildebene eine zweite Figur, deren Punkte und Geraden denen der gegebenen Figur eindeutig entsprechen. Beispielsweise geht (Fig. 1) aus dem Dreieck ABC in E ein Dreieck $A_1B_1C_1$ in E_1 als

Bild hervor. Die Beziehung, in welcher die einander entsprechenden Figuren stehen, heißt Ähnlichkeit bei ähnlicher Lage und besitzt folgende Eigenschaften:

- α) Entsprechende Gerade sind parallel; also:
- β) Parallelen Geraden g und h entsprechen parallele Gerade g_1 und h_1 und einem Winkel φ ein ihm gleicher Winkel φ_1 .
- γ) Das Verhältnis irgend zweier entsprechenden Strecken AB und $A_1 B_1$ ist konstant $= e : e_1$, wenn $e = (O \rightarrow E)$, $e_1 = (O \rightarrow E_1)$ gesetzt wird.

Offenbar ist:

$$AB : A_1 B_1 = OA : OA_1 = e : e_1$$

und folglich auch:

$$AB : A_1 B_1 = BC : B_1 C_1 \text{ usw.}$$

Ist für irgend zwei ebene Figuren eine der beiden letzten Eigenschaften und folglich auch die andere erfüllt, so sind sie nur als ähnlich zu bezeichnen. Kommt aber die erste Eigenschaft hinzu, so befinden sie sich in ähnlicher Lage. In der Tat braucht man nur zwei einander entsprechende parallele Strecken AB und

$A_1 B_1$ zu kennen, um das Ähnlichkeitszentrum $O = AA_1 \times BB_1$ zu finden. Hieraus folgt weiter, daß je zwei ähnliche Figuren auf unendlich viele Arten in ähnliche Lage gebracht werden können.

3. Die ähnlichen Figuren bleiben in ähnlicher Lage, wenn die Bildebene E_1 sich selbst parallel verschoben wird. An Stelle

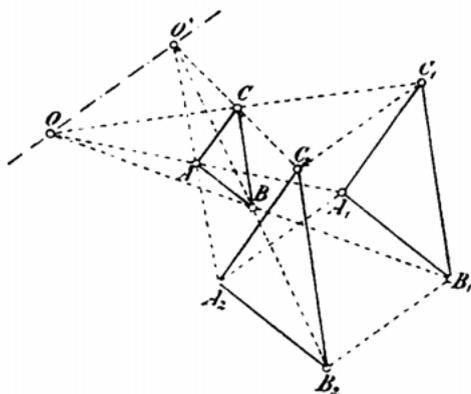


Fig. 2.

von O tritt dabei ein neues Zentrum O' . Die Strecke OO' , d. i. die Verschiebung des Zentrums, ist mit derjenigen der Bildebene parallel und gleichgerichtet oder ihr entgegengesetzt, je nachdem O und E_1 auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von E liegen; der Größe nach ist sie durch die Relation:

$$OO' = a \cdot \frac{e}{e_1 - e}$$

bestimmt, wobei a die Größe der Verschiebung der Punkte von E_1 bezeichnet. Geht nämlich (Fig. 2) A_1 , das Bild eines beliebigen Punktes A , bei der im Raume vollführten Parallelverschiebung von E_1 in A_2 über, so schneidet die Gerade A_2A die durch O gezogene Parallele zu A_1A_2 in einem Punkte O' , welcher durch die obigen Angaben bestimmt ist; dies gilt für jedes Paar entsprechender Punkte. — Insbesondere bleibt der Charakter unserer Abbildung erhalten, wenn E_1 durch eine geeignete Parallelverschiebung mit E selbst zur Deckung gebracht wird. Diese Operation, bei der ein bestimmter Punkt von E_1 in einen beliebigen Punkt von E verschoben wird, liefert ähnliche und ähnlich liegende Gebilde in einer Ebene. In die Ebene E fällt auch das Zentrum O' und die projizierenden Strahlen. Die drei oben genannten Eigenschaften bleiben für die so erhaltene ähnliche Beziehung in der Ebene unverändert bestehen. Sie ist eindeutig bestimmt durch Angabe des Zentrums und zweier einander entsprechender Punkte, oder durch ein Paar paralleler entsprechender Strecken.

4. Der vorige Satz ist ein Spezialfall des folgenden: Sind im Raume zwei Figuren zu einer dritten ähnlich und ähnlich gelegen, so sind sie es auch zueinander. Das neue Ähnlichkeitszentrum liegt mit den beiden gegebenen in gerader Linie. Sind nämlich A, B und A_1, B_1 (Fig. 3) entsprechende Punkte zweier ähnlicher und ähnlich gelegener Figuren, sowie O das zugehörige Ähnlichkeitszentrum, gilt ferner dasselbe von A, B, A_2, B_2 und O' , so liegen A_1A_2 und B_1B_2 in einer Ebene, weil $A_1B_1 \parallel AB \parallel A_2B_2$ ist. Weiter liegt der Strahl A_1A_2 in der Ebene AOO' und schneidet OO' in einem Punkte O'' . In demselben Punkte wird OO' von B_1B_2 ge-

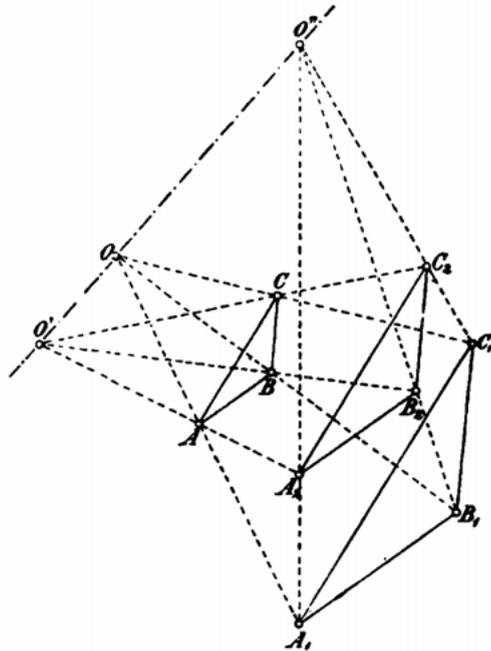


Fig. 3.

schnitten; denn $B_1 B_2$ und OO' müssen sich in einem Punkte schneiden, da sie in einer Ebene liegen; das muß aber der Schnittpunkt von OO' mit der Ebene $A_1 B_1 A_2 B_2$, also O'' sein. O'' ist das neue Ähnlichkeitszentrum. Der Satz gilt auch für Figuren in einerlei Ebene.

5. Von den Folgerungen, die man unmittelbar aus diesen Betrachtungen ziehen kann, mag als beachtenswert hervorgehoben

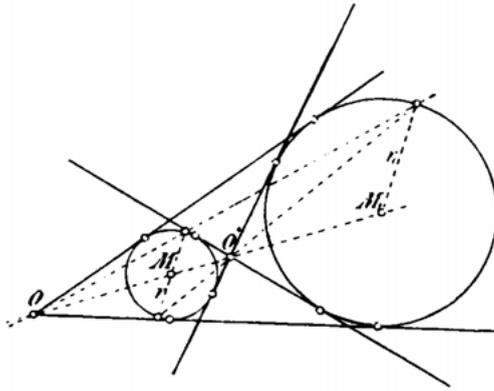


Fig. 4.

werden, daß jede zu einem Kreise ähnliche Figur wiederum ein Kreis ist, und daß je zwei Kreise einer Ebene in doppelter Weise als in ähnlicher Lage befindlich angesehen werden können. Läßt man nämlich die Mittelpunkte M und M_1 (Fig. 4) und je zwei parallele und gleich oder entgegengesetzt gerichtete Radien einander

entsprechen, so ergeben sich auf MM_1 zwei Ähnlichkeitszentren O und O' (ein äußeres und ein inneres), für welche die Verhältnissgleichung $OM:OM_1 = r:r_1 = O'M:O'M_1$ besteht. Die Verbindungslinien der Endpunkte von parallelen, gleichgerichteten Radien gehen durch O , von entgegengesetzt gerichteten Radien aber durch O' . Durch O und O' gehen auch die gemeinsamen Tangenten der beiden Kreise, deren es im allgemeinen vier gibt.

Parallelprojektion einer ebenen Figur auf eine andere Ebene.

6. Die zu projizierenden Gebilde seien in der Ebene E gelegen; als Bildebene nehmen wir irgend eine zweite Ebene E_1 an. Werden durch die Punkte und Geraden einer in der Ebene E befindlichen Figur in einer festgewählten Richtung projizierende Strahlen resp. Ebenen gezogen und mit E_1 geschnitten, so entsteht eine zweite Figur, die mit ihren Punkten und Geraden der vorgelegten eindeutig entspricht. Das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ in E_1 geht z. B. auf diese Weise aus dem Dreieck ABC in E hervor (Fig. 5). Das benutzte Verfahren wird im allgemeinen als schiefe, im besonderen, wenn die Projektionsrichtung zur Bildebene E_1 senkrecht steht, als orthogonale oder normale Parallelprojektion bezeichnet. Die geometrische Abhängigkeit zwischen den entsprechenden Figuren

heißt Affinität bei affiner Lage; die projizierenden Strahlen werden Affinitätsstrahlen, ihre Richtung Affinitätsrichtung, die Schnittlinie $a = E \times E_1$ wird Affinitätsachse genannt.

7. Aus der Definition ergeben sich die Eigenschaften affiner und affin gelegener ebener Figuren.

- a) Jeder Punkt der Affinitätsachse a entspricht sich selbst; entsprechende Gerade g und g_1 schneiden sich auf a , und insbesondere ist $g_1 \parallel a$, wenn $g \parallel a$ angenommen wird.
- β) Parallelen Geraden g und h entsprechen parallele Gerade g_1 und h_1 .
- γ) Einem Winkel φ entspricht im allgemeinen ein von ihm verschiedener Winkel φ_1 . Es existiert aber an je zwei affinen Punkten P und P_1 ein Paar entsprechender rechtwinkliger Strahlen.
- δ) Das Verhältnis je zweier Strecken auf der nämlichen oder auf parallelen Geraden ist dem ihrer Bilder gleich.

