LEHRBUCH

DER

DARSTELLENDEN GEOMETRIE

VON

DR. KARL ROHN UND DR. ERWIN PAPPERITZ

O. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT LEIPZIG

O. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER BERGAKADEMIE FREIBERG

IN DREI BÄNDEN

ERSTER BAND

ORTHOGONALPROJEKTION
VIELFLACHE, PERSPEKTIVITÄT EBENER FIGUREN,
KURVEN, ZYLINDER, KUGEL, KEGEL, ROTATIONS- UND SCHRAUBENFLÄCHEN

MIT 351 FIGUREN IM TEXT

VIERTE, ERWEITERTE AUFLAGE

NEUDRUCK

WALTER DE GRUYTER & CO.

VORMALS G. J. GÖSCHEN'SCHE VERLAGSHANDLUNG
J. GUTTENTAG, VERLAGSBUCHHANDLUNG · GEORG
REIMER · KARL J. TRÜBNER · VEIT & COMP.

BERLIN W 10 UND LEIPZIG

1932

Archiv-Nr. 120232

Rodardruck von C. G. Röder A.-G., Leipzig

Vorwort zur ersten Auflage.

Für die Studierenden der exakten Wissenschaften liegt die Notwendigkeit vor, sich eine geläufige Raumanschauung zu erwerben. Ohne diese ist ein tieferes Eindringen in die einzelnen Naturwissenschaften und technischen Fächer unmöglich. Die praktische Erfahrung hat aber gelehrt, daß genaue Raumvorstellungen schwer zu erlernen sind. Das einzige Mittel hierzu bietet die bildliche Wiedergabe räumlicher Objekte nach mathematischer Methode, also die darstellende Geometrie. Durch sie und nur allmählich unter Behandlung zahlreicher Beispiele wird der Studierende dahin gebracht, sich in den Fragen, welche die räumlichen Formen betreffen, mit Sicherheit zurecht zu finden. Die darstellende Geometrie hat die Methoden zur Abbildung aller der geometrischen Gebilde zu entwickeln, die als Formelemente an den praktisch vorkommenden komplizierteren Objekten wiederkehren. Bei der Auswahl und Anordnung des Stoffes ist aber vor allem als Ziel die Entwickelung der Raumanschauung ins Auge zu fassen. Von diesem Gesichtspunkt aus erscheint es zweckmäßig, auch bei den ebenen Figuren zur Erklärung ihrer Eigenschaften und ihrer Abhängigkeit voneinander die sich im Raume vollziehende Projektion zu benutzen und die letztere überhaupt, wo es nur angeht, in den Vordergrund zu stellen. Dies gilt beispielsweise von der Erklärung der Kollinearverwandtschaften ebener Figuren und von der Theorie der Kegelschnitte; bei den letzteren ist die Entstehung aus der Zentralprojektion des Kreises als Ausgangspunkt geeigneter, als die Erzeugungsweise durch projektive Büschel und Reihen, die der mehr formalen Methode der Geometrie der Lage entspricht.

Das vorliegende Buch soll nach der Meinung der Verfasser vornehmlich dem Zwecke dienen, durch die Lösung der Darstellungsprobleme dem Leser die klare Erfassung geometrischer Fragen und die Bildung präziser Raumvorstellungen zu vermitteln. Es setzt nur die einfachsten geometrischen Kenntnisse voraus, schreitet systematisch vom Leichten zum Schwereren fort und bezieht viele solche stereometrische Aufgaben in den Lehrbereich ein, die zur Erreichung des oben bezeichneten Zieles geeignet erscheinen. Hierdurch dürfte es besonders den Bedürfnissen des Studierenden Rechnung tragen. Dem mit dem Stoff vertrauten Leser wird neben dem Bekannten gewiß manches Neue, manche Vereinfachung von Konstruktionen und Beweisen entgegentreten.

Der Wunsch, die Ergebnisse der darstellenden Geometrie durchweg auf die Projektionsmethoden begründet zu sehen, mag das Erscheinen dieses Buches rechtfertigen. Möge es sich im dargelegten Sinne als nutzbringend erweisen!

Im August 1893.

Karl Rohn. Erwin Papperitz.

Vorwort zur dritten und vierten Auflage.

Bevor wir eine Neubearbeitung des seit längerer Zeit vergriffenen zweiten Bandes vornehmen konnten, hatte sich die Veranstaltung einer dritten Auflage des ersten Bandes unseres Lehrbuches notwendig gemacht. Wir haben uns bei diesem Anlaß entschlossen, den ganzen Stoff neu anzuordnen und ihn statt auf zwei auf drei Bände zu verteilen.

Maßgebend für die neue Einteilung war die gebotene Rücksichtnahme auf die Bedürfnisse der Studierenden. Unser oberstes Ziel war und ist die methodische Schulung der geometrischen Vorstellungskraft, deren kein Studierender exakter Wissenschaften entraten kann. Und als das einzig und allein geeignete Mittel zur Erreichung dieses Zieles betrachten wir das intensive Studium der darstellenden Geometrie. Man muß indessen klar und scharf unterscheiden zwischen den Bedürfnissen, welche die Studierenden der technischen Wissenschaften und die der Mathematik haben. Die Studierenden der technischen Hochschulen, die künftigen Ingenieure, brauchen die

Theorie in geringerem Umfang, dafür aber um so mehr Einübung der graphischen Methoden, denn die exakte Zeichnung ist die „Sprache der Ingenieure“. Sie sollen das Greifbare in der Geometrie beherrschen und verwerten lernen. Anders bei den Studierenden der reinen Mathematik; für diese bildet die beschreibende Geometrie gewissermaßen nur ein Durchgangsstadium, das sie von der grobsinnlichen Auffassung der Raumformen zu einer verfeinerten begrifflichen Erkenntnis ihrer Gesetze hinführt. Auch sie sollen die Anwendbarkeit ihrer Wissenschaft kennen und nicht vernachlässigen; sie sollen aber andererseits in theoretischer Beziehung weiter vorwärts schreiten und selbst komplizierte räumliche Gebilde erforschen lernen, wenn auch die hier zu gewinnenden Kenntnisse nicht immer eine unmittelbare Anwendung auf andere Wissenszweige zulassen; denn die darstellende Geometrie bezweckt für den Mathematiker in erster Linie die Schulung der Raumvorstellung.

Im übrigen war unser Bestreben darauf gerichtet, die Darlegung der Methoden, die Konstruktionen und die Beweise so einfach wie möglich zu gestalten. Die Anwendungsbeispiele, die Literaturnachweise und historischen Anmerkungen sind vermehrt worden.

Der erste Band behandelt vorbereitend die notwendigen Grundlagen der darstellenden Geometrie, d. h. die Kollinearverwandtschaften der ebenen Figuren (Ähnlichkeit, Affinität und Perspektivität), sowie unter tunlichster Beschränkung auf das Notwendige die konstruktive Theorie der Kegelschnitte und die Hauptsätze über die ebenen Kurven, Raumkurven und Flächen. Im wesentlichen aber ist dieser Teil der Methode der orthogonalen Projektion, also dem Grund- und Aufrißverfahren, und seiner Anwendung auf ebenflächige Gebilde, Kugel, Zylinder, Kegel, Rotationsflächen, zyklische Kurven, Schraubenlinien und Schraubenflächen gewidmet. Die Schattenkonstruktionen sind allenthalben berücksichtigt. Dieser Band umfaßt sonach diejenigen Teile der darstellenden Geometrie, die nicht nur jeder Mathematiker, sondern auch jeder Ingenieur unbedingt kennen muß.

Der zweite Band enthält die Axonometrie, die freie und angewandte Perspektive, sowie die Beleuchtungslehre. Wie wichtig die axonometrischen Darstellungsverfahren für Ingenieure sind, denen sie die beste Methode des Skizzierens liefern, und welche Bedeutung die Kenntnis der Perspektive für Architekten und bildende Künstler besitzt, braucht hier nicht besonders hervorgehoben zu werden.

Der dritte Band ergänzt die beiden ersten durch die Weiterführung der Theorie und ihre Anwendung auf allerlei dem Techniker ferner liegende geometrische Fragen, um so die Raumanschauung noch zu vertiefen. Er bringt — immer in konstruktiver, der projektiven Geometrie angepaßter Behandlungsweise — die allgemeine Theorie der Kurven und Flächen zweiten Grades, vieler Raumkurven und Flächen höherer Art (darunter vorzugsweise der Regelflächen), sowie die Hauptsätze über die Krümmung der Flächen.

Die drei Bände sind in der neuen Bearbeitung gleichzeitig erschienen. Um die Neubearbeitung auch äußerlich als ein einheitliches Ganzes zu kennzeichnen, ist sie durchgängig als dritte Auflage bezeichnet worden, obgleich nur diejenigen Teile, die früher im ersten Bande vereinigt waren, tatsächlich eine dritte Auflage darstellen.

Zur vierten Auflage des ersten Bandes sei nur bemerkt, daß die stereographische Projektion ausführlicher behandelt wurde und daß in einem Anhang Erwägungen über die Einfachheit und Genauigkeit graphischer Konstruktionen beigefügt sind, die für einen jeden, der möglichst genaue Zeichnungen auszuführen hat, von Wert sein dürften.

Wir hoffen durch die vorgenommene Umarbeitung die Brauchbarkeit unseres Lehrbuches erhöht zu haben. Möge es wiederum freundliche Aufnahme bei den Fachgenossen finden und den Lernenden zum Nutzen dienen!

Im August 1912.

Karl Rohn. Erwin Papperitz.

Inhalt.

Seite

Zweites Kapitel. Darstellung der Punkte, Geraden und Ebenen in Grund- und Aufriß. Bestimmung der einfachen Beziehungen dieser Grundgebilde zueinander.

Das Grund- und Aufrißverfahren.

Darstellung der Grundgebilde: Punkt, Gerade, Ebene in verschiedenen Lagen.

Punkte, Gerade und Ebenen in vereinigter Lage. Verbindungs- und Schnittelemente. Parallelismus.

Gerade und Ebenen in rechtwinkliger Stellung. Abstände und Winkel. Die Umlegung in eine Tafel und die Drehung um die Parallele zu einer Tafel.

Seite

Achtes Kapitel. Rotationsflächen.

Allgemeines. Eigen- und Schlagschatten, ihr gegenseitiges Verhalten.

Allgemeine Rotationsflächen, Schnitte, Durchdringung, Eigen- und Schlagschatten.

Die Ringfläche.

Das Rotationshyperboloid und seine Anwendung.

Die Rotationsflächen 2. Grades.

EINLEITUNG.

Alle Zweige der Geometrie haben die Untersuchung gesetzmäßig entstandener Raumgebilde (ebener und räumlicher Figuren) zum Gegenstande. Während aber die Geometrie der Lage und die analytische Geometrie das hierdurch bezeichnete Ziel auf rein theoretischem Wege zu erreichen suchen, beschäftigt sich die darstellende Geometrie, wie schon ihr Name besagt, mit der praktischen Durchführung des Prozesses der Darstellung oder Konstruktion der Figuren, die für die vorgenannten beiden Disziplinen an sich nebensächlich ist und mit steigender Entwickelung des Anschauungsvermögens mehr und mehr entbehrlich wird. Die darstellende Geometrie ist eine angewandte mathematische Disziplin: sie dient den Bedürfnissen der Praxis in verschiedenen Zweigen der technischen Wissenschaften und der Kunst. Zugleich aber bildet sie für den Mathematiker und Techniker das wirksamste Mittel, um das Vermögen der räumlichen Anschauung, dessen sie bei der Behandlung räumlicher geometrischer Fragen allenthalben bedürfen, bis zu möglichst hohem Grade zu entwickeln.

Der Zweck der darstellenden Geometrie ist die Bestimmung der Raumgebilde nach Gestalt, Größe und Lage durch die Konstruktion. Sie bedient sich dabei in der Hauptsache ebener Bilder derselben, indem sie zeigt, wie man mittels geeigneter Methoden einerseits von den irgendwie definierten räumlichen Objekten ihre Bilder gewinnen, andererseits wie man von diesen ausgehend auf die Eigenschaften der dargestellten Gebilde zurückschließen kann. In dieser letzteren Beziehung dient sie also dazu, geometrische Eigenschaften räumlicher und ebener Gebilde aufzufinden und zu beweisen.

Außer auf die Strenge und Einfachheit des mathematischen Gedankenganges hat die darstellende Geometrie bei der Ausbildung ihrer Methoden auch auf die Erreichung größtmöglicher Genauigkeit für die praktische Ausführung der Konstruktionen Bedacht zu nehmen. Unter den verschiedenen möglichen Methoden, die zur gesetzmäßigen Abbildung der Raumfiguren führen, wählt sie demgemäß nur eine kleine Anzahl, als für ihre Zwecke geeignet, aus. Diese beziehen sich sämtlich auf die Konstruktion der ebenen Bilder durch Projektion.