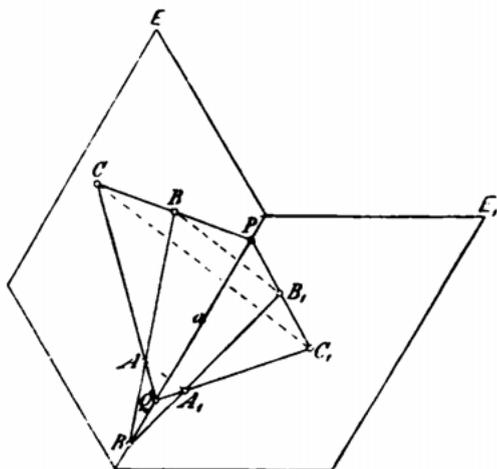


Fig. 5.

Die unter γ) angeführten entsprechenden rechten Winkel erkennt man aus folgender Konstruktion. Man lege durch die Mitte der Strecke PP_1 eine zu ihr rechtwinklige Ebene A und um deren Achsenschnittpunkt $M = a \times A$ eine Kugelfläche, welche P und also auch P_1 enthält. Schneidet diese die Achse a in X und Y , so sind $\angle XPY$ und $\angle XP_1Y$ einander entsprechende und, weil sie über dem Durchmesser XY stehen, zugleich rechte Winkel.

Liegen die in δ) erwähnten Strecken auf der nämlichen Geraden g , also ihre Bilder auf der affinen Geraden g_1 , so werden die gegebenen und ihre Bildstrecken auf den Schenkeln des $\angle gg_1$ durch Parallelen ausgeschnitten, woraus der eine Teil des Satzes unmittelbar folgt. Der allgemeinere Fall zweier paralleler Strecken AB und CD wird

auf den vorigen zurückgeführt, indem man (Fig. 6) AB um die Strecke $BE = CD$ verlängert. Dem Parallelogramm $BCDE$ entspricht nach β) ein affines Parallelogramm $B_1C_1D_1E_1$, wobei $B_1E_1 = C_1D_1$ die Verlängerung von A_1B_1 bildet.

Umgekehrt sind zwei ebene Figuren affin und affin gelegen, wenn ihre Punkte und Geraden einander so entsprechen, daß die unter α), β) und δ) aufgeführten Eigenschaften erfüllt sind. Aus α) und β) folgt δ), ebenso kann man aus α) und δ) die Eigenschaft β) folgern. Denn sind A, B, C (siehe Fig. 5) irgend drei Punkte der einen, A_1, B_1, C_1 die entsprechenden Punkte der anderen Figur, so schneiden nach α) die Geraden BC, CA, AB ihre Bilder in Punkten P, Q, R der Schnittlinie $a = ABC \times A_1B_1C_1$. Da ferner nach δ): $RA:AB = RA_1:A_1B_1$ sein soll, so ist $AA_1 \parallel BB_1$ usf.

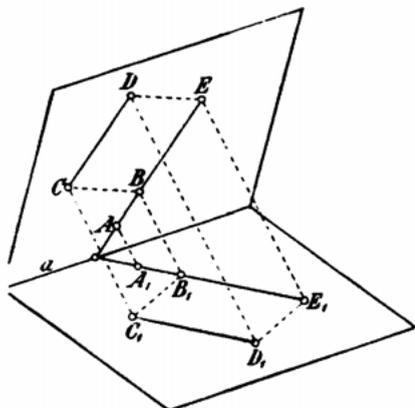


Fig. 6.

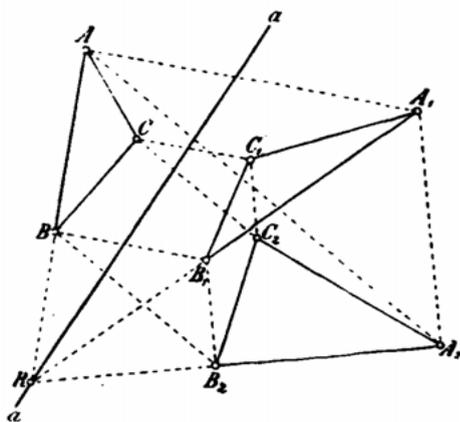


Fig. 7.

8. Es seien $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_1$ und \mathfrak{F}_2 drei Figuren, deren Ebenen E, E_1 und E_2 sich in einer Geraden a schneiden; ferner gehe \mathfrak{F}_2 aus \mathfrak{F} und \mathfrak{F}_1 aus \mathfrak{F}_2 durch eine Parallelprojektion hervor. Dann ist auch \mathfrak{F}_1 eine Parallelprojektion von \mathfrak{F} , d. h. es besteht der Satz: Sind in bezug auf eine und dieselbe Achse zwei ebene Figuren zu einer dritten affin und affin gelegen, so sind sie es auch zueinander. Es genügt, den Beweis des Satzes für irgend zwei Punkte und ihre beiderlei Bilder zu führen. Den Punkten A, B in \mathfrak{F} mögen A_2, B_2 in \mathfrak{F}_2 und diesen A_1, B_1 in \mathfrak{F}_1 entsprechen (Fig. 7). Die Geraden AB, A_1B_1, A_2B_2 schneiden sich in einem Punkte R auf a . Da aber zugleich $AA_1 \parallel BB_1$ und $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ ist, so sind die Dreiecke AA_1A_2 und BB_1B_2 ähnlich und ähnlich gelegen (aus dem Ähnlichkeitszentrum R), folglich ist $AA_1 \parallel BB_1$ usf.

9. Wenn man die bisherigen Annahmen spezialisiert, indem man die Ebene E_1 als mit E zusammenfallend betrachtet, so gelangt man zu einer indirekten Definition affiner und affin gelegener Figuren \mathfrak{F} und \mathfrak{F}_1 in einer Ebene, nämlich durch Vermittelung zweier nacheinander angewandter beliebiger Parallelprojektionen, welche zuerst \mathfrak{F} in \mathfrak{F}_2 und dann \mathfrak{F}_2 in \mathfrak{F}_1 überführen. In der Folge wird die direkte Abhängigkeit zwischen \mathfrak{F} und \mathfrak{F}_1 ohne Zuhilfenahme räumlicher Konstruktion untersucht. Der obige Satz läßt aber bereits erkennen, daß die Bedeutung der Affinitätsachse a als der Linie sich selbst entsprechender Punkte erhalten bleibt, sowie daß die Strahlen AA_1, BB_1 , usw., die jetzt gleichfalls der Ebene E angehören, parallel sind; dagegen kann das Bild eines Punktes nicht mehr als Spur seines projizierenden Strahles in der Bildebene erklärt werden. Die Parallelprojektion in der Ebene bedarf also besonderer Erklärung, da die im Raume anwendbaren Operationen beim Übergang zu Gebilden einer Ebene aufhören einen bestimmten Sinn zu haben.

10. Wird eine ebene Figur um eine in ihrer Ebene enthaltene Achse gedreht, so beschreiben die Punkte der Figur Kreisbogen, deren Sehnen parallel sind. Mithin folgt aus obigem Satze als Korollar: Zwei affine und affin gelegene ebene Figuren bleiben in affiner Lage, wenn eine von ihnen um die Affinitätsachse beliebig gedreht wird. Insbesondere kann hiernach für die betrachteten Figuren auf doppelte Art die affine Lage in einer Ebene herbeigeführt werden, indem man die Bildebene durch Drehung nach der einen oder der anderen Seite mit der Originalebene zur Deckung bringt. Dreht man umgekehrt von zwei in einer Ebene affin gelegenen Figuren die eine beliebig um die Achse aus der Ebene heraus, so wird sie in der neuen Lage eine Parallelprojektion der anderen darstellen.

Affine und affin gelegene Figuren einer Ebene.

11. Zuzufolge der im vorigen Abschnitt enthaltenen indirekten Definition müssen zwei Figuren \mathfrak{F} und \mathfrak{F}_1 derselben Ebene, wenn zwischen ihnen Affinität bei affiner Lage bestehen soll, folgende Eigenschaften aufweisen:

- α) Jeder Punkt der Affinitätsachse entspricht sich selbst.
- β) Den Punkten einer Geraden entsprechen wieder Punkte einer Geraden.
- γ) Die Verbindungslinien entsprechender Punkte sind parallel.

Die hier aufgeführten Eigenschaften genügen, um zu einer Figur ihr affines und affin gelegenes Bild zu konstruieren, wenn die Affinitätsachse a und ein Paar entsprechender Punkte P und P_1 gegeben sind. In der Tat kann zu jedem gegebenen Punkte Q der entsprechende Q_1 bestimmt werden, indem man (Fig. 8) $S = PQ \times a$ sucht und SP_1 mit der durch

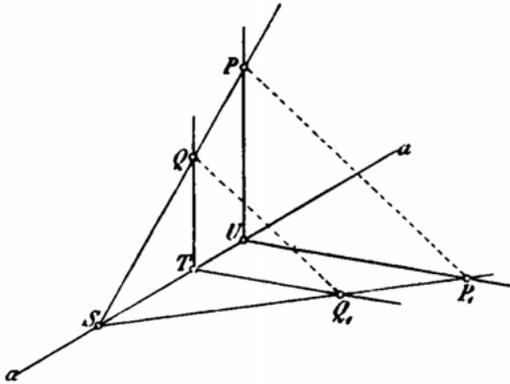


Fig. 8.

Q gelegten Parallelen zu PP_1 in Q_1 schneidet. Das Bild einer Geraden g ergibt sich, indem man zu einem ihrer Punkte Q den Bildpunkt Q_1 zeichnet und diesen mit $T = g \times a$ verbindet.

Die Figur läßt auch erkennen, daß parallelen Geraden P_1U und Q_1T der einen

Figur parallele Bilder P_1U und Q_1T in der anderen entsprechen. Um das Bild g_1 von $g = QT$ zu erhalten, kann man deshalb $P_1U \parallel g$ zeichnen, dann P_1U und $g_1 \parallel P_1U$ durch den Punkt $g \times a = T$ ziehen.