Die Methode des Projizierens ist aus den Vorgängen beim Sehen der Gegenstände abstrahiert. Die Zentralprojektion entsteht, wenn man aus einem gegebenen Projektionszentrum (Augpunkt) durch die Punkte des Objektes projizierende Strahlen (Sehstrahlen) zieht und diese mit einer Ebene, der Bildebene, schneidet. Statt des Projektionszentrums kann auch eine feste Richtung für die projizierenden Strahlen gegeben werden, so daß sie gegen die Bildebene gleiche Neigung erhalten, insbesondere zu ihr rechtwinklig werden; hierbei ergibt sich die schiefe oder speziell die orthogonale Parallelprojektion. Diese Methoden empfehlen sich vor anderen durch die Bildlichkeit der Darstellungen, d. h. dadurch, daß die Gesichtseindrücke, die wir von letzteren haben, in allem Wesentlichen mit denen übereinstimmen, wie sie die dargestellten Objekte selbst hervorrufen würden. Hiermit ist der weitere Vorteil verknüpft, daß bei ihrer Zugrundelegung die Entwickelung der geometrischen Beziehungen an den räumlichen Objekten sich am durchsichtigsten gestaltet.

Mit Rücksicht auf die Anwendungen sucht man die Anschaulichkeit der Darstellungen räumlicher Objekte dadurch zu erhöhen, daß man ihnen die Wiedergabe der Beleuchtungsverhältnisse für eine geeignet angenommene Lichtquelle, namentlich die Eigen- und Schlagschatten in genauer Konstruktion hinzufügt. Die Lichtquelle wird entweder durch einen leuchtenden Punkt im Endlichen vertreten, oder man nimmt sie in unendlicher Ferne an, so daß die Lichtstrahlen parallel werden. Die Theorie der Schattenkonstruktionen ist in der Projektionslehre enthalten; die Theorie der Beleuchtung gesetzmäßig gestalteter Oberflächen schließt sich eng an die erstere an, bedarf aber besonderer Auseinandersetzungen.

In letzter Linie kommen für die darstellende Geometrie Methoden in Betracht, welche auf die Konstruktion räumlicher Abbilder oder Modelle der Raumfiguren abzielen. Hierbei bedarf die Konstruktion von Modellen, insoweit sie mit den gegebenen Objekten kongruent oder (bei verändertem Maßstabe) in allen Teilen ähnlich sind, ihrer unmittelbaren Faßlichkeit wegen, keiner näheren Erläuterung. Daneben kommt die sogenannte Reliefperspektive gelegentlich zur Anwendung. Ihre Theorie läßt sich als eine Verallgemeinerung der Projektionsmethode an deren Darlegung ohne Schwierigkeit anfügen.

Die darstellende Geometrie bedarf zu ihrer Entwickelung keiner anderen theoretischen Voraussetzungen als der Begriffe und Lehrsätze der elementaren Planimetrie und Stereometrie. Diese bezeichnen daher auch das Maß der mathematischen Vorkenntnisse, die zum Verständnisse dieses Lehrbuches erforderlich sind und auf die Bezug genommen wird, ohne Erklärungen oder Beweise hinzuzufügen. An die Elemente der Raumlehre anknüpfend bildet die darstellende Geometrie selbständig die Lehre von den Projektionen aus. Das Verfahren des Projizierens aber, das in erster Linie benutzt wird, um die Darstellung gegebener Raumfiguren zu gewinnen, soll gleichzeitig dazu dienen, Eigenschaften derselben zu erkennen und zu beweisen. Auch sollen die Projektionsmethoden auf höhere stereometrische Fragen angewandt und diese durch Konstruktion gelöst werden. Dann erst wird dem Zwecke der mathematischen Schulung der Anschauung genügend Rechnung getragen; denn jede konstruktive Lösung besteht in einer methodisch geordneten Folge von Operationen, deren geometrische Bedeutungen, im Gegensatz zu denen der rechnenden Operationen, einzeln anschaulich erfaßt, in ihrer Gesamtheit aber bei der graphischen Ausführung überblickt werden können.

Durch ihre Methode wird unsere Wissenschaft naturgemäß auch zur Untersuchung solcher Eigenschaften der Figuren geführt, die sich bei den durch Projektion gewonnenen Bildern wiederfinden. Diese durch Projektion unzerstörbaren oder projektiven Eigenschaften der Raumgebilde sind es, die in allgemeinster Weise aufgefaßt die Grundlagen der Geometrie der Lage ausmachen. Bei letzterer fällt die Rücksicht auf Darstellbarkeit fort; sie operiert lediglich mit Begriffen. Die darstellende Geometrie aber bereitet die Bildung dieser Begriffe vor, indem sie alle geometrischen Gesetze untersucht, die durch den wirklichen Vorgang der Projektion direkt begründet werden.

Steht also die darstellende Geometrie zur Geometrie der Lage in näherer Beziehung als zur analytischen Geometrie, da diese die Gebilde und ihre Eigenschaften durch Gleichungen zwischen Maßzahlen bestimmt, so kann sie doch auf den Gebrauch von Maßrelationen nicht völlig verzichten, weil die Bestimmung der Größenverhältnisse, ebensogut wie die der Lagebeziehungen, in ihrer Aufgabe liegt. Aber sie verwendet nur die einfachsten Formen derselben, wobei an die Stelle der Rechnung mit analytischen Größen sogleich die Konstruktion treten kann.

Irgend eine Aufgabe der darstellenden Geometrie ist als gelöst zu betrachten, wenn sie zurückgeführt ist auf solche Elementaroperationen, die man ohne weiteres mit bekannten Hilfsmitteln durchführen kann. Unter jenen Elementaroperationen aber sind lediglich die folgenden, die sich sämtlich auf eine ebene Zeichnungsfläche beziehen, zu verstehen:

das Ziehen gerader Linien durch gegebene Punkte; insbesondere das Ziehen gerader Linien, die zu einer gegebenen Geraden parallel sind, oder auf ihr rechtwinklig stehen;

das Schlagen von Kreisen um ein gegebenes Zentrum und mit gegebenem Radius.

Bezüglich des Entwickelungsganges mag folgendes im voraus bemerkt werden. Mit dem Einfachsten wird begonnen; so geht bei der Darstellung räumlicher Objekte die orthogonale der schiefen Parallel- und der Zentralprojektion voraus. Zuerst werden durch diese Projektionen ebene Figuren abgebildet. Vereinigt man dann Bild und Originalebene in geeigneter Weise, so ergeben sich mittelbar geometrische Abhängigkeiten, die zwischen Figuren ein und derselben Ebene stattfinden; sie werden Kollinearverwandtschaften oder Kollineationen genannt, weil dabei geraden Linien stets wieder Geraden entsprechen. Bei paralleler Lage von Bild- und Originalebene liefert die schiefe Parallelprojektion kongruente Figuren, die Zentralprojektion aber ähnliche Figuren bei ähnlicher Lage. Ist dagegen die Bildebene beliebig gegen die Originalebene gelegen, so erhält man eine Verwandtschaft ebener Figuren, die bei Parallelprojektion als Affinität bei affiner Lage und bei Zentralprojektion als zentrische Kollineation ebener Systeme oder gewöhnlich als Perspektivität bezeichnet wird.

Gerade deshalb, weil die genannten Verwandtschaften ebener Gebilde aus Projektionen im Raume entstanden gedacht werden können, haben sie für die darstellende Geometrie eine prinzipielle Wichtigkeit; die bei der Darstellung räumlicher Objekte auftretenden Probleme führen immer wieder auf sie zurück. Es erschien daher zweckmäßig, sie an geeigneter Stelle ausführlich zu behandeln. Wir beginnen also die Darlegung der Methoden der Parallelprojektion mit einem Kapitel über Ähnlichkeit und Affinität bei ebenen Figuren. Dementsprechend würde ein Kapitel über Perspektivität ebener Figuren vor der Behandlung der Perspektive räumlicher Figuren seinen natürlichen Platz finden. Wir ziehen es aber vor, ein solches bereits an einer früheren Stelle einzuschalten und später darauf zurück zu verweisen, weil für gewisse Gebilde schon an und für sich die Gesetze der Perspektivität in Betracht kommen, namentlich für Pyramiden und Kegel und ihre ebenen Schnitte.

Bei der Entwickelung der Projektionsmethoden für beliebige (nicht ebene) Objekte wird jedesmal mit der Darstellung der einfachen Grundgebilde: Punkt, Gerade, Ebene und der Lösung der aus ihren möglichen Beziehungen sich ergebenden Fundamentalaufgaben begonnen, um daran die Darstellung und Untersuchung der komplizierteren Gebilde in angemessener Ordnung anzuschließen.

Schließlich mögen noch einige Bemerkungen über die hauptsächlichsten, zum Teil am gehörigen Orte noch näher zu erläuternden Bezeichnungen und Abkürzungen Platz greifen. Wir werden durchgängig:

Punkte mit großen lateinischen Buchstaben: $A, B, \ldots P, \ldots$,
Gerade mit kleinen lateinischen Buchstaben: $a, b, \ldots g, \ldots$,
Ebenen mit großen griechischen Buchstaben: $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \ldots \mathsf{E}, \ldots$,
Winkel mit kleinen griechischen Buchstaben: $\alpha, \beta, \ldots \varphi, \ldots$,

bezeichnen, und zwar verwenden wir meist die ersten Buchstaben des betreffenden Alphabets für gegebene oder bekannte Elemente, für variable oder unbekannte aber die später folgenden Buchstaben.

Als Zeichen der Verbindung mehrerer Elemente durch ein neues Grundgebilde, welches sie zusammengenommen bestimmen, dient die bloße Nebeneinanderstellung der sie bezeichnenden Buchstaben. Es bedeutet also:

$g = AB$ die gerade Verbindungslinie der Punkte A und B,
$\mathsf{E} = ABC$ die Verbindungsebene der drei Punkte A, B, C,
$\Delta = Ab$ die Verbindungsebene des Punktes A und der Geraden b,
$\Gamma = ab$ die Verbindungsebene der sich schneidenden Geraden a und b.

Zur Bezeichnung der Schnittelemente wählen wir das zwischen die betreffenden Buchstaben einzufügende Symbol $\times$. Hiernach bedeutet:

$P = g \times h$ den Schnittpunkt der in einer Ebene liegenden Geraden g und h.
$Q = g \times \mathsf{E}$ den Schnittpunkt der Geraden g und der Ebene E,
$g = \mathsf{E} \times \Delta$ die Schnittlinie der Ebenen E und Δ.

Wie gebräuchlich, legen wir parallelen Geraden einen unendlich fernen Schnittpunkt (Richtungspunkt, Richtung), parallelen Ebenen eine unendlich ferne Schnittlinie (Stellungsgerade, Stellung) bei.

Diese Bezeichnungen werden miteinander nach Bedürfnis kombiniert; z. B. würde $AB \times PQR$ den Schnittpunkt der Verbindungslinie der Punkte A, B mit der Verbindungsebene der Punkte P, Q, R darstellen, usf.

Als Dreieckszeichen dient $\triangle$, als Winkelzeichen $\angle$, so daß

$\triangle\, ABC$ das Dreieck mit den Ecken A, B, C,

$\alpha = \angle\, ABC$ den Winkel, welchen die Schenkel BA und BC am Scheitel B einschließen,

$\beta = \angle\, ab$ den Winkel der Geraden a und b,

$\gamma = \angle\, a\mathsf{E}$ den Neigungswinkel der Geraden a gegen die Ebene E,

$\varphi = \angle\, \mathsf{E}\Delta$ den Winkel der Ebenen E und Δ

bezeichnet.

R ist das Symbol für den rechten Winkel oder 90°, $2R$ für den gestreckten Winkel usf.

Neben den bereits üblichen Abkürzungen $\parallel$, $\#$, $\perp$, $\sim$, $\cong$ für parallel, parallel und gleich, senkrecht, ähnlich und kongruent, führen wir noch ein neues Symbol für den senkrechten Abstand ein; es soll nämlich $(P \dashv g)$ die Entfernung des Punktes P von der Geraden g, $(P \dashv \mathsf{E})$ die des Punktes P von der Ebene E repräsentieren.

Übrigens wird für die geometrischen Beziehungen keineswegs ausschließlich die symbolische Schreibweise angewendet werden. Dieselbe soll nur bei Beweisen die Übersicht erleichtern und bei der unvermeidlichen Wiederholung geläufiger Operationen die Möglichkeit der Kürzung gewähren.