Finden die unter α), β) und γ) aufgezählten Beziehungen zwischen zwei Figuren \mathfrak{F} und \mathfrak{F}_1 statt, so wird \mathfrak{F}_1 durch eine beliebige Drehung um die Affinitätsachse a in eine räumliche Lage \mathfrak{F}_2 übergeführt, bei welcher sie eine Parallelprojektion von \mathfrak{F} darstellt. Sind A, B zwei beliebige Punkte von \mathfrak{F} , A_1, B_1 resp. A_2, B_2 die entsprechenden Punkte von \mathfrak{F}_1 resp. \mathfrak{F}_2 , so ist nur zu zeigen, daß $B_2B_1 \parallel AA_2$ ist. Aber es ist einerseits $AA_1 \parallel BB_1$ und andererseits $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, als Sehnen der von A_1 und B_1 bei der Drehung beschriebenen Bogen. Es schneiden sich ferner AB und A_1B_1 in einem Punkt R der Achse a , durch diesen geht dann auch A_2B_2 ; denn A_1B_1 und A_2B_2 liegen in einer Ebene, da $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ ist. Somit ist auch $AA_2 \parallel BB_2$, da sie aus der Ebene RAA_2 durch die parallelen Ebenen AA_1A_2 und BB_1B_2 ausgeschnitten werden.

Eine Folge hiervon sind die Sätze:

- d) Parallelen Geraden entsprechen in der affinen Figur wieder parallele Gerade.
- e) Parallele Strecken verhalten sich wie ihre affinen Bilder.

12. Die Konstruktion der entsprechenden rechten Winkel an zwei affinen Punkten P und P_1 erfolgt (Fig. 9) mit Hilfe eines Kreises durch P und P_1 , dessen Zentrum M der Affinitätsachse a angehört. Schneidet dieser a in den Punkten X und Y , so sind $\angle XPY$ und $\angle XP_1Y$ die gesuchten rechten Winkel. Ist P_1' der in bezug auf a zu P_1 symmetrische Punkt, so ist $\angle P_1PY = \angle P_1'PY$, weil die Bogen P_1Y und $P_1'Y$ gleich sind; der Strahl PY halbiert den $\angle P_1PP_1'$, der Strahl PX den Nebenwinkel. Diese Bemerkung kann zur Konstruktion der Rechtwinkelstrahlen dienen, falls etwa M außerhalb der Zeichnungsfläche liegt. — Symmetrisch zu PX (oder PY)

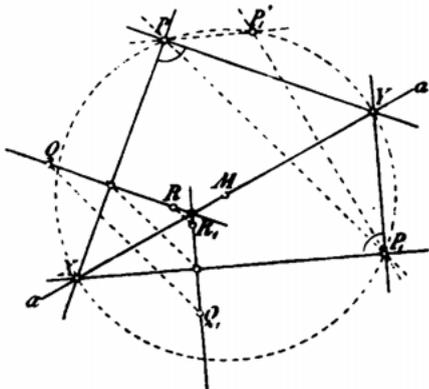


Fig. 9.

gelegenen Punkten, z. B. Q und R , entsprechen symmetrisch zu P_1X (oder P_1Y) gelegene Punkte Q_1 und R_1 .

13. Es gibt auch an P und P_1 entsprechende, gleiche Winkel von jeder gegebenen Größe φ , die man in folgender Weise konstruiert. Wir gehen von dem Fall aus, wo P und P_1 auf derselben Seite der Affinitätsachse liegen (Fig. 10). Sei Q die Mitte von PP_1 und $QR \perp PP_1$, während R auf a liegt. Dann ist ein Kreis k durch P und P_1 , also mit dem Zentrum M auf QR , so zu bestimmen, daß $\angle XPY =$

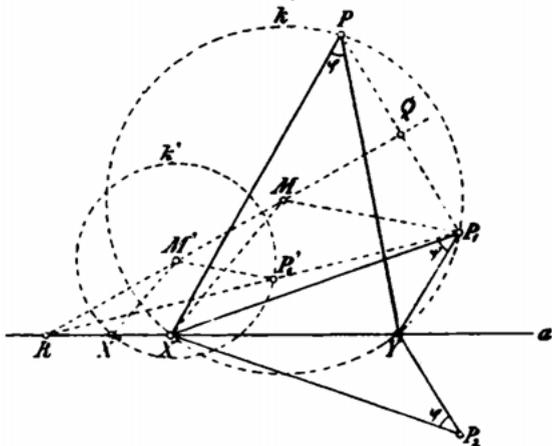


Fig. 10.

$\angle XP_1Y = \varphi$ und somit $\angle MXY = R - \varphi$ wird ($\angle XMY = 2\varphi$), wenn X und Y die Achsenschnittpunkte von k sind. Zieht man aus einem beliebig auf QR angenommenen Punkte M' den Strahl $M'X'$ unter dem Winkel $R - \varphi$ gegen a und beschreibt um M' einen Kreis k' durch X' ,

so ist R das Ähnlichkeitszentrum für die Kreise k und k' . Man findet daher M , indem man RP_1 mit k' in P_1' schneidet und $P_1M \parallel P_1'M'$ zieht. Da RP_1 den Kreis k' in zwei Punkten schneidet, so gibt es zwei Lösungen; in der Figur ist jedoch nur eine gezeichnet. Werden die gegebenen affinen Punkte durch die Achse voneinander getrennt, wie P und P_1 , so betrachte man statt des letzteren den symmetrisch zur Achse gelegenen Punkt P_1 ; dann ist $\angle XP_1Y = \angle XP_1Y$.

14. Sind g und g_1 zwei bestimmte affine Gerade, so existiert ein Wert λ der Art, daß je zwei auf ihnen liegende affine Strecken PQ und P_1Q_1 in dem konstanten Verhältnis

$$\lambda = PQ : P_1Q_1$$

nach 11, e) zueinander stehen, das sich auch nicht ändert, wenn g und damit zugleich g_1 eine Parallelverschiebung erfährt. Zu jeder gegebenen Richtung und der affinen gehört also ein festes Streckenverhältnis λ . Dagegen entsprechen verschiedenen Richtungen verschiedene Werte λ ; dabei sind die Richtungen, welche durch die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel gegeben sind, vor allen übrigen ausgezeichnet. Dreht sich eine Gerade g (mithin zugleich die affine g_1) um einen ihrer Punkte, so nimmt das ihrer Richtung zugehörige Streckenverhältnis λ in jedem der von den affinen Rechtwinkelstrahlen gebildeten Quadranten entweder beständig zu oder beständig ab, erreicht für symmetrische Lagen zu jenen Strahlen gleiche

Werte und auf denselben ein Maximum resp. Minimum.

Es seien, um dies zu beweisen, $\angle XPY$ und $\angle XP_1Y$ affine rechte Winkel (Fig. 11), ferner U und V irgend zwei aufeinander folgende Lagen eines von X nach Y auf der Affinitätsachse fortschreitenden Punktes. Wir wählen nun die Strecke XY als Maßeinheit, setzen $XU = k$, $XV = l$, $UY = m$, $VY = n$ und bezeichnen mit x , u , v , y resp.

x_1 , u_1 , v_1 , y_1 die von Punkten X , U , V , Y , einerseits und von P resp. P_1 andererseits begrenzten affinen Strecken. Sind nun PUU' , PVV' , P_1UU'' , P_1VV'' rechtwinklige Dreiecke, so folgen die Relationen:

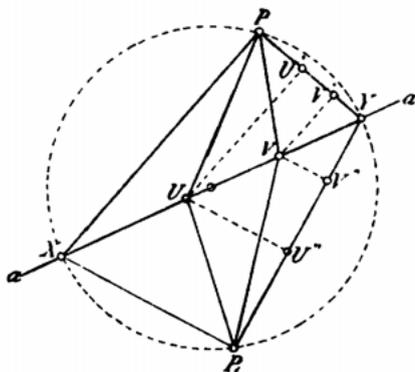


Fig. 11.

$$u^2 = m^2 x^2 + k^2 y^2, \quad v^2 = n^2 x^2 + l^2 y^2,$$

$$u_1^2 = m^2 x_1^2 + k^2 y_1^2, \quad v_1^2 = n^2 x_1^2 + l^2 y_1^2;$$

denn es ist: $UY:XY = m$, $U'P:YP = UX:YX = k$, usf.

Es ist jetzt zu zeigen, daß unter der Voraussetzung:

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)^2 > \left(\frac{y}{y_1}\right)^2$$

die Beziehung:

$$\left(\frac{u}{u_1}\right)^2 > \left(\frac{v}{v_1}\right)^2$$

besteht. Letzterer geben wir die neue Form:

$$(m^2 x^2 + k^2 y^2)(n^2 x_1^2 + l^2 y_1^2) - (n^2 x^2 + l^2 y^2)(m^2 x_1^2 + k^2 y_1^2) > 0,$$

und diese reduziert sich auf die Ungleichung:

$$(l^2 m^2 - k^2 n^2)(x^2 y_1^2 - x_1^2 y^2) > 0,$$

welche mit der Voraussetzung zusammenfällt, da $(l^2 m^2 - k^2 n^2)$ positiv ist.

Die Ellipse als affine Kurve zum Kreise und ihre Konstruktion.

15. Jede zu einem Kreise affine und affin gelegene Kurve heißt Ellipse; so ist jede Parallelprojektion des Kreises eine Ellipse. Dem Mittelpunkt M des Kreises k (Fig. 12) entspricht der Mittelpunkt M_1 der zum Kreise affinen Ellipse k_1 . Jedem Kreisdurchmesser entspricht ein Durchmesser der Ellipse, der von ihrem Mittelpunkt M_1 halbiert wird. Zwei schiefwinklige Durchmesser $P_1 P_1'$, $Q_1 Q_1'$ der Ellipse heißen konjugiert, wenn sie zu zwei rechtwinkligen Kreisdurchmessern PP , QQ affin sind. Von zwei konjugierten Durchmessern einer Ellipse halbiert jeder die

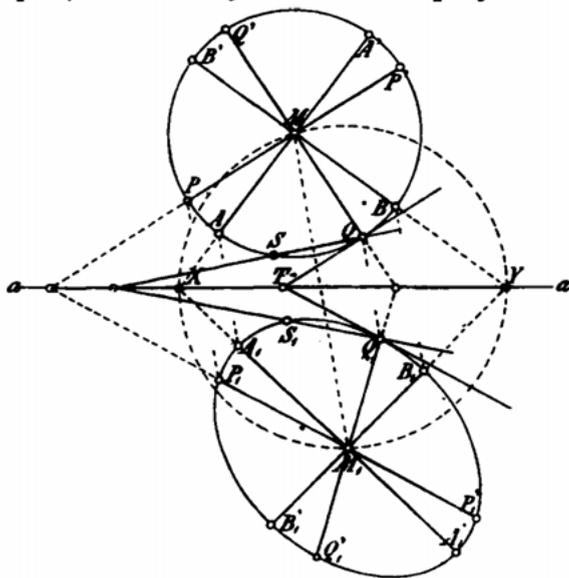


Fig. 12.

von zwei konjugierten Durchmessern einer Ellipse halbiert jeder die

zum andern parallelen Sehnen und geht durch die Berührungspunkte der zum andern parallelen Tangenten. Denn das gleiche ist bei den rechtwinkligen Durchmessern des affinen Kreises der Fall.

Dabei ist allerdings die zu einer Kreistangente affine Gerade als Ellipsentangente bezeichnet. Die Berechtigung hierzu erhellt aus der folgenden Überlegung. Wie jede Gerade g mit dem Kreise k zwei getrennte, zwei vereinte oder keinen Schnittpunkt gemein hat, so hat auch jede Gerade g_1 mit der Ellipse k_1 wegen der Affinität zwei getrennte, zwei vereinte, oder keinen Schnittpunkt gemein. Eine Kreistangente QT hat mit seiner Peripherie nur einen Punkt gemein und liegt ganz außerhalb derselben; das gleiche tritt für die affine Gerade Q_1T_1 in bezug auf die Ellipse ein, und deshalb legen wir ihr die Bezeichnung einer Ellipsentangente bei (zum Unterschiede von den Sehnen). Man kann auch die Tangenten in Q resp. Q_1 aus den Sehnen QS resp. Q_1S_1 durch Drehung um Q resp. Q_1 hervorgehen lassen, wobei S_1 in demselben Moment mit Q_1 zusammenfällt, wo dies S mit Q tut. Hier geht der Berührungspunkt der Tangente aus der Vereinigung zweier Schnittpunkte hervor.

Die zueinander rechtwinkligen Durchmesser A_1A_1' und B_1B_1' der Ellipse, welche gleichfalls rechtwinkligen Durchmessern AA' und BB' des Kreises entsprechen, heißen Achsen, ihre Endpunkte Scheitel. Die Achsen teilen die Ellipse in symmetrische Quadranten,

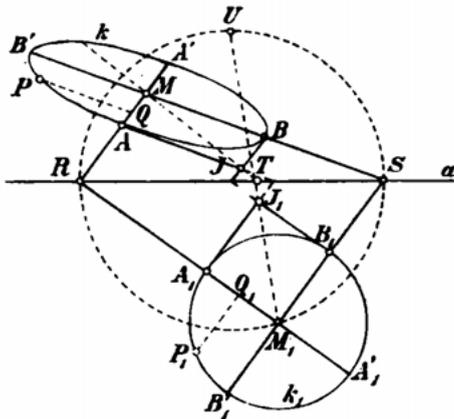


Fig. 13.

denn sie halbieren die zu ihnen senkrechten Sehnen. Durchläuft ein Punkt P_1 die Ellipse, so nimmt die Strecke M_1P_1 in jedem Quadranten entweder beständig zu, oder beständig ab und erreicht auf den Achsen ein Maximum oder Minimum (nach 14).

Aus der gegebenen Definition ergeben sich Konstruktionen für Punkte, Tangenten, Achsen und konjugierte Durchmesser der Ellipse.

16. Aus einem Kreise lassen sich durch Affinität (oder Parallelprojektion) unendlich viele Ellipsen ableiten, indem man noch die Affinitätsachse und den Mittel-

punkt der Ellipse beliebig wählen kann. Umgekehrt kann jede Ellipse auf unendlich viele Weisen als affines Bild eines Kreises erhalten werden, indem auch hier die Wahl der Affinitätsachse noch völlig frei steht. Hierüber belehrt uns der Satz: Eine Ellipse k ist durch zwei konjugierte Durchmesser AA' und BB' völlig bestimmt. Es sei P ein beliebiger Punkt der Ellipse k , Q ein Punkt auf AA' und $PQ \parallel BB'$; ferner setzen wir zur Abkürzung $MA = a$, $MB = b$, $MQ = x$ und $QP = y$ (Fig. 13). Ein zur Ellipse affiner und affin gelegener Kreis sei k_1 ; die zu A, A', B, B', M, P, Q affinen Punkte seien $A_1, A'_1, B_1, B'_1, M_1, P_1, Q_1$, während wir $M_1A_1 = M_1B_1 = r_1$, $M_1Q_1 = x_1$ und $Q_1P_1 = y_1$ setzen. Mag nun die affine Beziehung zwischen Ellipse und Kreis beschaffen sein, wie sie wolle, immer gelten die Relationen:

$$\frac{x}{a} = \frac{x_1}{r_1}, \quad \frac{y}{b} = \frac{y_1}{r_1}.$$

Nun besteht für jeden Punkt des Kreises die Gleichung; $x_1^2 + y_1^2 = r_1^2$, also besteht für jeden Punkt der Ellipse die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dabei bedeuten x und y die Längen der beiden zu den konjugierten Durchmessern parallelen Strecken, die einerseits von dem beliebigen Ellipsenpunkt und andererseits von diesen Durchmessern begrenzt werden. Durch Länge und Lage der konjugierten Durchmesser AA' und BB' ist hiernach die Gesamtheit der Ellipsenpunkte bestimmt.

17. Wir wollen jetzt zu der Ellipse k mit den konjugierten Durchmessern AA' und BB' den affin gelegenen Kreis k_1 konstruieren, wenn die Affinitätsachse a beliebig gegeben ist. Die Tangenten in A und B mögen sich in J schneiden ($JA \parallel BB'$, $JB \parallel AA'$), dann muß dem Parallelogramm $MAJB$ in der affinen Figur ein Quadrat $M_1A_1J_1B_1$ entsprechen (Fig. 13). Schneiden also die Geraden MA , MB und MJ die Affinitätsachse a in R , S und T , so ist M_1 derart zu bestimmen, daß $\angle RM_1S = 90^\circ$ und $\angle RM_1T = \angle TM_1S = 45^\circ$ wird. Zu dem Ende zeichne man über RS als Durchmesser einen Hilfskreis und wähle auf ihm den Punkt U in der Mitte des Halbkreisbogens RS ; dann schneidet UT den Hilfskreis in dem gesuchten Punkt M_1 ($\angle RM_1T = \angle TM_1S = 45^\circ$ als Peripheriewinkel über den Viertelkreisbogen RU und US). In der Tat entspricht jetzt dem Parallelogramm $MAJB$ in der affinen Figur ein Quadrat $M_1A_1J_1B_1$, wobei M_1 der zu M affine Punkt ist,

und zu dem Kreise k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius $M_1A_1 = M_1B_1$ ist die Ellipse k mit den konjugierten Halbmessern MA und MB affin ($JA \times J_1A_1$ und $JB \times J_1B_1$ auf a).

18. Will man eine Ellipse k aus zwei konjugierten Durchmessern konstruieren, so kann man einen zu ihr affinen und affin gelegenen Kreis k_1 zeichnen und dann rückwärts zu einzelnen Punkten des Kreises die affinen Punkte der Ellipse suchen. Wie wir soeben sahen, ist dabei die Wahl der Affinitätsachse a noch freigestellt. Um die Konstruktion möglichst einfach zu gestalten, empfehlen sich besonders die folgenden beiden Verfahren.

Erstes Verfahren. Es seien (Fig. 14) O der Mittelpunkt, AA' und BB' die gegebenen konjugierten Durchmesser einer Ellipse k . Der über AA' als Durchmesser beschriebene Kreis k_1 ist dann zu

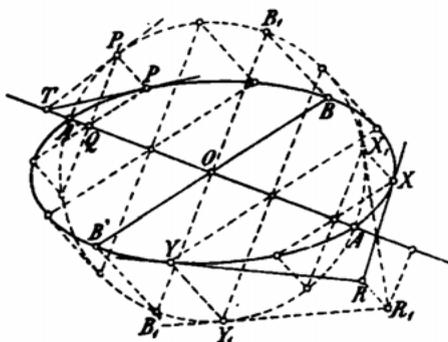


Fig. 14.

k affin und AA' ist die Affinitätsachse. Dem Punkt B von k entspricht der affine Punkt B_1 von k_1 , wo $OB_1 \perp OA$ ist, und BB_1 ist ein Affinitätsstrahl. — Zu einem Punkte P_1 von k_1 ergibt sich der affine Ellipsenpunkt P , indem man $P_1Q \perp AA'$ zieht und die Parallele zu OB aus Q mit der Parallelen zu BB_1 aus P_1 in P schneidet. — Trifft die Kreistangente in P_1 die Affinitätsachse in T , so ist PT die Ellipsentangente in P .

— Sollen aus einem Punkte R die Tangenten an die Ellipse gezogen werden, so suche man den affinen Punkt R_1 und die Berührungspunkte X_1 und Y_1 der von ihm an den Kreis k_1 gelegten Tangenten; dann sind die zu ihnen affinen Punkte X und Y die Berührungspunkte der gesuchten Ellipsentangenten. — Die Richtungen der Achsen der Ellipse und der zugehörigen rechtwinkligen Durchmesser des Kreises ergeben sich aus der Konstruktion entsprechender rechter Winkel an den affinen Punkten B und B_1 , die Scheitel der Ellipse aus den Endpunkten der genannten Kreisdurchmesser.

19. Zweites Verfahren. Man ziehe durch den Endpunkt B des einen Durchmessers eine Parallele a zum konjugierten AA' , die zugleich Ellipsentangente sein wird (Fig. 15). Ein Kreis k_1 vom Radius $O_1A_1 = OA$, welcher a ebenfalls in B berührt, ist dann zur Ellipse k affin gelegen. Dabei ist a die Affinitätsachse, O und O_1

sind affine Punkte, und den beiden zu a parallelen und senkrechten Kreisdurchmessern A_1A_1' und BB_1B_1' entsprechen die konjugierten Durchmesser AA' und BB' der gesuchten Ellipse. Die Konstruktion einzelner Ellipsenpunkte ist analog dem Vorigen. Die Achsen findet man hier direkt aus der Bestimmung der entsprechenden rechten Winkel $\angle XOY$ und $\angle XO_1Y$ an den Mittelpunkten, hierauf aus den Endpunkten C_1 und D_1 der rechtwinkligen Kreisdurchmesser die Ellipsenscheitel C und D , usf.