Im besonderen sind folgende feststehende Bezeichnungen zu nennen:

Π_1, Π_2 für die beiden rechtwinkligen Projektionsebenen bei orthogonaler Projektion, x für ihre Schnittlinie oder Achse.

P', P'' für die Projektionen eines Punktes P,

g', g'' für die Projektionen einer Geraden g,

G_1, G_2 für die Spurpunkte einer Geraden g,

e_1, e_2 für die Spurlinien einer Ebene E.

Schiefe Parallelprojektionen werden durch Anhängung des unteren Index s, zentralperspektive Bilder durch die des Index c bezeichnet. Die Umlegung einer ebenen Figur in eine andere Ebene um die zu beiden gehörige Spurlinie charakterisieren wir durch den unteren oder oberen Index o, Elemente, die durch Drehung um irgendeine Gerade eine neue Lage erhalten haben, ebenso durch den Index $\triangle$, endlich Schatten durch den unteren oder oberen Index $_*$ oder *.

Ziffern auf halber Höhe, z. B. [1]), verweisen auf die Literaturnachweise am Ende des Bandes.

ERSTES KAPITEL.

Ähnlichkeit und Affinität ebener Figuren.

1. Bevor wir die allgemeinen Gesetze der orthogonalen Parallelprojektion entwickeln und sie auf räumliche Gebilde anwenden, betrachten wir die ebenen Gebilde für sich. Hierbei beschränken wir uns nicht auf die orthogonale Parallelprojektion, sondern behandeln zuerst — gewissermaßen als Vorstufe — die einfachste Form der Zentralprojektion, bei welcher Original- und Bildebene parallel liegen, hierauf aber sogleich die schiefe Parallelprojektion. Aus diesen beiden im Raume zu vollziehenden Projektionsarten werden die Ähnlichkeit und die Affinität zwischen Figuren einer Ebene abgeleitet; ihre Kombination ergibt eine allgemeinere Verwandtschaft, die Affinität im weiteren Sinne, die uns jedoch hier nicht beschäftigen soll.[1])

Ähnlichkeit ebener Figuren.

2. Es sei eine Ebene E im Raume gegeben. Zu ihr parallel werde eine zweite Ebene E_1 und außerhalb beider ein Punkt O nach Willkür festgelegt. Zieht man durch alle Punkte einer in E gelegenen Figur von dem Zentrum O ausgehende, projizierende Strahlen, ebenso durch alle Geraden dieser Figur projizierende Ebenen, so liefern diese Strahlen und Ebenen in ihrem Schnitt mit der Ebene E_1 als Bildebene eine zweite Figur, deren Punkte und Geraden denen der gegebenen Figur eindeutig entsprechen. Beispielsweise geht (Fig. 1) aus dem Dreieck ABC in E ein Dreieck $A_1B_1C_1$ in E_1 als

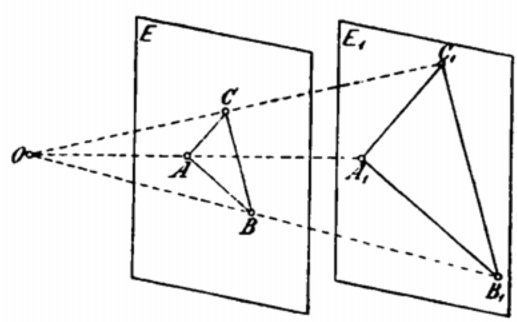

Fig. 1.

Bild hervor. Die Beziehung, in welcher die einander entsprechenden Figuren stehen, heißt Ähnlichkeit bei ähnlicher Lage und besitzt folgende Eigenschaften:

α) Entsprechende Gerade sind parallel; also:
β) Parallelen Geraden g und h entsprechen parallele Gerade g_1 und h_1 und einem Winkel φ ein ihm gleicher Winkel φ_1.
γ) Das Verhältnis irgend zweier entsprechenden Strecken AB und $A_1 B_1$ ist konstant $= e : e_1$, wenn $e = (O \dashv \mathsf{E})$, $e_1 = (O \dashv \mathsf{E}_1)$ gesetzt wird.

Offenbar ist:

$$AB : A_1 B_1 = OA : OA_1 = e : e_1$$

und folglich auch:

$$AB : A_1 B_1 = BC : B_1 C_1 \text{ usf.}$$

Ist für irgend zwei ebene Figuren eine der beiden letzten Eigenschaften und folglich auch die andere erfüllt, so sind sie nur als ähnlich zu bezeichnen. Kommt aber die erste Eigenschaft hinzu, so befinden sie sich in ähnlicher Lage. In der Tat braucht man nur zwei einander entsprechende parallele Strecken AB und $A_1 B_1$ zu kennen, um das Ähnlichkeitszentrum $O = AA_1 \times BB_1$ zu finden. Hieraus folgt weiter, daß je zwei ähnliche Figuren auf unendlich viele Arten in ähnliche Lage gebracht werden können.

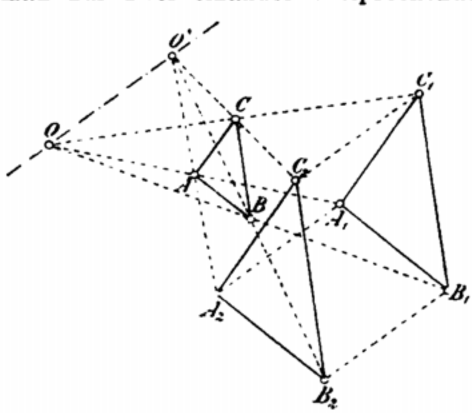

Fig. 2.

3. Die ähnlichen Figuren bleiben in ähnlicher Lage, wenn die Bildebene E_1 sich selbst parallel verschoben wird. An Stelle von O tritt dabei ein neues Zentrum O'. Die Strecke OO', d. i. die Verschiebung des Zentrums, ist mit derjenigen der Bildebene parallel und gleichgerichtet oder ihr entgegengesetzt, je nachdem O und E_1 auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von E liegen; der Größe nach ist sie durch die Relation:

$$OO' = a \cdot \frac{e}{e_1 - e}$$

bestimmt, wobei a die Größe der Verschiebung der Punkte von E_1 bezeichnet. Geht nämlich (Fig. 2) A_1, das Bild eines beliebigen Punktes A, bei der im Raume vollführten Parallelverschiebung von E_1 in A_2 über, so schneidet die Gerade $A_2 A$ die durch O gezogene Parallele zu $A_1 A_2$ in einem Punkte O', welcher durch die obigen Angaben bestimmt ist; dies gilt für jedes Paar entsprechender Punkte. — Insbesondere bleibt der Charakter unserer Abbildung erhalten, wenn E_1 durch eine geeignete Parallelverschiebung mit E selbst zur Deckung gebracht wird. Diese Operation, bei der ein bestimmter Punkt von E_1 in einen beliebigen Punkt von E verschoben wird, liefert **ähnliche und ähnlich liegende Gebilde in einer Ebene.** In die Ebene E fällt auch das Zentrum O' und die projizierenden Strahlen. Die drei oben genannten Eigenschaften bleiben für die so erhaltene ähnliche Beziehung in der Ebene unverändert bestehen. Sie ist eindeutig bestimmt durch Angabe des Zentrums und zweier einander entsprechender Punkte, oder durch ein Paar paralleler entsprechender Strecken.

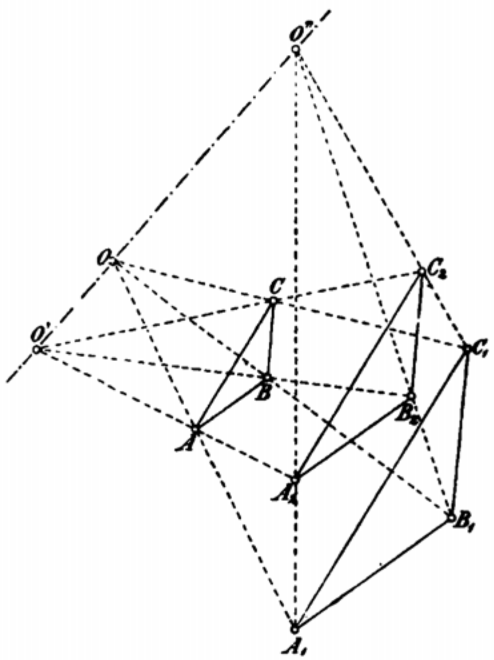

Fig. 3.

4. Der vorige Satz ist ein Spezialfall des folgenden: **Sind im Raume zwei Figuren zu einer dritten ähnlich und ähnlich gelegen, so sind sie es auch zueinander. Das neue Ähnlichkeitszentrum liegt mit den beiden gegebenen in gerader Linie.** Sind nämlich A, B und A_1, B_1 (Fig. 3) entsprechende Punkte zweier ähnlicher und ähnlich gelegener Figuren, sowie O das zugehörige Ähnlichkeitszentrum, gilt ferner dasselbe von A, B, A_2, B_2 und O', so liegen $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ in einer Ebene, weil $A_1 B_1 \parallel A B \parallel A_2 B_2$ ist. Weiter liegt der Strahl $A_1 A_2$ in der Ebene $A O O'$ und schneidet $O O'$ in einem Punkte O''. In demselben Punkte wird $O O'$ von $B_1 B_2$ geschnitten; denn $B_1 B_2$ und $O O'$ müssen sich in einem Punkte schneiden, da sie in einer Ebene liegen; das muß aber der Schnittpunkt von $O O'$ mit der Ebene $A_1 B_1 A_2 B_2$, also O'' sein. O'' ist das neue Ähnlichkeitszentrum. Der Satz gilt auch für Figuren in einerlei Ebene.

5. Von den Folgerungen, die man unmittelbar aus diesen Betrachtungen ziehen kann, mag als beachtenswert hervorgehoben werden, daß jede zu einem Kreise ähnliche Figur wiederum ein Kreis ist, und daß je zwei Kreise einer Ebene in doppelter Weise als in ähnlicher Lage befindlich angesehen werden können. Läßt man nämlich die Mittelpunkte M und M_1 (Fig. 4) und je zwei parallele und gleich oder entgegengesetzt gerichtete Radien einander entsprechen, so ergeben sich auf $M M_1$ zwei Ähnlichkeitszentren O und O (ein äußeres und ein inneres), für welche die Verhältnisgleichung $O M : O M_1 = r : r_1 = O' M : O' M_1$ besteht. Die Verbindungslinien der Endpunkte von parallelen, gleichgerichteten Radien gehen durch O, von entgegengesetzt gerichteten Radien aber durch O'. Durch O und O' gehen auch die gemeinsamen Tangenten der beiden Kreise, deren es im allgemeinen vier gibt.

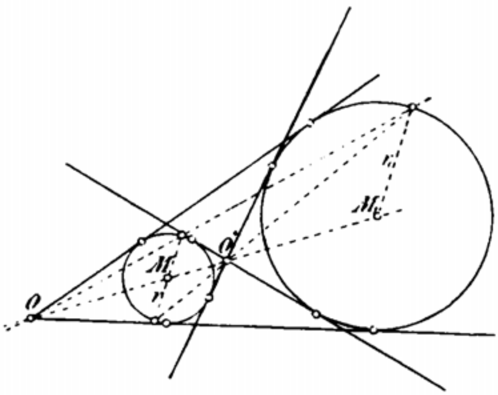

Fig. 4.

Parallelprojektion einer ebenen Figur auf eine andere Ebene.

6. Die zu projizierenden Gebilde seien in der Ebene E gelegen; als Bildebene nehmen wir irgend eine zweite Ebene E_1 an. Werden durch die Punkte und Geraden einer in der Ebene E befindlichen Figur in einer festgewählten Richtung projizierende Strahlen resp. Ebenen gezogen und mit E_1 geschnitten, so entsteht eine zweite Figur, die mit ihren Punkten und Geraden der vorgelegten eindeutig entspricht. Das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ in E_1 geht z. B. auf diese Weise aus dem Dreieck $A B C$ in E hervor (Fig. 5). Das benutzte Verfahren wird im allgemeinen als schiefe, im besonderen, wenn die Projektionsrichtung zur Bildebene E_1 senkrecht steht, als orthogonale oder normale Parallelprojektion bezeichnet. Die geometrische Abhängigkeit zwischen den entsprechenden Figuren heißt Affinität bei affiner Lage; die projizierenden Strahlen werden Affinitätsstrahlen, ihre Richtung Affinitätsrichtung, die Schnittlinie $a = \mathsf{E} \times \mathsf{E}_1$ wird Affinitätsachse genannt.