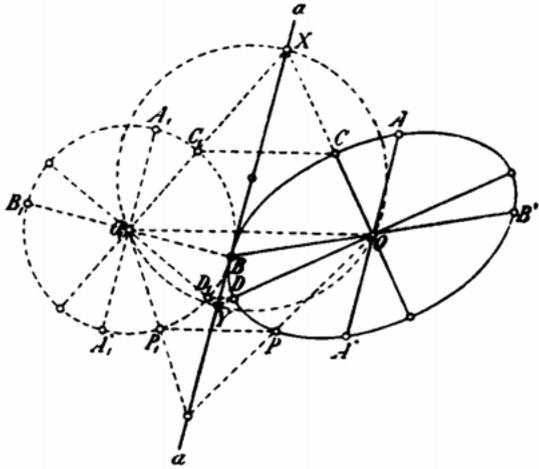


Fig. 15.

20. Konstruktion der Ellipse aus den Achsen. Es seien $OA = a$ und $OB = b$ (Fig. 16a) die gegebenen Halbachsen einer Ellipse k . Man schlage um O zwei Kreise k_1 und k_2 resp. vom Radius a und b . Jeder von ihnen kann als zur gesuchten Ellipse affin gelegen gelten. Bei der Affinität zwischen k_1 und k ist OA die Achse und B_1 und B sind entsprechende Punkte ($B_1B \perp OA$); bei der Affinität zwischen k_2 und k ist OB die Achse und A_2 und A sind entsprechende Punkte. — Zu einem Punkte P_1 auf k_1 ergibt sich der affine Ellipsenpunkt P auf k , indem man $P_1S \perp OA$ zieht, mittels der Beziehung

$$PS : P_1S = BO : B_1O = P_2O : P_1O;$$

man schneide also P_1O mit k_2 in P_2 und ziehe $P_2P \parallel OA$. P ist zugleich der affine Punkt zu P_2 auf k_2 . Zwei rechtwinklige Kreisradien OP_1 und OQ_1 liefern zwei konjugierte Halbmesser OP und

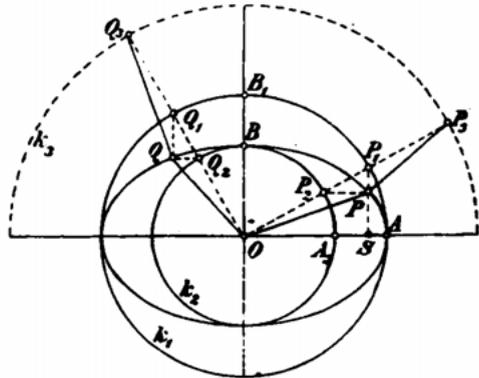


Fig. 16a.

OQ der Ellipse. Die Tangenten in P und Q sind zu OQ und OP resp. parallel.

Zieht man um O einen Kreis k_3 mit dem Radius $(a + b)$ und schneidet dieser die Strahlen OP_1 und OQ_1 in P_3 und Q_3 resp., so sind PP_3 und QQ_3 Ellipsennormalen, d. h. sie stehen in P und Q auf den bezüglichen Tangenten senkrecht. Denn es ist $\triangle P_1PP_3 \cong \triangle Q_3QQ_1$, ($P_1P_3 = Q_1Q_3$, $\angle QQ_1Q_3 = \angle PP_2P_1$, usw.); ferner ist $\triangle Q_3QQ_1 \cong \triangle OPP_2$ ($Q_3Q_1 = OP_2$, $QQ_1 = PP_2$, $\angle Q_3Q_1Q = \angle OP_2P$). Demnach ist $Q_3Q = OP$ und $Q_3Q \perp OP$ (da $Q_3O \perp OP_1$ ist). Jeder Strahl durch O liefert einen Punkt P der Ellipse als Schnittpunkt zweier Geraden, von denen die erste durch P_3 parallel zu OA und die zweite durch P_1 parallel zu OB gezogen ist. Die Gerade PP_3 ist eine Normale der Ellipse und gleich dem zu OP konjugierten Halbmesser OQ . Die Punkte P_2 , P_1 und P_3 auf dem durch O gezogenen Strahl haben die bezüglichen Abstände b , a und $(a + b)$ von O .

21. Das eingeschlagene Verfahren ergibt auch die Lösung der Aufgabe: Zu einem nur der Richtung nach gegebenen Halbmesser der Ellipse den Endpunkt und den konjugierten Halbmesser zu finden. Ein in der gegebenen Richtung aus O gezogener Strahl schneide die Kreise k_1 und k_2 resp. in den Punkten U und V (Fig. 16 b); aus diesen konstruiere man wie vorher den Punkt W der Ellipse. Zieht man ferner durch U und V Parallelen zu OA und OB , die sich in X schneiden mögen, und legt man die Affinität zwischen k_1 und der Ellipse k zugrunde, so entspricht dem Punkt U der Punkt W , der Geraden UX die Gerade WV , dem Punkte X der Punkt V und folglich dem Strahl OX der Strahl OV . Insbesondere entspricht dem Punkte P_1 von k_1 der Punkt P von k ($P_1P \parallel OB$, $P_2P \parallel OA$), und der zu OX rechtwinklige Strahl OQ_3O_1 liefert den Endpunkt Q des zu OP konjugierten Halbmessers OQ .

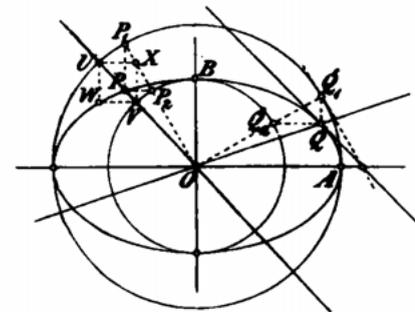


Fig. 16 b.

22. Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus konjugierten Durchmesser. Irgend zwei konjugierte Halbmesser OC und OD einer Ellipse (Fig. 17 a) werden aus rechtwinkligen Halb-

messern OC_1 , OD_1 resp. OC_2 , OD_2 des um- und eingeschriebenen Kreises (vom Radius a und b) erhalten, indem man CC_1 und DD_1 parallel zur Halbachse OB und CC_2 und DD_2 parallel zur Halbachse OA zieht. Wird das rechtwinklige Dreieck DD_1D_2 um das Zentrum O durch den $\angle D_1OC_1 = R$ gedreht, so erhält es die Lage EC_1C_2 , in der seine Katheten wiederum den Achsen parallel liegen. Nun ist $M = EC \times C_1C_2$ der Mittelpunkt des Rechteckes CC_1EC_2 , also $MC = MC_1 = MC_2 = ME$. Deshalb schneidet EC die Achsen OA und OB resp. in A' und B' , so daß: $MO = MA' = MB'$ wird, d. h. ein um M mit dem Radius MO beschriebener Kreis schneidet die Gerade CE in Punkten A' und B' der Achsen. Überdies folgt.

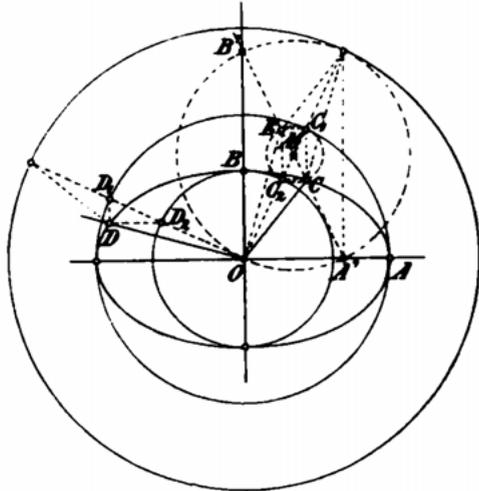


Fig. 17a.

$$\begin{aligned} OC_1 &= EA' = CB' = a, \\ OC_2 &= CA' = EB' = b. \end{aligned}$$

Sind umgekehrt OC und OD als konjugierte Halbmesser gegeben, so ergibt sich folgende einfache Konstruktion der Achsen. Man ziehe $OE \perp OD$, halbiere EC in M und schneide CE mit einem Kreise vom Radius MO in A' und B' . Dann sind OA' und OB' die Achsen der Lage nach und $A'E = B'C$ resp. $A'C = B'E$ die bezüglichen Längen der Halbachsen.

23. Läßt man C die Ellipse durchlaufen, so geschieht dies auch mit dem Endpunkt D des zu OC konjugierten Halbmessers OD . Man erhält dann durch die vorige Konstruktion andere und andere Punkte A' und B' auf den Achsen; immer aber ist $B'C = a$, $A'C = b$, also die Strecke $A'B'$ von der konstanten Länge $(a + b)$. Hieraus folgt der Satz: Gleitet eine Strecke $A'B'$ mit ihren Endpunkten auf zwei rechtwinkligen Geraden, so beschreibt ein Punkt C , der sie in die Teile a und b zerlegt, eine Ellipse mit den Halbachsen a und b . Dieser Satz kann bequem zur Konstruktion von Ellipsenpunkten verwendet werden.