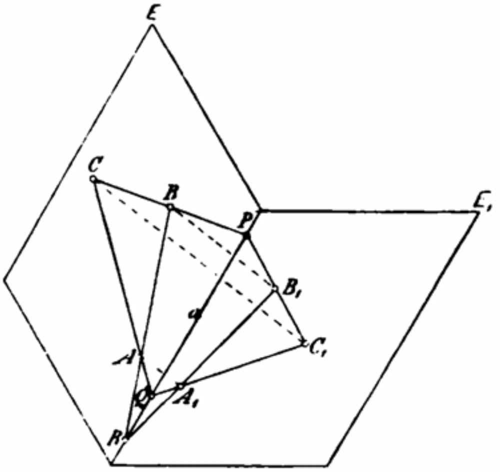

Fig. 5.

7. Aus der Definition ergeben sich die Eigenschaften affiner und affin gelegener ebener Figuren.

α) Jeder Punkt der Affinitätsachse a entspricht sich selbst; entsprechende Gerade g und g_1 schneiden sich auf a, und insbesondere ist $g_1 \parallel a$, wenn $g \parallel a$ angenommen wird.

β) Parallelen Geraden g und h entsprechen parallele Gerade g_1 und h_1.

γ) Einem Winkel φ entspricht im allgemeinen ein von ihm verschiedener Winkel φ_1. Es existiert aber an je zwei affinen Punkten P und P_1 ein Paar entsprechender rechtwinkliger Strahlen.

δ) Das Verhältnis je zweier Strecken auf der nämlichen oder auf parallelen Geraden ist dem ihrer Bilder gleich.

Die unter γ) angeführten entsprechenden rechten Winkel erkennt man aus folgender Konstruktion. Man lege durch die Mitte der Strecke PP_1 eine zu ihr rechtwinklige Ebene A und um deren Achsenschnittpunkt $M = a \times \mathsf{A}$ eine Kugelfläche, welche P und also auch P_1 enthält. Schneidet diese die Achse a in X und Y, so sind $\angle XPY$ und $\angle XP_1Y$ einander entsprechende und, weil sie über dem Durchmesser XY stehen, zugleich rechte Winkel.

Liegen die in δ) erwähnten Strecken auf der nämlichen Geraden g, also ihre Bilder auf der affinen Geraden g_1, so werden die gegebenen und ihre Bildstrecken auf den Schenkeln des $\angle gg_1$ durch Parallelen ausgeschnitten, woraus der eine Teil des Satzes unmittelbar folgt. Der allgemeinere Fall zweier paralleler Strecken AB und CD wird auf den vorigen zurückgeführt, indem man (Fig. 6) AB um die Strecke $BE = CD$ verlängert. Dem Parallelogramm $BCDE$ entspricht nach β) ein affines Parallelogramm $B_1C_1D_1E_1$, wobei $B_1E_1 = C_1D_1$ die Verlängerung von A_1B_1 bildet.

Umgekehrt sind zwei ebene Figuren affin und affin gelegen, wenn ihre Punkte und Geraden einander so entsprechen, daß die unter α), β) und δ) aufgeführten Eigenschaften erfüllt sind. Aus α) und β) folgt δ), ebenso kann man aus α) und δ) die Eigenschaft β) folgern. Denn sind A, B, C (siehe Fig. 5) irgend drei Punkte der einen, A_1, B_1, C_1 die entsprechenden Punkte der anderen Figur, so schneiden nach α) die Geraden BC, CA, AB ihre Bilder in Punkten P, Q, R der Schnittlinie $a = ABC \times A_1B_1C_1$. Da ferner nach δ): $RA : AB = RA_1 : A_1B_1$ sein soll, so ist $AA_1 \parallel BB_1$ usf.

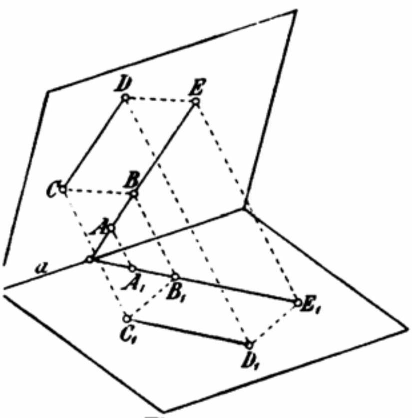

Fig. 6.

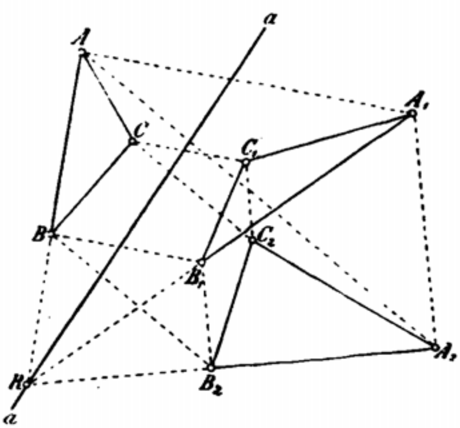

Fig. 7.

8. Es seien $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ drei Figuren, deren Ebenen E, E_1 und E_2 sich in einer Geraden a schneiden; ferner gehe $\mathfrak{F}_2$ aus $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ aus $\mathfrak{F}_2$ durch eine Parallelprojektion hervor. Dann ist auch $\mathfrak{F}_1$ eine Parallelprojektion von $\mathfrak{F}$, d. h. es besteht der Satz: **Sind in bezug auf eine und dieselbe Achse zwei ebene Figuren zu einer dritten affin und affin gelegen, so sind sie es auch zueinander.** Es genügt, den Beweis des Satzes für irgend zwei Punkte und ihre beiderlei Bilder zu führen. Den Punkten A, B in $\mathfrak{F}$ mögen A_2, B_2 in $\mathfrak{F}_2$ und diesen A_1, B_1 in $\mathfrak{F}_1$ entsprechen (Fig. 7). Die Geraden AB, A_1B_1, A_2B_2 schneiden sich in einem Punkte R auf a. Da aber zugleich $AA_2 \parallel BB_2$ und $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ ist, so sind die Dreiecke AA_1A_2 und BB_1B_2 ähnlich und ähnlich gelegen (aus dem Ähnlichkeitszentrum R), folglich ist $AA_1 \parallel BB_1$ usf.

9. Wenn man die bisherigen Annahmen spezialisiert, indem man die Ebene E_1 als mit E zusammenfallend betrachtet, so gelangt man zu einer indirekten Definition affiner und affin gelegener Figuren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ in einer Ebene, nämlich durch Vermittelung zweier nacheinander angewandter beliebiger Parallelprojektionen, welche zuerst $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{F}_2$ und dann $\mathfrak{F}_2$ in $\mathfrak{F}_1$ überführen. In der Folge wird die direkte Abhängigkeit zwischen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ ohne Zuhilfenahme räumlicher Konstruktion untersucht. Der obige Satz läßt aber bereits erkennen, daß die Bedeutung der Affinitätsachse a als der Linie sich selbst entsprechender Punkte erhalten bleibt, sowie daß die Strahlen $A A_1$, $B B_1$, usw., die jetzt gleichfalls der Ebene E angehören, parallel sind; dagegen kann das Bild eines Punktes nicht mehr als Spur seines projizierenden Strahles in der Bildebene erklärt werden. Die Parallelprojektion in der Ebene bedarf also besonderer Erklärung, da die im Raume anwendbaren Operationen beim Übergang zu Gebilden einer Ebene aufhören einen bestimmten Sinn zu haben.

10. Wird eine ebene Figur um eine in ihrer Ebene enthaltene Achse gedreht, so beschreiben die Punkte der Figur Kreisbogen, deren Sehnen parallel sind. Mithin folgt aus obigem Satze als Korollar: Zwei affine und affin gelegene ebene Figuren bleiben in affiner Lage, wenn eine von ihnen um die Affinitätsachse beliebig gedreht wird. Insbesondere kann hiernach für die betrachteten Figuren auf doppelte Art die affine Lage in einer Ebene herbeigeführt werden, indem man die Bildebene durch Drehung nach der einen oder der anderen Seite mit der Originalebene zur Deckung bringt. Dreht man umgekehrt von zwei in einer Ebene affin gelegenen Figuren die eine beliebig um die Achse aus der Ebene heraus, so wird sie in der neuen Lage eine Parallelprojektion der anderen darstellen.

Affine und affin gelegene Figuren einer Ebene.

11. Zufolge der im vorigen Abschnitt enthaltenen indirekten Definition müssen zwei Figuren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ derselben Ebene, wenn zwischen ihnen Affinität bei affiner Lage bestehen soll, folgende Eigenschaften aufweisen:

α) Jeder Punkt der Affinitätsachse entspricht sich selbst.

β) Den Punkten einer Geraden entsprechen wieder Punkte einer Geraden.

γ) Die Verbindungslinien entsprechender Punkte sind parallel.

Die hier aufgeführten Eigenschaften genügen, um zu einer Figur ihr affines und affin gelegenes Bild zu konstruieren, wenn die Affinitätsachse a und ein Paar entsprechender Punkte P und P_1 gegeben sind. In der Tat kann zu jedem gegebenen Punkte Q der entsprechende Q_1 bestimmt werden, indem man (Fig. 8) $S = PQ \times a$ sucht und SP_1 mit der durch Q gelegten Parallelen zu PP_1 in Q_1 schneidet. Das Bild einer Geraden g ergibt sich, indem man zu einem ihrer Punkte Q den Bildpunkt Q_1 zeichnet und diesen mit $T = g \times a$ verbindet.

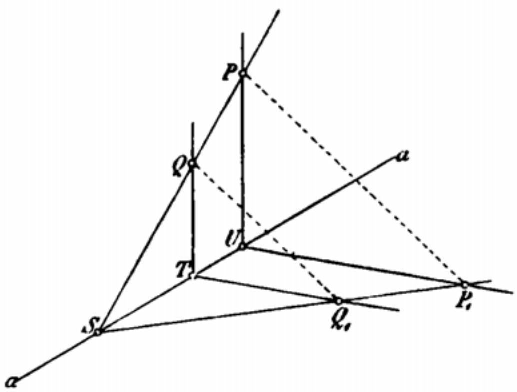

Fig. 8.

Die Figur läßt auch erkennen, daß parallelen Geraden PU und QT der einen Figur parallele Bilder P_1U und Q_1T in der anderen entsprechen. Um das Bild g_1 von $g = QT$ zu erhalten, kann man deshalb $PU \parallel g$ zeichnen, dann P_1U und $g_1 \parallel P_1U$ durch den Punkt $g \times a = T$ ziehen.

Finden die unter α), β) und γ) aufgezählten Beziehungen zwischen zwei Figuren $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ statt, so wird $\mathfrak{F}_1$ durch eine beliebige Drehung um die Affinitätsachse a in eine räumliche Lage $\mathfrak{F}_2$ übergeführt, bei welcher sie eine Parallelprojektion von $\mathfrak{F}$ darstellt. Sind A, B zwei beliebige Punkte von $\mathfrak{F}$, A_1, B_1 resp. A_2, B_2 die entsprechenden Punkte von $\mathfrak{F}_1$ resp. $\mathfrak{F}_2$, so ist nur zu zeigen, daß $BB_2 \parallel AA_2$ ist. Aber es ist einerseits $AA_1 \parallel BB_1$ und anderseits $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, als Sehnen der von A_1 und B_1 bei der Drehung beschriebenen Bogen. Es schneiden sich ferner AB und A_1B_1 in einem Punkt R der Achse a, durch diesen geht dann auch A_2B_2; denn A_1B_1 und A_2B_2 liegen in einer Ebene, da $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ ist. Somit ist auch $AA_2 \parallel BB_2$, da sie aus der Ebene RAA_2 durch die parallelen Ebenen AA_1A_2 und BB_1B_2 ausgeschnitten werden.

Eine Folge hiervon sind die Sätze:

δ) Parallelen Geraden entsprechen in der affinen Figur wieder parallele Gerade.

ε) Parallele Strecken verhalten sich wie ihre affinen Bilder.

12. Die Konstruktion der entsprechenden rechten Winkel an zwei affinen Punkten P und P_1 erfolgt (Fig. 9) mit Hilfe eines Kreises durch P und P_1, dessen Zentrum M der Affinitätsachse a angehört. Schneidet dieser a in den Punkten X und Y, so sind $\angle XPY$ und $\angle XP_1Y$ die gesuchten rechten Winkel. Ist P_1' der in bezug auf a zu P_1 symmetrische Punkt, so ist $\angle P_1PY = \angle P_1'PY$, weil die Bogen P_1Y und $P_1'Y$ gleich sind; der Strahl PY halbiert den $\angle P_1PP_1'$, der Strahl PX den Nebenwinkel. Diese Bemerkung kann zur Konstruktion der Rechtwinkelstrahlen dienen, falls etwa M außerhalb der Zeichnungsfläche liegt. — Symmetrisch zu PX (oder PY) gelegenen Punkten, z. B. Q und R, entsprechen symmetrisch zu P_1X (oder P_1Y) gelegene Punkte Q_1 und R_1.

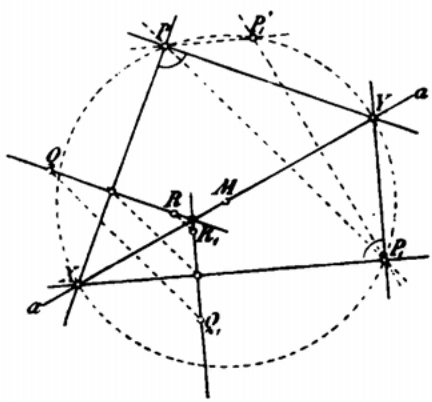

Fig. 9.

13. Es gibt auch an P und P_1 entsprechende, gleiche Winkel von jeder gegebenen Größe φ, die man in folgender Weise konstruiert. Wir gehen von dem Fall aus, wo P und P_1 auf derselben Seite der Affinitätsachse liegen (Fig. 10). Sei Q die Mitte von PP_1 und $QR \perp PP_1$, während R auf a liegt. Dann ist ein Kreis k durch P und P_1, also mit dem Zentrum M auf QR, so zu bestimmen, daß $\angle XPY = \angle XP_1Y = \varphi$ und somit $\angle MXY = R - \varphi$ wird ($\angle XMY = 2\varphi$), wenn X und Y die Achsenschnittpunkte von k sind. Zieht man aus einem beliebig auf QR angenommenen Punkte M' den Strahl $M'X'$ unter dem Winkel $R - \varphi$ gegen a und beschreibt um M' einen Kreis k' durch X',

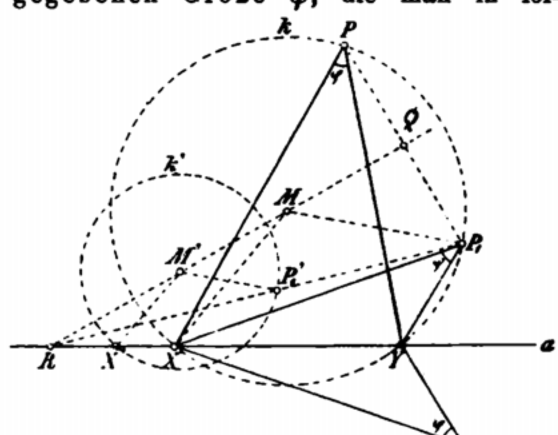

Fig. 10.

so ist R das Ähnlichkeitszentrum für die Kreise k und k'. Man findet daher M, indem man RP_1 mit k' in P_1' schneidet und $P_1M \parallel P_1'M'$ zieht. Da RP_1 den Kreis k' in zwei Punkten schneidet, so gibt es zwei Lösungen; in der Figur ist jedoch nur eine gezeichnet. Werden die gegebenen affinen Punkte durch die Achse voneinander getrennt, wie P und P_2, so betrachte man statt des letzteren den symmetrisch zur Achse gelegenen Punkt P_1; dann ist $\angle XP_2Y = \angle XP_1Y$.

14. Sind g und g_1 zwei bestimmte affine Gerade, so existiert ein Wert λ der Art, daß je zwei auf ihnen liegende affine Strecken PQ und P_1Q_1 in dem konstanten Verhältnis

$$\lambda = PQ : P_1Q_1$$

nach 11, *s*) zueinander stehen, das sich auch nicht ändert, wenn g und damit zugleich g_1 eine Parallelverschiebung erfährt. Zu jeder gegebenen Richtung und der affinen gehört also ein festes Streckenverhältnis λ. Dagegen entsprechen verschiedenen Richtungen verschiedene Werte λ; dabei sind die Richtungen, welche durch die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel gegeben sind, vor allen übrigen ausgezeichnet. Dreht sich eine Gerade g (mithin zugleich die affine g_1) um einen ihrer Punkte, so nimmt das ihrer Richtung zugehörige Streckenverhältnis λ in jedem der von den affinen Rechtwinkelstrahlen gebildeten Quadranten entweder beständig zu oder beständig ab, erreicht für symmetrische Lagen zu jenen Strahlen gleiche Werte und auf denselben ein Maximum resp. Minimum.

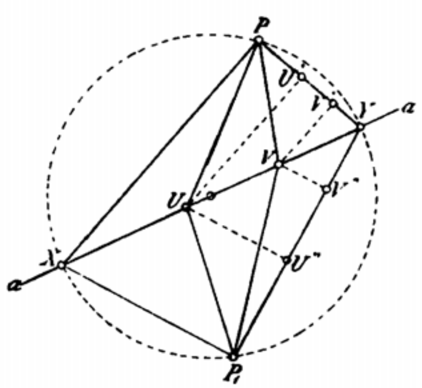

Fig. 11.

Es seien, um dies zu beweisen, $\angle XPY$ und $\angle XP_1Y$ affine rechte Winkel (Fig. 11), ferner U und V irgend zwei aufeinander folgende Lagen eines von X nach Y auf der Affinitätsachse fortschreitenden Punktes. Wir wählen nun die Strecke XY als Maßeinheit, setzen $XU = k$, $XV = l$, $UY = m$, $VY = n$ und bezeichnen mit x, u, v, y resp. x_1, u_1, v_1, y_1 die von Punkten X, U, V, Y, einerseits und von P resp. P_1 anderseits begrenzten affinen Strecken. Sind nun PUU', PVV', P_1UU'', P_1VV'' rechtwinklige Dreiecke, so folgen die Relationen:

$$u^2 = m^2 x^2 + k^2 y^2, \qquad v^2 = n^2 x^2 + l^2 y^2,$$
$$u_1^2 = m^2 x_1^2 + k^2 y_1^2, \qquad v_1^2 = n^2 x_1^2 + l^2 y_1^2;$$

denn es ist: $UY:XY = m$, $U'P:Y'P = UX:YX = k$, usf.

Es ist jetzt zu zeigen, daß unter der Voraussetzung:

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)^2 > \left(\frac{y}{y_1}\right)^2$$

die Beziehung:

$$\left(\frac{u}{u_1}\right)^2 > \left(\frac{v}{v_1}\right)^2$$

besteht. Letzterer geben wir die neue Form:

$$(m^2x^2 + k^2y^2)(n^2x_1^2 + l^2y_1^2) - (n^2x^2 + l^2y^2)(m^2x_1^2 + k^2y_1^2) > 0,$$

und diese reduziert sich auf die Ungleichung:

$$(l^2m^2 - k^2n^2)(x^2y_1^2 - x_1^2y^2) > 0,$$

welche mit der Voraussetzung zusammenfällt, da $(l^2m^2 - k^2n^2)$ positiv ist.

Die Ellipse als affine Kurve zum Kreise und ihre Konstruktion.

15. Jede zu einem Kreise affine und affin gelegene Kurve heißt Ellipse; so ist jede Parallelprojektion des Kreises eine Ellipse. Dem Mittelpunkt M des Kreises k (Fig. 12) entspricht der Mittelpunkt M_1 der zum Kreise affinen Ellipse k_1. Jedem Kreisdurchmesser entspricht ein Durchmesser der Ellipse, der von ihrem Mittelpunkt M_1 halbiert wird. Zwei schiefwinklige Durchmesser P_1P_1', Q_1Q_1' der Ellipse heißen konjugiert, wenn sie zu zwei rechtwinkligen Kreisdurchmessern PP', QQ' affin sind. Von zwei konjugierten Durchmessern einer Ellipse halbiert jeder die

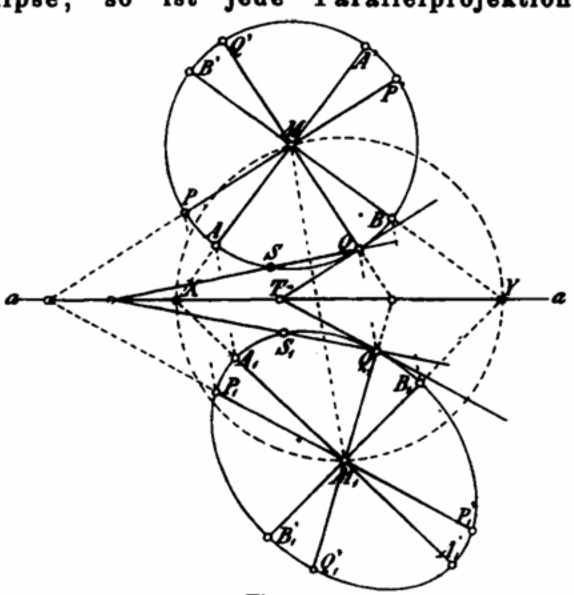

Fig. 12.

zum andern parallelen Sehnen und geht durch die Berührungspunkte der zum andern parallelen Tangenten. Denn das gleiche ist bei den rechtwinkligen Durchmessern des affinen Kreises der Fall.

Dabei ist allerdings die zu einer Kreistangente affine Gerade als Ellipsentangente bezeichnet. Die Berechtigung hierzu erhellt aus der folgenden Überlegung. Wie jede Gerade g mit dem Kreise k zwei getrennte, zwei vereinte oder keinen Schnittpunkt gemein hat, so hat auch jede Gerade g_1 mit der Ellipse k_1 wegen der Affinität zwei getrennte, zwei vereinte, oder keinen Schnittpunkt gemein. Eine Kreistangente QT hat mit seiner Peripherie nur einen Punkt gemein und liegt ganz außerhalb derselben; das gleiche tritt für die affine Gerade Q_1T' in bezug auf die Ellipse ein, und deshalb legen wir ihr die Bezeichnung einer Ellipsentangente bei (zum Unterschiede von den Sehnen). Man kann auch die Tangenten in Q resp. Q_1 aus den Sehnen QS resp. Q_1S_1 durch Drehung um Q resp. Q_1 hervorgehen lassen, wobei S_1 in demselben Moment mit Q_1 zusammenfällt, wo dies S mit Q tut. Hier geht der Berührungspunkt der Tangente aus der Vereinigung zweier Schnittpunkte hervor.

Die zueinander rechtwinkligen Durchmesser A_1A_1' und B_1B_1' der Ellipse, welche gleichfalls rechtwinkligen Durchmessern AA' und BB' des Kreises entsprechen, heißen **Achsen**, ihre Endpunkte **Scheitel**. Die Achsen teilen die Ellipse in symmetrische Quadranten, denn sie halbieren die zu ihnen senkrechten Sehnen. Durchläuft ein Punkt P_1 die Ellipse, so nimmt die Strecke M_1P_1 in jedem Quadranten entweder beständig zu, oder beständig ab und erreicht auf den Achsen ein Maximum oder Minimum (nach 14).

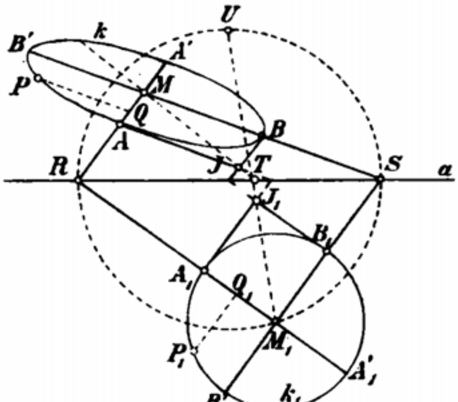

Fig. 13.

Aus der gegebenen Definition ergeben sich Konstruktionen für Punkte, Tangenten, Achsen und konjugierte Durchmesser der Ellipse.

16. Aus einem Kreise lassen sich durch Affinität (oder Parallelprojektion) unendlich viele Ellipsen ableiten, indem man noch die Affinitätsachse und den Mittelpunkt der Ellipse beliebig wählen kann. Umgekehrt kann jede Ellipse auf unendlich viele Weisen als affines Bild eines Kreises erhalten werden, indem auch hier die Wahl der Affinitätsachse noch völlig frei steht. Hierüber belehrt uns der Satz: Eine Ellipse k ist durch zwei konjugierte Durchmesser AA' und BB' völlig bestimmt. Es sei P ein beliebiger Punkt der Ellipse k, Q ein Punkt auf AA' und $PQ \parallel BB'$; ferner setzen wir zur Abkürzung $MA = a$, $MB = b$, $MQ = x$ und $QP = y$ (Fig. 13). Ein zur Ellipse affiner und affin gelegener Kreis sei k_1; die zu A, A', B, B', M, P, Q affinen Punkte seien A_1, A_1', B_1, B_1', M_1, P_1, Q_1, während wir $M_1A_1 = M_1B_1 = r_1$, $M_1Q_1 = x_1$ und $Q_1P_1 = y_1$ setzen. Mag nun die affine Beziehung zwischen Ellipse und Kreis beschaffen sein, wie sie wolle, immer gelten die Relationen:

$$\frac{x}{a} = \frac{x_1}{r_1}, \quad \frac{y}{b} = \frac{y_1}{r_1}.$$

Nun besteht für jeden Punkt des Kreises die Gleichung; $x_1^2 + y_1^2 = r_1^2$, also besteht für jeden Punkt der Ellipse die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dabei bedeuten x und y die Längen der beiden zu den konjugierten Durchmessern parallelen Strecken, die einerseits von dem beliebigen Ellipsenpunkt und andererseits von diesen Durchmessern begrenzt werden. Durch Länge und Lage der konjugierten Durchmesser AA' und BB' ist hiernach die Gesamtheit der Ellipsenpunkte bestimmt.