Rollt (Fig. 17b) der Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius MJ auf der Innenseite des Kreises mit dem Mittelpunkt O

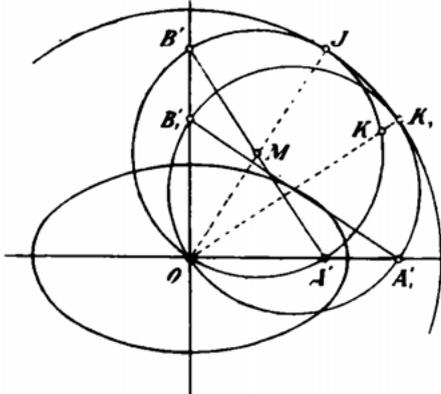


Fig. 17b.

und dem Radius OJ ohne Gleiten, so bewegt sich jeder Punkt des kleineren Kreises auf einem Durchmesser des größeren. Ist nämlich K ein auf dem kleineren Kreise liegender fest mit ihm verbundener Punkt und gelangt er beim Rollen in die Lage K_1 , so müssen die Kreisbogen JK und JK_1 gleich sein und daher auch $\angle JOK = \angle JOK_1$, d. h. K und K_1 liegen auf einem Strahl durch O . Gelangt in gleicher Weise der

Punkt A' des kleineren Kreises beim Rollen in die Lage A'_1 , so sind die Bogen KA' und $K_1A'_1$ einander gleich, daher auch $\angle KOA' = \angle K_1OA'_1$, d. h. A' und A'_1 liegen auf einem Strahl durch O . Ebenso liegen B' und B'_1 auf einem Strahl durch O . Daraus geht hervor, daß beim Rollen des kleineren Kreises auf dem größeren die Strecke $A'B'$ mit ihren Endpunkten auf den festen Geraden OA' und OB' gleitet. Beim Rollen beschreibt somit jeder in der Ebene des kleineren Kreises liegender und mit ihm fest verbundener Punkt P' eine Ellipse. Liegt P' auf dem Durchmesser $A'B'$, so fallen die Achsen der Ellipse mit OA' und OB' zusammen und ihre Halbachsen sind gleich PA' resp. PB' .

Zieht man in Fig. 17a durch C eine Parallele zu OC_1 und schneidet diese die Achsen OA und OB in A'' und B'' , so ist $OA'' = EC_1$, $OB'' = EC_2$, $CA'' = b$, $CB'' = a$, $B''A'' = C_2C_1 = (a - b)$. Hieraus folgt der weitere Satz: Gleitet eine Strecke $A''B''$ mit ihren Endpunkten auf zwei rechtwinkligen Geraden, so beschreibt ein Punkt C auf ihrer Verlängerung, dessen Abstände von ihren Endpunkten gleich a und b sind, eine Ellipse mit den Halbachsen a und b . Jede Ellipse kann also in doppelter Weise durch Bewegung erzeugt werden, indem man entweder eine Strecke von der Länge $(a + b)$ oder eine von der Länge $(a - b)$ mit ihren Endpunkten auf den Achsen der Ellipse gleiten läßt. Im ersten Falle ist es ein Punkt der Strecke selbst, im letzteren ein Punkt auf ihrer Verlängerung, der die Ellipse erzeugt.

24. Konstruktion der Ellipse k aus fünf gegebenen Punkten A, B, C, D, E derselben. Wählen wir die Gerade $AB = a$ zur Affinitätsachse, so muß nach 17 ein zur Ellipse k affiner Kreis k_1 existieren, falls es möglich sein soll, durch die fünf beliebig gegebenen Punkte eine Ellipse zu legen. Bezeichnen wir nun (Fig. 18) mit C_1, D_1, E_1 die affinen Punkte zu C, D, E , so

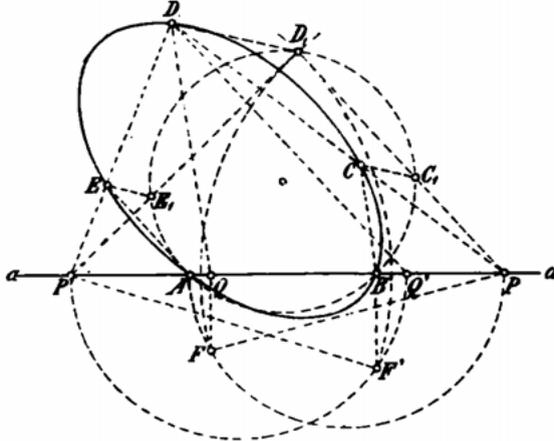


Fig. 18.

müssen die Punkte $P' = DE \times D_1E_1$ und $P = DC \times D_1C_1$ auf a liegen, ferner $DD_1 \parallel EE_1 \parallel CC_1$ sein, und endlich müssen die fünf Punkte A, B, C_1, D_1, E_1 einem Kreise k_1 angehören. Das liefert die Relationen:

$$P'D : P'E = P'D_1 : P'E_1 \quad \text{und} \quad P'A \cdot P'B = P'D_1 \cdot P'E_1,$$

ferner:

$$PD : PC = PD_1 : PC_1 \quad \text{und} \quad PA \cdot PB = PD_1 \cdot PC_1.$$

Aus den ersteren folgt:

$$(P'D_1)^2 = \frac{P'A \cdot P'B \cdot P'D}{P'E}$$

und aus den letzteren:

$$(PD_1)^2 = \frac{PA \cdot PB \cdot PD}{PC}.$$

Da auf der rechten Seite dieser Gleichungen nur bekannte Punkte vorkommen, so lassen sich die Werte $P'D_1$ und PD_1 wie folgt konstruieren. Man bestimme Q' auf a so, daß $DQ' \parallel EA$ wird, dann ist: $P'Q' = P'A \cdot P'D : P'E$. Damit geht die erste Gleichung in $(P'D_1)^2 = P'Q' \cdot P'B$ über, d. h. $P'D_1$ ist gleich der Kathete $P'F'$ eines rechtwinkligen Dreieckes mit der Hypotenuse $P'Q'$, dessen Höhe in B errichtet ist. Ebenso bestimme man Q auf a so, daß

$DQ \parallel CB$ wird; dann ist PD_1 gleich der Kathete PF eines rechtwinkligen Dreieckes mit der Hypotenuse PA , dessen Höhe in Q errichtet ist. Damit ist aber D_1 als Schnittpunkt zweier Kreise gefunden. Legt man jetzt einen Kreis k_1 durch A , B und D_1 , so schneidet er D_1P' und D_1P noch in den Punkten E_1 und C_1 , und es ist gemäß unserer Konstruktion $EE_1 \parallel DD_1 \parallel CC_1$. Der Kreis k_1 ist demnach wirklich zu der gesuchten Ellipse affin, und man konstruiert ihre Punkte vermöge dieser Affinität, wobei a die Achse und D und D_1 entsprechende Punkte sind.

Man erkennt aus der Figur, daß nicht immer fünf willkürlich gegebene Punkte auf einer Ellipse liegen, da die Kreise mit den Mittelpunkten P' resp. P und den Radien $P'F'$ resp. PF sich nicht immer schneiden. Die vollständige Erklärung hierfür wird sich erst an späterer Stelle im fünften Kapitel ergeben.

ZWEITES KAPITEL.

Darstellung der Punkte, Geraden und Ebenen in Grund- und Aufriß. Bestimmung der einfachen Beziehungen dieser Grundgebilde zueinander.

Das Grund- und Aufrißverfahren.

25. Werden durch alle Punkte einer räumlichen Figur senkrecht zu einer gegebenen Ebene Π_1 projizierende Strahlen gezogen, so erzeugen deren Schnitt- oder Spurpunkte in Π_1 ein ebenes Bild der Raumfigur, welches als eine orthogonale Projektion bezeichnet wird. Jeder Punkt P des Raumes hat einen bestimmten Punkt P' in Π_1 zu seiner Orthogonalprojektion; dagegen bildet der Punkt P' gleichzeitig die Projektion aller Punkte der in ihm auf Π_1 errichteten Normalen. Ein Raumpunkt P ist somit durch seine Projektion P' noch nicht bestimmt, vielmehr gehört hierzu ein weiteres Bestimmungstück, etwa die Strecke PP' , d. h. der senkrechte Abstand des Punktes P von der Projektionsebene Π_1 . Dabei ist diesem Abstand zur Unterscheidung der beiden Richtungen, nach denen er von P' aus aufgetragen werden kann, ein bestimmtes Vorzeichen beizulegen.

Auf die zuletzt angeführte Bestimmungsweise kommt seinem Wesen nach das gebräuchlichste Darstellungsverfahren³⁾ zurück, das unter Voraussetzung zweier zueinander rechtwinkliger Projektionsebenen Π_1 und Π_2 jeden Punkt durch seine beiden Orthogonalprojektionen P' und P'' auf Π_1 und Π_2 bestimmt.

26. Um die Vorstellung zu fixieren, nimmt man die erste Projektionsebene Π_1 horizontal, mithin die zweite Projektionsebene Π_2 vertikal an und bezeichnet P' als Grundriß, erste oder Horizontalprojektion, P'' als Aufriß, zweite oder Vertikalprojektion. Ferner nennt man Π_1 die Grundriß- oder Horizontalebene, Π_2 die Aufriß- oder Vertikalebene und $x = \Pi_1 \times \Pi_2$ die Achse der Projektion. Von den Ebenen Π_1 und Π_2 werden natürlich nur begrenzte Teile als Projektionstafeln tatsächlich benutzt; sie sind

aber an sich als unbegrenzt vorzustellen. Der ganze Raum wird durch die Projektionsebenen in vier Fächer oder Quadranten, jede Projektionsebene durch die Achse in zwei Halbebenen zerlegt. Zur Orientierung dienen Benennungen, die, ebenso wie die schon angeführten, für einen auf der Grundrißebene stehenden und der Aufriß-

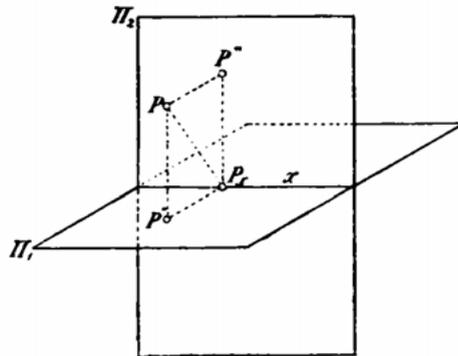


Fig. 19.

ebene zugewandten Beschauer zutreffen. Man sagt nämlich von einem Punkte, er liege über, auf oder unter der Grundrißebene und zugleich vor, auf oder hinter der Aufrißebene. Die auf den projizierenden Strahlen gemessenen Strecken

$$PP' = (P \rightarrow \Pi_1), \quad PP'' = (P \rightarrow \Pi_2)$$

heißen erster und zweiter Tafelabstand des Punktes P ; für beide wird das Vorzeichen in dem vorderen oberen Fache positiv angenommen; es wechselt beim Durchgang von P durch die betreffende Projektionsebene. Die Ebene $PP'P''$ der beiden projizierenden Strahlen steht zu beiden Projektionsebenen und folglich auch zur Achse x senkrecht. Ist also (Fig. 19) $P_z = PP'P'' \times x$, so sind PP_z , $P'P_z$ und $P''P_z$ senkrecht zu x und $PP'P_zP''$ ist ein Rechteck.

27. Hieraus erkennt man:

- α) Die von den beiden Projektionen eines Punktes (und von diesem selbst) auf die Achse gefällten Lote haben denselben Fußpunkt P_x .
- β) Der erste (zweite) Tafelabstand eines Punktes stimmt nach Größe und Vorzeichen mit dem Abstände seiner zweiten (ersten) Projektion von der Achse überein. Liegt insbesondere der Punkt P auf einer Projektionsebene, so fällt die bezügliche Projektion mit ihm zusammen, die andere auf die Achse. Ein Punkt der Achse endlich liegt mit seinen beiden Projektionen vereinigt.

Aus den beiden in Π_1 und Π_2 verzeichneten Projektionen eines Punktes, welche die Bedingung α) erfüllen müssen, sonst aber beliebig angenommen werden können, wird dieser selbst nach β) eindeutig bestimmt, und zwar am einfachsten als Schnittpunkt der in P' auf Π_1 und in P'' auf Π_2 errichteten Senkrechten. — Aus der Darstellung eines Punktes ergibt sich aber die der Geraden und Ebenen, sowie überhaupt der zusammengesetzten Raumgebilde.

28. Die Projektion einer Linie wird als Gesamtheit der Projektionen ihrer Punkte erhalten. Die ersten Projektionen aller Punkte einer Geraden g ergeben deren Grundriß, erste oder Horizontalprojektion g' , ebenso die zweiten Projektionen den Aufriß, die zweite oder Vertikalprojektion g'' . Die projizierenden Strahlen sämtlicher Punkte von g bilden resp. eine erste oder zweite projizierende Ebene. Die Projektionen der Geraden sind also die Schnittlinien (Spuren) ihrer projizierenden Ebenen in Π_1 und Π_2 , mithin selbst gerade Linien. Eine Ausnahme tritt nur für den besonderen Fall ein, daß die Gerade g zu einer Projektionsebene senkrecht ist; es existiert dann keine zugehörige projizierende Ebene mehr; die betreffende Projektion wird ein Punkt, während die andere Projektion eine zur Achse senkrechte Gerade bildet.

29. Nach Annahme einer Geraden g ist ihre Orthogonalprojektion g' auf die Ebene Π_1 als Spur der projizierenden Ebene bestimmt; dagegen ist g durch eine Projektion noch nicht bestimmt. Die beiden Projektionen g' und g'' auf Π_1 und Π_2 , die wir willkürlich annehmen dürfen, definieren jedoch eine Raumgerade g , und zwar ist sie die Schnittlinie der beiden durch g' resp. g'' senkrecht zu Π_1 resp. Π_2 gelegten Ebenen. Ausgenommen hiervon ist der Fall, wo eine der projizierenden Ebenen auf der Achse senk-

recht steht; dann fällt die andere projizierende Ebene mit ihr zusammen, und die Projektionen g' und g'' stehen in dem nämlichen Punkt der Achse auf dieser senkrecht. Ist demnach g' zur Achse normal, so ist auch g'' in dem gleichen Punkt zur Achse normal; zur vollständigen Bestimmung der Raumgeraden g sind hier noch weitere Angaben erforderlich.

30. Die Darstellung einer Geraden g kann immer auf die zweier auf ihr liegender Punkte P und Q zurückgeführt werden, durch deren Projektionen dann die der Geraden g hindurchgehen, also $g' = P'Q'$, $g'' = P''Q''$. Unter allen Punkten einer Geraden haben aber ihre Schnittpunkte mit den Projektionsebenen, nämlich $G_1 = g \times \Pi_1$ und $G_2 = g \times \Pi_2$, eine besondere Bedeutung. Sie heißen erster und

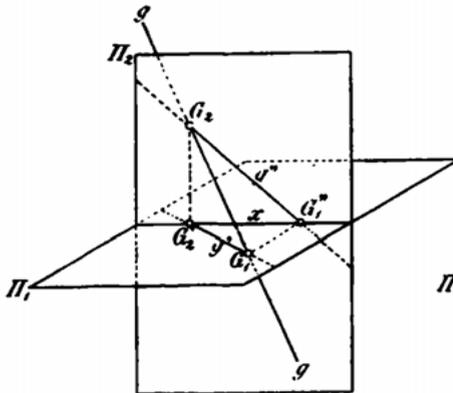


Fig. 20.

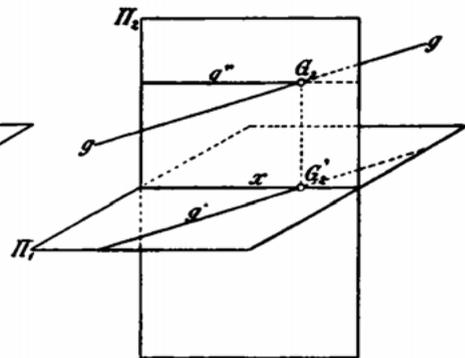


Fig. 21.

zweiter Spur- oder Durchstoßpunkt der Geraden. Jeder Spurpunkt fällt mit seiner gleichnamigen Projektion zusammen, während seine andere Projektion auf der Achse liegt (Fig. 20). — Ist g einer Tafel parallel, so liegt in dieser ihr Spurpunkt unendlich fern, die Projektion auf die andere Tafel wird zur Achse parallel. Z. B. folgt aus $g \parallel \Pi_1$, daß $g' \parallel g$ und $g'' \parallel x$ ist (Fig. 21). Ist g zur Achse parallel, so sind es auch g' und g'' ; G_1 und G_2 liegen dann beide unendlich fern.

Sind umgekehrt die Projektionen g' und g'' der Geraden g gegeben, so findet man ihre Spurpunkte aus der Bemerkung, daß der Aufriß von G_1 mit dem Punkt $g'' \times x$ und der Grundriß von G_2 mit dem Punkt $g' \times x$ identisch ist.

31. Die Projektion einer (unbegrenzten) Ebene E überdeckt im allgemeinen die betreffende Projektionsebene in ihrer ganzen

Ausdehnung und eignet sich daher nicht zur Bestimmung von E . Ausgenommen ist der Fall, wo E auf der Projektionsebene senkrecht steht; die Orthogonalprojektion der Ebene reduziert sich dann auf eine Gerade und genügt zu ihrer Bestimmung. Im allgemeinen Falle dagegen kann zur Darstellung der Ebene entweder die Angabe dreier Punkte oder zweier Geraden derselben durch ihre Grund- und Aufrisse dienen. Am gebräuchlichsten ist es, die Ebene E durch die beiden Geraden

$$e_1 = E \times \Pi_1 \text{ und } e_2 = E \times \Pi_2$$

darzustellen, die man als ihre erste oder Horizontalspur und ihre zweite oder Vertikalspur bezeichnet (Fig. 22). Die Spuren treffen sich im Achsenschnittpunkte $K_x = E \times x$ und bestimmen E direkt als Verbindungsebene $e_1 e_2$. Ist E zur Achse parallel, so sind

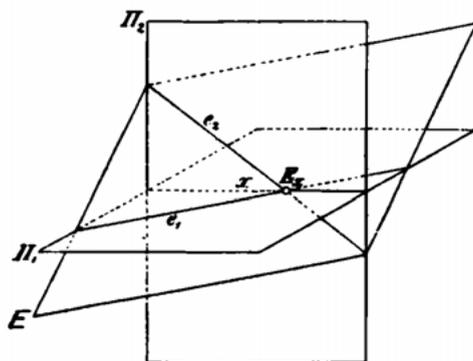


Fig. 22.

es auch ihre Spuren e_1 und e_2 und K_x ist unendlich fern. Ist E einer Projektionsebene parallel, so liegt in dieser ihre Spur unendlich fern, in der anderen parallel zur Achse. Ist E zu einer Tafelenebene normal, so steht in der anderen ihre Spur zur Achse senkrecht. Enthält E die Achse, so fallen beide Spuren e_1 und e_2 mit dieser zusammen; zur Bestimmung der

Ebene bedarf es dann noch der Angabe eines auf ihr liegenden Punktes außerhalb der Achse.

82. Die oben erwähnten speziellen Lagen einer Geraden oder einer Ebene, für die es nötig wird, von der gebräuchlichen Darstellung mittels Projektionen, bzw. Spuren in Π_1 und Π_2 , abzuweichen, weil diese zur Bestimmung nicht genügen, können als Beispiele dafür angeführt werden, daß es unter Umständen sich empfiehlt, eine dritte Projektionsebene Π_3 einzuführen. Man legt dieselbe zumeist gegen Π_1 und Π_2 , also auch gegen die x -Achse senkrecht und bezeichnet sie als Seitenrißebene (Kreuzriß). Die Geraden $y = \Pi_1 \times \Pi_3$ und $z = \Pi_2 \times \Pi_3$ bezeichnen wir auch als horizontale und vertikale Nebenachse. Der Punkt $O = \Pi_1 \times \Pi_2 \times \Pi_3$, in dem sich die drei Achsen rechtwinklig schneiden, heißt Ursprung. Von O aus werden auf jeder Achse die Strecken nach

der einen Seite positiv, nach der anderen negativ gerechnet und zwar auf x nach rechts, auf y nach vorn, auf z nach oben in positivem Sinn.