17. Wir wollen jetzt zu der Ellipse k mit den konjugierten Durchmessern AA' und BB' den affin gelegenen Kreis k_1 konstruieren, wenn die Affinitätsachse a beliebig gegeben ist. Die Tangenten in A und B mögen sich in J schneiden ($JA \parallel BB'$, $JB \parallel AA'$), dann muß dem Parallelogramm $MAJB$ in der affinen Figur ein Quadrat $M_1A_1J_1B_1$ entsprechen (Fig. 13). Schneiden also die Geraden MA, MB und MJ die Affinitätsachse a in R, S und T, so ist M_1 derart zu bestimmen, daß $\angle RM_1S = 90^\circ$ und $\angle RM_1T = \angle TM_1S = 45^\circ$ wird. Zu dem Ende zeichne man über RS als Durchmesser einen Hilfskreis und wähle auf ihm den Punkt U in der Mitte des Halbkreisbogens RS; dann schneidet UT den Hilfskreis in dem gesuchten Punkt M_1 ($\angle RM_1T = \angle TM_1S = 45^\circ$ als Peripheriewinkel über den Viertelkreisbogen RU und US). In der Tat entspricht jetzt dem Parallelogramm $MAJB$ in der affinen Figur ein Quadrat $M_1A_1J_1B_1$, wobei M_1 der zu M affine Punkt ist, und zu dem Kreise k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius $M_1 A_1 = M_1 B_1$ ist die Ellipse k mit den konjugierten Halbmessern MA und MB affin ($JA \times J_1 A_1$ und $JB \times J_1 B_1$ auf a).

18. Will man eine Ellipse k aus zwei konjugierten Durchmessern konstruieren, so kann man einen zu ihr affinen und affin gelegenen Kreis k_1 zeichnen und dann rückwärts zu einzelnen Punkten des Kreises die affinen Punkte der Ellipse suchen. Wie wir soeben sahen, ist dabei die Wahl der Affinitätsachse a noch freigestellt. Um die Konstruktion möglichst einfach zu gestalten, empfehlen sich besonders die folgenden beiden Verfahren.

Erstes Verfahren. Es seien (Fig. 14) O der Mittelpunkt, AA' und BB' die gegebenen konjugierten Durchmesser einer Ellipse k. Der über AA' als Durchmesser beschriebene Kreis k_1 ist dann zu k affin und AA' ist die Affinitätsachse. Dem Punkt B von k entspricht der affine Punkt B_1 von k_1, wo $OB_1 \perp OA$ ist, und BB_1 ist ein Affinitätsstrahl. — Zu einem Punkte P_1 von k_1 ergibt sich der affine Ellipsenpunkt P, indem man $P_1 Q \perp AA'$ zieht und die Parallele zu OB aus Q mit der Parallelen zu BB_1 aus P_1 in P schneidet. — Trifft die Kreistangente in P_1 die Affinitätsachse in T, so ist PT die Ellipsentangente in P. — Sollen aus einem Punkte R die Tangenten an die Ellipse gezogen werden, so suche man den affinen Punkt R_1 und die Berührungspunkte X_1 und Y_1 der von ihm an den Kreis k_1 gelegten Tangenten; dann sind die zu ihnen affinen Punkte X und Y die Berührungspunkte der gesuchten Ellipsentangenten. — Die Richtungen der Achsen der Ellipse und der zugehörigen rechtwinkligen Durchmesser des Kreises ergeben sich aus der Konstruktion entsprechender rechter Winkel an den affinen Punkten B und B_1, die Scheitel der Ellipse aus den Endpunkten der genannten Kreisdurchmesser.

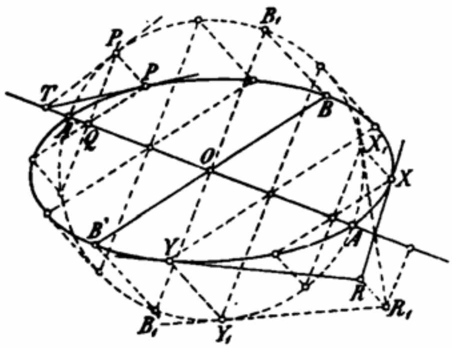

Fig. 14.

19. Zweites Verfahren. Man ziehe durch den Endpunkt B des einen Durchmessers eine Parallele a zum konjugierten AA', die zugleich Ellipsentangente sein wird (Fig. 15). Ein Kreis k_1 vom Radius $O_1 A_1 = OA$, welcher a ebenfalls in B berührt, ist dann zur Ellipse k affin gelegen. Dabei ist a die Affinitätsachse, O und O_1

sind affine Punkte, und den beiden zu a parallelen und senkrechten Kreisdurchmessern A_1A_1' und BB_1' entsprechen die konjugierten Durchmesser AA' und BB' der gesuchten Ellipse. Die Konstruktion einzelner Ellipsenpunkte ist analog dem Vorigen. Die Achsen findet man hier direkt aus der Bestimmung der entsprechenden rechten Winkel $\angle XOY$ und $\angle XO_1Y$ an den Mittelpunkten, hierauf aus den Endpunkten C_1 und D_1 der rechtwinkligen Kreisdurchmesser die Ellipsenscheitel C und D, usf.

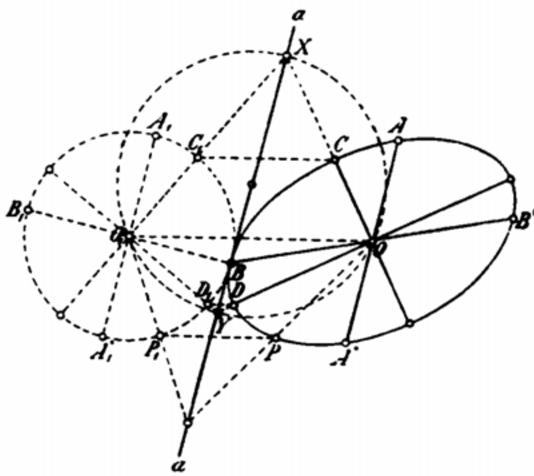

Fig. 15.

20. Konstruktion der Ellipse aus den Achsen. Es seien $OA = a$ und $OB = b$ (Fig. 16a) die gegebenen Halbachsen einer Ellipse k. Man schlage um O zwei Kreise k_1 und k_2 resp. vom Radius a und b. Jeder von ihnen kann als zur gesuchten Ellipse affin gelegen gelten. Bei der Affinität zwischen k_1 und k ist OA die Achse und B_1 und B sind entsprechende Punkte ($B_1B \perp OA$); bei der Affinität zwischen k_2 und k ist OB die Achse und A_2 und A sind entsprechende Punkte. — Zu einem Punkte P_1 auf k_1 ergibt sich der affine Ellipsenpunkt P auf k, indem man $P_1S \perp OA$ zieht, mittels der Beziehung

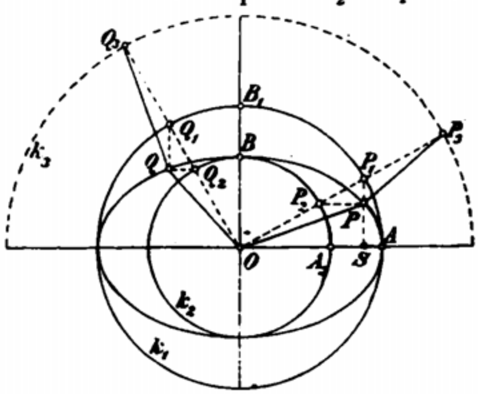

Fig. 16a.

$$PS : P_1S = BO : B_1O = P_2O : P_1O;$$

man schneide also P_1O mit k_2 in P_2 und ziehe $P_2P \parallel OA$. P ist zugleich der affine Punkt zu P_2 auf k_2. Zwei rechtwinklige Kreisradien OP_1 und OQ_1 liefern zwei konjugierte Halbmesser OP und

OQ der Ellipse. Die Tangenten in P und Q sind zu OQ und OP resp. parallel.

Zieht man um O einen Kreis k_3 mit dem Radius $(a+b)$ und schneidet dieser die Strahlen OP_1 und OQ_1 in P_3 und Q_3 resp., so sind PP_3 und QQ_3 **Ellipsennormalen**, d. h. sie stehen in P und Q auf den bezüglichen Tangenten senkrecht. Denn es ist $\triangle P_1PP_2 \cong \triangle Q_2QQ_1$, $(P_1P_2 = Q_1Q_2$, $\angle QQ_1Q_2 = \angle PP_2P_1$, usw.); ferner ist $\triangle Q_3QQ_1 \cong \triangle OPP_2$ $(Q_3Q_1 = OP_2$, $QQ_1 = PP_2$, $\angle Q_3Q_1Q = \angle OP_2P)$. Demnach ist $Q_3Q = OP$ und $Q_3Q \perp OP$ (da $Q_3O \perp OP_1$ ist). **Jeder Strahl durch O liefert einen Punkt P der Ellipse als Schnittpunkt zweier Geraden, von denen die erste durch P_2 parallel zu OA und die zweite durch P_1 parallel zu OB gezogen ist. Die Gerade PP_3 ist eine Normale der Ellipse und gleich dem zu OP konjugierten Halbmesser OQ. Die Punkte P_2, P_1 und P_3 auf dem durch O gezogenen Strahl haben die bezüglichen Abstände b, a und** $(a+b)$ von O.

21. Das eingeschlagene Verfahren ergibt auch die Lösung der Aufgabe: **Zu einem nur der Richtung nach gegebenen Halbmesser der Ellipse den Endpunkt und den konjugierten Halbmesser zu finden.** Ein in der gegebenen Richtung aus O gezogener Strahl schneide die Kreise k_1 und k_2 resp. in den Punkten U und V (Fig. 16 *b*); aus diesen konstruiere man wie vorher den Punkt W der Ellipse. Zieht man ferner durch U und V Parallelen zu OA und OB, die sich in X schneiden mögen, und legt man die Affinität zwischen k_1 und der Ellipse k zugrunde, so entspricht dem Punkt U der Punkt W, der Geraden UX die Gerade WV, dem Punkte X der Punkt V und folglich dem Strahl OX der Strahl OV. Insbesondere entspricht dem Punkte P_1 von k_1 der Punkt P von k $(P_1P \parallel OB$, $P_2P \parallel OA)$, und der zu OX rechtwinklige Strahl OQ_2Q_1 liefert den Endpunkt Q des zu OP konjugierten Halbmessers OQ.

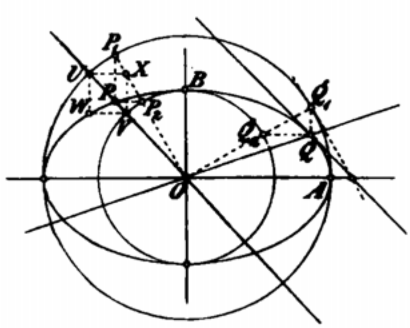

Fig. 16 *b*.

22. Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus konjugierten Durchmessern. Irgend zwei konjugierte Halbmesser OC und OD einer Ellipse (Fig. 17a) werden aus rechtwinkligen Halbmessern OC_1, OD_1 resp. OC_2, OD_2 des um- und eingeschriebenen Kreises (vom Radius a und b) erhalten, indem man CC_1 und DD_1 parallel zur Halbachse OB und CC_2 und DD_2 parallel zur Halbachse OA zieht. Wird das rechtwinklige Dreieck DD_1D_2 um das Zentrum O durch den $\angle D_1OC_1 = R$ gedreht, so erhält es die Lage EC_1C_2, in der seine Katheten wiederum den Achsen parallel liegen. Nun ist $M = EC \times C_1C_2$ der Mittelpunkt des Rechteckes CC_1EC_2, also $MC = MC_1 = MC_2 = ME$. Deshalb schneidet EC die Achsen OA und OB resp. in A' und B', so daß: $MO = MA' = MB'$ wird, d. h. ein um M mit dem Radius MO beschriebener Kreis schneidet die Gerade CE in Punkten A' und B' der Achsen. Überdies folgt.

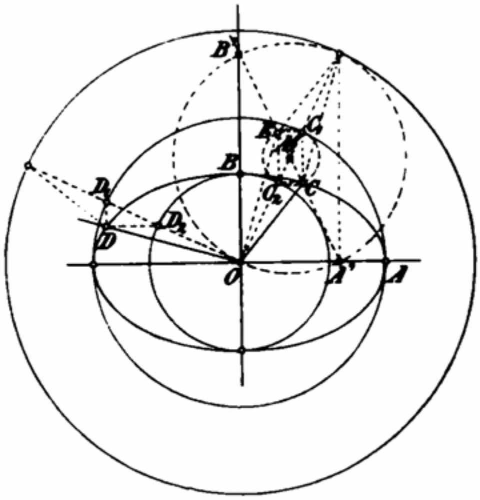

Fig. 17a.

$$OC_1 = EA' = CB' = a,$$
$$OC_2 = CA' = EB' = b.$$

Sind umgekehrt OC und OD als konjugierte Halbmesser gegeben, so ergibt sich folgende **einfache Konstruktion der Achsen.** Man ziehe $OE \perp$ und $= OD$, halbiere EC in M und schneide CE mit einem Kreise vom Radius MO in A' und B'. Dann sind OA' und OB' die Achsen der Lage nach und $A'E = B'C$ resp. $A'C = B'E$ die bezüglichen Längen der Halbachsen.

23. Läßt man C die Ellipse durchlaufen, so geschieht dies auch mit dem Endpunkt D des zu OC konjugierten Halbmessers OD. Man erhält dann durch die vorige Konstruktion andere und andere Punkte A' und B' auf den Achsen; immer aber ist $B'C = a$, $A'C = b$, also die Strecke $A'B'$ von der konstanten Länge $(a + b)$. Hieraus folgt der Satz: **Gleitet eine Strecke $A'B'$ mit ihren Endpunkten auf zwei rechtwinkligen Geraden, so beschreibt ein Punkt C, der sie in die Teile a und b zerlegt, eine Ellipse mit den Halbachsen a und b.** Dieser Satz kann bequem zur Konstruktion von Ellipsenpunkten verwendet werden.

Rollt (Fig. 17b) der Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius MJ auf der Innenseite des Kreises mit dem Mittelpunkt O und dem Radius OJ ohne Gleiten, so bewegt sich jeder Punkt des kleineren Kreises auf einem Durchmesser des größeren. Ist nämlich K ein auf dem kleineren Kreise liegender fest mit ihm verbundener Punkt und gelangt er beim Rollen in die Lage K_1, so müssen die Kreisbogen JK und JK_1 gleich sein und daher auch $\angle JOK = \angle JOK_1$, d. h. K und K_1 liegen auf einem Strahl durch O. Gelangt in gleicher Weise der Punkt A' des kleineren Kreises beim Rollen in die Lage A_1', so sind die Bogen KA' und K_1A_1' einander gleich, daher auch $\angle KOA' = \angle K_1OA_1'$, d. h. A' und A_1' liegen auf einem Strahl durch O. Ebenso liegen B' und B_1' auf einem Strahl durch O. Daraus geht hervor, daß beim Rollen des kleineren Kreises auf dem größeren die Strecke $A'B'$ mit ihren Endpunkten auf den festen Geraden OA' und OB' gleitet. Beim Rollen beschreibt somit jeder in der Ebene des kleineren Kreises liegender und mit ihm fest verbundener Punkt P eine Ellipse. Liegt P auf dem Durchmesser $A'B'$, so fallen die Achsen der Ellipse mit OA' und OB' zusammen und ihre Halbachsen sind gleich PA' resp. PB'.

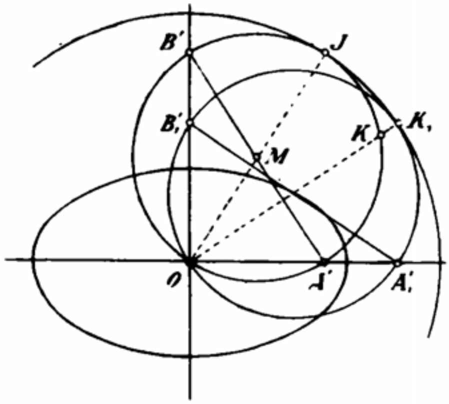

Fig. 17b.

Zieht man in Fig. 17a durch C eine Parallele zu OC_1 und schneidet diese die Achsen OA und OB in A'' und B'', so ist $OA'' = EC_1$, $OB'' = EC_2$, $CA'' = b$, $CB'' = a$, $B''A'' = C_2C_1 = (a - b)$. Hieraus folgt der weitere Satz: **Gleitet eine Strecke $A''B''$ mit ihren Endpunkten auf zwei rechtwinkligen Geraden, so beschreibt ein Punkt C auf ihrer Verlängerung, dessen Abstände von ihren Endpunkten gleich a und b sind, eine Ellipse mit den Halbachsen a und b.** Jede Ellipse kann also in doppelter Weise durch Bewegung erzeugt werden, indem man entweder eine Strecke von der Länge $(a + b)$ oder eine von der Länge $(a - b)$ mit ihren Endpunkten auf den Achsen der Ellipse gleiten läßt. Im ersten Falle ist es ein Punkt der Strecke selbst, im letzteren ein Punkt auf ihrer Verlängerung, der die Ellipse erzeugt.

24. Konstruktion der Ellipse k aus fünf gegebenen Punkten A, B, C, D, E derselben. Wählen wir die Gerade $AB = a$ zur Affinitätsachse, so muß nach 17 ein zur Ellipse k affiner Kreis k_1 existieren, falls es möglich sein soll, durch die fünf beliebig gegebenen Punkte eine Ellipse zu legen. Bezeichnen wir nun (Fig. 18) mit C_1, D_1, E_1 die affinen Punkte zu C, D, E, so

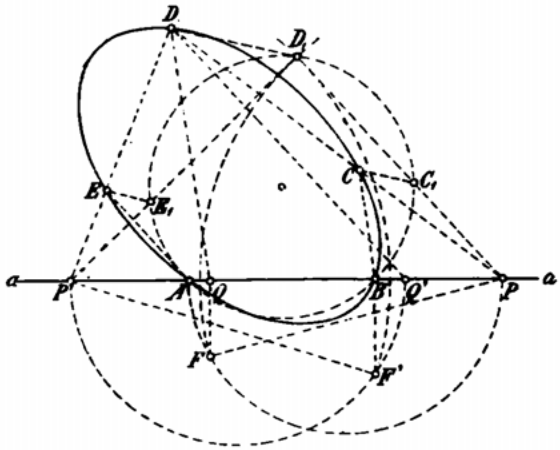

Fig. 18.

müssen die Punkte $P' = DE \times D_1E_1$ und $P = DC \times D_1C_1$ auf a liegen, ferner $DD_1 \| EE_1 \| CC_1$ sein, und endlich müssen die fünf Punkte A, B, C_1, D_1, E_1 einem Kreise k_1 angehören. Das liefert die Relationen:

$$P'D : P'E = P'D_1 : P'E_1 \quad \text{und} \quad P'A \,.\, P'B = P'D_1 \,.\, P'E_1,$$

ferner:

$$PD : PC = PD_1 : PC_1 \quad \text{und} \quad PA \,.\, PB = PD_1 \,.\, PC_1.$$

Aus den ersteren folgt:

$$(P'D_1)^2 = \frac{P'A \,.\, P'B \,.\, P'D}{P'E}$$

und aus den letzteren:

$$(PD_1)^2 = \frac{PA \cdot PB \cdot PD}{PC}.$$

Da auf der rechten Seite dieser Gleichungen nur bekannte Punkte vorkommen, so lassen sich die Werte $P'D_1$ und PD_1 wie folgt konstruieren. Man bestimme Q' auf a so, daß $DQ' \| EA$ wird, dann ist: $P'Q' = P'A \cdot P'D : P'E$. Damit geht die erste Gleichung in $(P'D_1)^2 = P'Q' \cdot P'B$ über, d. h. $P'D_1$ ist gleich der Kathete $P'F'$ eines rechtwinkligen Dreieckes mit der Hypotenuse $P'Q'$, dessen Höhe in B errichtet ist. Ebenso bestimme man Q auf a so, daß

$DQ \parallel CB$ wird; dann ist PD_1 gleich der Kathete PF eines rechtwinkligen Dreieckes mit der Hypotenuse PA, dessen Höhe in Q errichtet ist. Damit ist aber D_1 als Schnittpunkt zweier Kreise gefunden. Legt man jetzt einen Kreis k_1 durch A, B und D_1, so schneidet er D_1P' und D_1P noch in den Punkten E_1 und C_1, und es ist gemäß unserer Konstruktion $EE_1 \parallel DD_1 \parallel CC_1$. Der Kreis k_1 ist demnach wirklich zu der gesuchten Ellipse affin, und man konstruiert ihre Punkte vermöge dieser Affinität, wobei a die Achse und D und D_1 entsprechende Punkte sind.

Man erkennt aus der Figur, daß nicht immer fünf willkürlich gegebene Punkte auf einer Ellipse liegen, da die Kreise mit den Mittelpunkten P' resp. P und den Radien $P'F'$ resp. PF sich nicht immer schneiden. Die vollständige Erklärung hierfür wird sich erst an späterer Stelle im fünften Kapitel ergeben.

ZWEITES KAPITEL.

Darstellung der Punkte, Geraden und Ebenen in Grund- und Aufriß. Bestimmung der einfachen Beziehungen dieser Grundgebilde zueinander.

Das Grund- und Aufrißverfahren.

25. Werden durch alle Punkte einer räumlichen Figur senkrecht zu einer gegebenen Ebene Π_1 projizierende Strahlen gezogen, so erzeugen deren Schnitt- oder Spurpunkte in Π_1 ein ebenes Bild der Raumfigur, welches als eine orthogonale Projektion bezeichnet wird. Jeder Punkt P des Raumes hat einen bestimmten Punkt P' in Π_1 zu seiner Orthogonalprojektion; dagegen bildet der Punkt P' gleichzeitig die Projektion aller Punkte der in ihm auf Π_1 errichteten Normalen. Ein Raumpunkt P ist somit durch seine Projektion P' noch nicht bestimmt, vielmehr gehört hierzu ein weiteres Bestimmungsstück, etwa die Strecke PP', d. h. der senkrechte Abstand des Punktes P von der Projektionsebene Π_1. Dabei ist diesem Abstand zur Unterscheidung der beiden Richtungen, nach denen er von P' aus aufgetragen werden kann, ein bestimmtes Vorzeichen beizulegen.

Auf die zuletzt angeführte Bestimmungsweise kommt seinem Wesen nach das gebräuchlichste Darstellungsverfahren[2]) zurück, das unter Voraussetzung zweier zueinander rechtwinkliger Projektionsebenen Π_1 und Π_2 jeden Punkt durch seine beiden Orthogonalprojektionen P' und P'' auf Π_1 und Π_2 bestimmt.

26. Um die Vorstellung zu fixieren, nimmt man die erste Projektionsebene Π_1 horizontal, mithin die zweite Projektionsebene Π_2 vertikal an und bezeichnet P' als Grundriß, erste oder Horizontalprojektion, P'' als Aufriß, zweite oder Vertikalprojektion. Ferner nennt man Π_1 die Grundriß- oder Horizontalebene, Π_2 die Aufriß- oder Vertikalebene und $x = \Pi_1 \times \Pi_2$ die Achse der Projektion. Von den Ebenen Π_1 und Π_2 werden natürlich nur begrenzte Teile als Projektionstafeln tatsächlich benutzt; sie sind aber an sich als unbegrenzt vorzustellen. Der ganze Raum wird durch die Projektionsebenen in vier Fächer oder Quadranten, jede Projektionsebene durch die Achse in zwei Halbebenen zerlegt. Zur Orientierung dienen Benennungen, die, ebenso wie die schon angeführten, für einen auf der Grundrißebene stehenden und der Aufrißebene zugewandten Beschauer zutreffen. Man sagt nämlich von einem Punkte, er liege über, auf oder unter der Grundrißebene und zugleich vor, auf oder hinter der Aufrißebene. Die auf den projizierenden Strahlen gemessenen Strecken

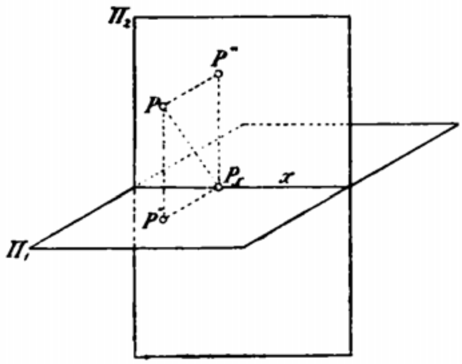

Fig. 19.

$$PP' = (P \dashv \Pi_1), \quad PP'' = (P \dashv \Pi_2)$$

heißen erster und zweiter Tafelabstand des Punktes P; für beide wird das Vorzeichen in dem vorderen oberen Fache positiv angenommen; es wechselt beim Durchgang von P durch die betreffende Projektionsebene. Die Ebene $PP'P''$ der beiden projizierenden Strahlen steht zu beiden Projektionsebenen und folglich auch zur Achse x senkrecht. Ist also (Fig. 19) $P_x = PP'P'' \times x$, so sind PP_x, $P'P_x$ und $P''P_x$ senkrecht zu x und $PP'P_xP''$ ist ein Rechteck.