33. Zu den bisherigen Darstellungselementen eines jeden Grundgebildes kommt nach Einführung von Π_3 noch je ein drittes Element neu hinzu: für den Punkt P die dritte Projektion oder der Seitenriß P''' , sowie der dritte Abstand PP''' (welcher auf der rechten Seite von Π_3 positiv gerechnet wird), für eine Gerade g

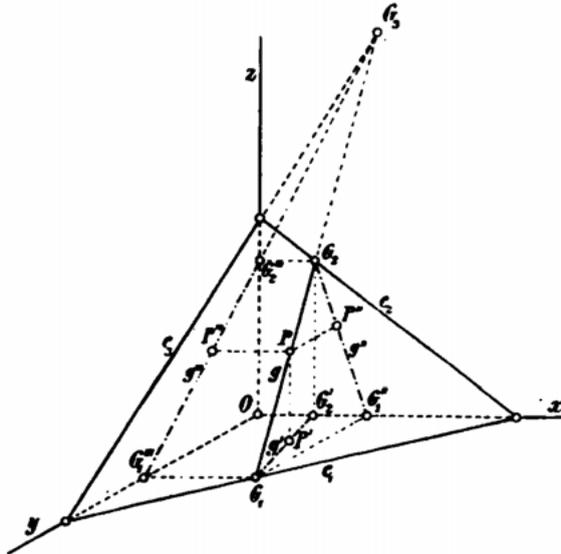


Fig. 23.

der Seitenriß g''' und der dritte Spurlinien $G_3 = g \times \Pi_3$, für eine Ebene E endlich die dritte Spurlinie $e_3 = E \times \Pi_3$ (Fig. 23).

34. Die drei Ebenen Π_1, Π_2, Π_3 teilen den Raum in acht räumliche Ecken, sie selbst werden durch die Achsen x, y, z in vier ebene Felder zerlegt. Zur Unterscheidung der möglichen Lagen eines Punktes hinsichtlich der acht Ecken dienen die Vorzeichen der drei Tafelabstände. Die Maßzahlen dieser Abstände bilden die rechtwinkligen Punktkoordinaten in der analytischen Geometrie des Raumes.

35. Es ist unmittelbar ersichtlich, daß in diesem Dreitafelensystem die Darstellung einer Geraden durch ihre Projektionen oder die einer Ebene durch ihre Spuren auch in den oben erwähnten Spezialfällen keine Unbestimmtheit mehr übrig läßt. Eine zur

Achse x senkrecht gerichtete, schneidende oder nicht schneidende (windschiefe) Gerade g , die durch ihre ersten beiden Projektionen g' und g'' nicht bestimmbar ist, wird durch eine derselben in Verbindung mit der dritten

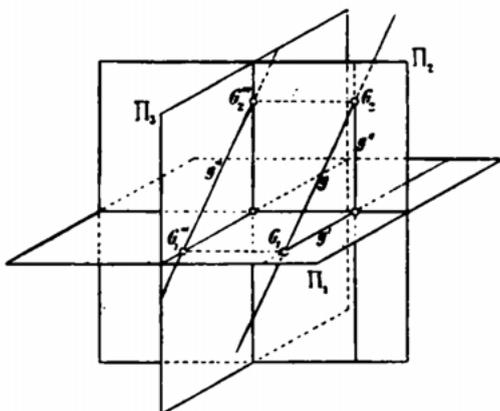


Fig. 24.

entsprechend noch in anderer Weise gewählt werden kann) als eine der Hilfsmethoden zu betrachten, die wir in der Folge noch weiter zu entwickeln haben werden. Den Hauptbestandteil der

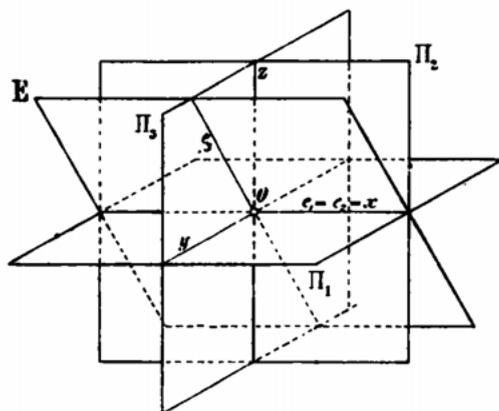


Fig. 25.

die Aufrißebene als Zeichnungsebene und denkt sich nach Ausführung der Projektionen die Horizontalebene durch Drehung um die Achse x mit der ersteren derart vereinigt, daß der vordere Teil der Grundrißebene (den wir als $+\Pi_1$ bezeichnen wollen) in den unteren Teil der Aufrißebene ($-\Pi_2$) zu liegen kommt; folglich fällt

in Verbindung mit der dritten (zu ihr selbst parallelen) Projektion g''' völlig bestimmt (Fig. 24). Eine die Achse x enthaltende Ebene E wird durch diese in Verbindung mit der dritten (durch den Ursprung gehenden) Spur e_3 bestimmt (Fig. 25).

36. Im übrigen ist die Einführung einer dritten Projektionsebene (welche zudem den jeweiligen Bedingungen der Aufgabe entsprechend noch in anderer Weise gewählt werden kann) als eine der Hilfsmethoden zu betrachten, die wir in der Folge noch weiter zu entwickeln haben werden. Den Hauptbestandteil der Methode der Orthogonalprojektion bildet die Benutzung des rechtwinkligen Zweitafelsystems oder das Grund- und Aufrißverfahren.

37. Die in der Horizontal- und Vertikalebene konstruierten Projektionen einer Raumfigur sollen jetzt in einer und derselben Zeichnungsebene zur Darstellung gebracht werden. Zu diesem Zwecke wählt man etwa

zugleich der hintere Teil der Grundrißebene ($-\Pi_1$) mit dem oberen Teil der Aufrißebene ($+\Pi_2$) zusammen (Fig. 26).

Soll eine Seitenrißebene Π_3 zur Verwendung kommen, so denkt man sich auch diese mit Π_2 vereinigt, und zwar durch eine Drehung um die Achse z , indem man die vordere Halbebene Π_3 mit der linken Halbebene Π_2 zur Deckung bringt. In Fig. 27 a und 27 b sind diejenigen Quadranten der drei Projektionsebenen, welche den oben, vorn und rechts gelegenen Raumoktanten begrenzen (in dem also alle drei Tafelabstände eines Punktes P positiv sind) vor und nach ihrer Umliegung in die Bildebene dargestellt.

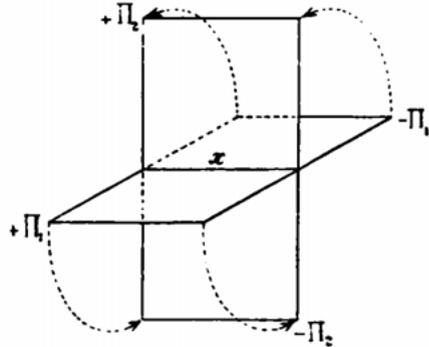


Fig. 26.

Durch die getroffenen (an sich willkürlichen) Festsetzungen über die Anordnung der verschiedenen Projektionen einer Figur in der Zeichnungsebene ist umgekehrt der Übergang von diesen zu ihrer Konstruktion im Raume eindeutig festgelegt.

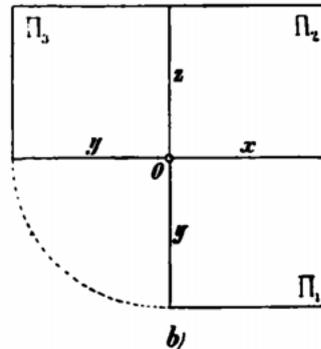
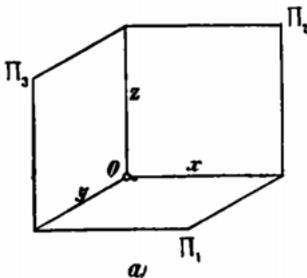


Fig. 27.

38. Zur leichteren Orientierung in den Figuren dient außer der Bezeichnung ihrer Punkte, Linien und Flächen durch Buchstaben die folgende Regel für das Zeichnen der Linien. In jeder Figur sind hauptsächliche und nebensächliche Linien zu unterscheiden; zu den ersteren gehören die bei der Problemstellung gegebenen und gesuchten Linien, sowie die Achse der Projektion, zu den letzteren die nur Konstruktionszwecken dienenden

Hilfslinien. Die Projektion einer jeden hauptsächlichen Linie wird voll ausgezogen, soweit letztere selbst im vorderen, oberen Raumquadranten liegt und sichtbar ist; andernfalls wird sie punktiert. Nebenlinien werden — ob sichtbar oder unsichtbar — gestrichelt oder strichpunktiert. Für die Beurteilung der Sichtbarkeit ist zu bemerken, daß alle vorkommenden Flächen, ebenso wie die Projektionstafeln als undurchsichtig gelten, daß ferner die Sehrichtung den projizierenden Strahlen in ihrer ursprünglichen Lage folgt, und zwar für Π_1 von oben nach unten, für Π_2 von vorn nach hinten.

Bei der Abbildung allseitig begrenzter Objekte denkt man sich diese zweckmäßig ganz in dem oberen, vorderen Raumquadranten gelegen, wodurch die Darstellung an Übersichtlichkeit gewinnt.

Darstellung der Grundgebilde: Punkt, Gerade, Ebene in verschiedenen Lagen.

Wir nehmen die oben geforderte Umlegung der einen Projektionsebene in die andere als vollzogen an und betrachten alle möglichen Lagen von Punkten, Geraden und Ebenen gegen das ursprüngliche System und die entsprechende Anordnung ihrer Projektionen resp. Spuren in der Zeichnungsebene.

39. Der Punkt. Die Projektionen P' und P'' eines Punktes P liegen in einer zur Achse senkrechten Geraden (Fig. 28). Umgekehrt bilden je zwei Punkte P' und P'' , deren Verbindungslinie zur Achse senkrecht ist, die beiden Projektionen eines Raumpunktes P . Aus einer derselben wird P mittels seines senkrechten Abstandes von der betreffenden Tafel konstruiert. Der Punkt P' liegt senkrecht über P'' im Abstand $P'P'' = P''P_x$, und vor P'' im Abstand $P'P'' = P'P_x$.

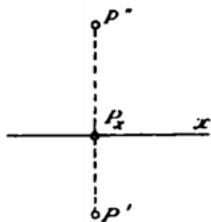


Fig. 28.

P liegt über, auf oder unter Π_1 , je nachdem P'' oberhalb, auf oder unterhalb der Achse liegt, und befindet sich zugleich vor, auf oder hinter Π_2 , je nachdem P' unterhalb, auf oder oberhalb der Achse liegt. Die so unterschiedenen Lagen eines Punktes sind in Fig. 29 dargestellt. Die Punkte P_1, P_3, P_7, P_9 gehören resp. dem oben vorn, unten vorn, oben hinten, unten hinten liegenden Raumquadranten, die Punkte P_2, P_4, P_6, P_8 ,