27. Hieraus erkennt man:

α) Die von den beiden Projektionen eines Punktes (und von diesem selbst) auf die Achse gefällten Lote haben denselben Fußpunkt P_x.

β) Der erste (zweite) Tafelabstand eines Punktes stimmt nach Größe und Vorzeichen mit dem Abstande seiner zweiten (ersten) Projektion von der Achse überein. Liegt insbesondere der Punkt P auf einer Projektionsebene, so fällt die bezügliche Projektion mit ihm zusammen, die andere auf die Achse. Ein Punkt der Achse endlich liegt mit seinen beiden Projektionen vereinigt.

Aus den beiden in Π_1 und Π_2 verzeichneten Projektionen eines Punktes, welche die Bedingung α) erfüllen müssen, sonst aber beliebig angenommen werden können, wird dieser selbst nach β) eindeutig bestimmt, und zwar am einfachsten als Schnittpunkt der in P' auf Π_1 und in P'' auf Π_2 errichteten Senkrechten. — Aus der Darstellung eines Punktes ergibt sich aber die der Geraden und Ebenen, sowie überhaupt der zusammengesetzten Raumgebilde.

28. Die Projektion einer Linie wird als Gesamtheit der Projektionen ihrer Punkte erhalten. Die ersten Projektionen aller Punkte einer Geraden g ergeben deren Grundriß, erste oder Horizontalprojektion g', ebenso die zweiten Projektionen den Aufriß, die zweite oder Vertikalprojektion g''. Die projizierenden Strahlen sämtlicher Punkte von g bilden resp. eine erste oder zweite projizierende Ebene. Die Projektionen der Geraden sind also die Schnittlinien (Spuren) ihrer projizierenden Ebenen in Π_1 und Π_2, mithin selbst gerade Linien. Eine Ausnahme tritt nur für den besonderen Fall ein, daß die Gerade g zu einer Projektionsebene senkrecht ist; es existiert dann keine zugehörige projizierende Ebene mehr; die betreffende Projektion wird ein Punkt, während die andere Projektion eine zur Achse senkrechte Gerade bildet.

29. Nach Annahme einer Geraden g ist ihre Orthogonalprojektion g' auf die Ebene Π_1 als Spur der projizierenden Ebene bestimmt; dagegen ist g durch eine Projektion noch nicht bestimmt. Die beiden Projektionen g' und g'' auf Π_1 und Π_2, die wir willkürlich annehmen dürfen, definieren jedoch eine Raumgerade g, und zwar ist sie die Schnittlinie der beiden durch g' resp. g'' senkrecht zu Π_1 resp. Π_2 gelegten Ebenen. Ausgenommen hiervon ist der Fall, wo eine der projizierenden Ebenen auf der Achse senkrecht steht; dann fällt die andere projizierende Ebene mit ihr zusammen, und die Projektionen g' und g'' stehen in dem nämlichen Punkt der Achse auf dieser senkrecht. Ist demnach g' zur Achse normal, so ist auch g'' in dem gleichen Punkt zur Achse normal; zur vollständigen Bestimmung der Raumgeraden g sind hier noch weitere Angaben erforderlich.

30. Die Darstellung einer Geraden g kann immer auf die zweier auf ihr liegender Punkte P und Q zurückgeführt werden, durch deren Projektionen dann die der Geraden g hindurchgehen, also $g' = P'Q'$, $g'' = P''Q''$. Unter allen Punkten einer Geraden haben aber ihre Schnittpunkte mit den Projektionsebenen, nämlich $G_1 = g \times \Pi_1$ und $G_2 = g \times \Pi_2$, eine besondere Bedeutung. Sie heißen erster und

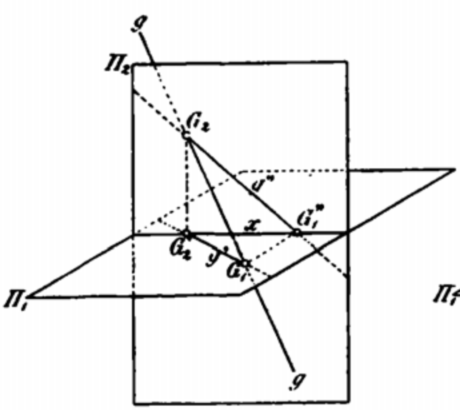

Fig. 20.

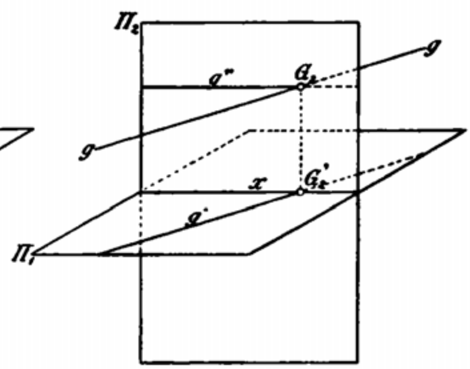

Fig. 21.

zweiter Spur- oder Durchstoßpunkt der Geraden. Jeder Spurpunkt fällt mit seiner gleichnamigen Projektion zusammen, während seine andere Projektion auf der Achse liegt (Fig. 20). — Ist g einer Tafel parallel, so liegt in dieser ihr Spurpunkt unendlich fern, die Projektion auf die andere Tafel wird zur Achse parallel. Z. B. folgt aus $g \parallel \Pi_1$, daß $g' \parallel g$ und $g'' \parallel x$ ist (Fig. 21). Ist g zur Achse parallel, so sind es auch g' und g''; G_1 und G_2 liegen dann beide unendlich fern.

Sind umgekehrt die Projektionen g' und g'' der Geraden g gegeben, so findet man ihre Spurpunkte aus der Bemerkung, daß der Aufriß von G_1 mit dem Punkt $g'' \times x$ und der Grundriß von G_2 mit dem Punkt $g' \times x$ identisch ist.

31. Die Projektion einer (unbegrenzten) Ebene E überdeckt im allgemeinen die betreffende Projektionsebene in ihrer ganzen

Ausdehnung und eignet sich daher nicht zur Bestimmung von E. Ausgenommen ist der Fall, wo E auf der Projektionsebene senkrecht steht; die Orthogonalprojektion der Ebene reduziert sich dann auf eine Gerade und genügt zu ihrer Bestimmung. Im allgemeinen Falle dagegen kann zur Darstellung der Ebene entweder die Angabe dreier Punkte oder zweier Geraden derselben durch ihre Grund- und Aufrisse dienen. Am gebräuchlichsten ist es, die Ebene E durch die beiden Geraden

$$e_1 = \mathsf{E} \times \Pi_1 \text{ und } e_2 = \mathsf{E} \times \Pi_2$$

darzustellen, die man als ihre erste oder Horizontalspur und ihre zweite oder Vertikalspur bezeichnet (Fig. 22). Die Spuren treffen sich im Achsenschnittpunkte $E_x = \mathsf{E} \times x$ und bestimmen E direkt als Verbindungsebene $e_1 e_2$. Ist E zur Achse parallel, so sind es auch ihre Spuren e_1 und e_2 und E_x ist unendlich fern. Ist E einer Projektionsebene parallel, so liegt in dieser ihre Spur unendlich fern, in der anderen parallel zur Achse. Ist E zu einer Tafelebene normal, so steht in der anderen ihre Spur zur Achse senkrecht. Enthält E die Achse, so fallen beide Spuren e_1 und e_2 mit dieser zusammen; zur Bestimmung der Ebene bedarf es dann noch der Angabe eines auf ihr liegenden Punktes außerhalb der Achse.

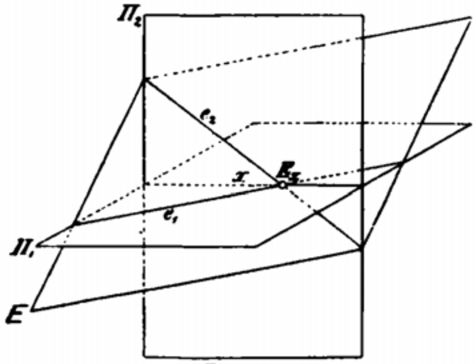

Fig. 22.

32. Die oben erwähnten speziellen Lagen einer Geraden oder einer Ebene, für die es nötig wird, von der gebräuchlichen Darstellung mittels Projektionen, bzw. Spuren in Π_1 und Π_2 abzuweichen, weil diese zur Bestimmung nicht genügen, können als Beispiele dafür angeführt werden, daß es unter Umständen sich empfiehlt, eine dritte Projektionsebene Π_3 einzuführen. Man legt dieselbe zumeist gegen Π_1 und Π_2, also auch gegen die x-Achse senkrecht und bezeichnet sie als Seitenrißebene (Kreuzriß). Die Geraden $y = \Pi_1 \times \Pi_3$ und $z = \Pi_2 \times \Pi_3$ bezeichnen wir auch als horizontale und vertikale Nebenachse. Der Punkt $O = \Pi_1 \times \Pi_2 \times \Pi_3$, in dem sich die drei Achsen rechtwinklig schneiden, heißt Ursprung. Von O aus werden auf jeder Achse die Strecken nach der einen Seite positiv, nach der anderen negativ gerechnet und zwar auf x nach rechts, auf y nach vorn, auf z nach oben in positivem Sinn.

33. Zu den bisherigen Darstellungselementen eines jeden Grundgebildes kommt nach Einführung von Π_3 noch je ein drittes Element neu hinzu: für den Punkt P die dritte Projektion oder der Seitenriß P''', sowie der dritte Abstand PP''' (welcher auf der rechten Seite von Π_3 positiv gerechnet wird), für eine Gerade g

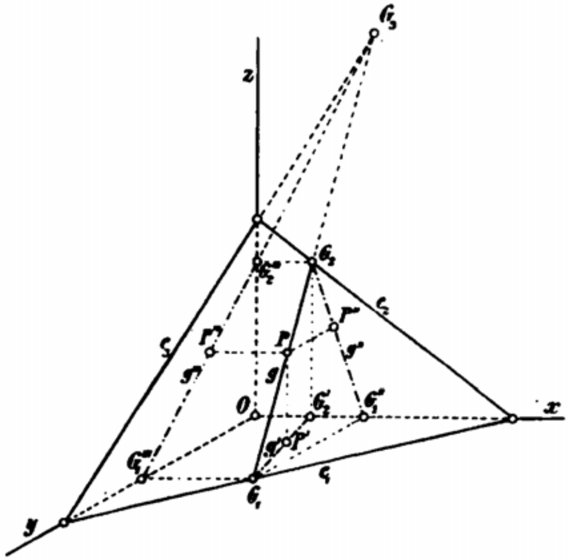

Fig. 23.

der Seitenriß g''' und der dritte Spurpunkt $G_3 = g \times \Pi_3$, für eine Ebene E endlich die dritte Spurlinie $e_3 = \mathsf{E} \times \Pi_3$ (Fig. 23).

34. Die drei Ebenen Π_1, Π_2, Π_3 teilen den Raum in acht räumliche Ecken, sie selbst werden durch die Achsen x, y, z in je vier ebene Felder zerlegt. Zur Unterscheidung der möglichen Lagen eines Punktes hinsichtlich der acht Ecken dienen die Vorzeichen der drei Tafelabstände. Die Maßzahlen dieser Abstände bilden die rechtwinkligen Punktkoordinaten in der analytischen Geometrie des Raumes.

35. Es ist unmittelbar ersichtlich, daß in diesem Dreitafelsystem die Darstellung einer Geraden durch ihre Projektionen oder die einer Ebene durch ihre Spuren auch in den oben erwähnten Spezialfällen keine Unbestimmtheit mehr übrig läßt. Eine zur

Achse x senkrecht gerichtete, schneidende oder nicht schneidende (windschiefe) Gerade g, die durch ihre ersten beiden Projektionen g' und g'' nicht bestimmbar ist, wird durch eine derselben in Verbindung mit der dritten (zu ihr selbst parallelen) Projektion g''' völlig bestimmt (Fig. 24). Eine die Achse x enthaltende Ebene E wird durch diese in Verbindung mit der dritten (durch den Ursprung gehenden) Spur e_3 bestimmt (Fig. 25).

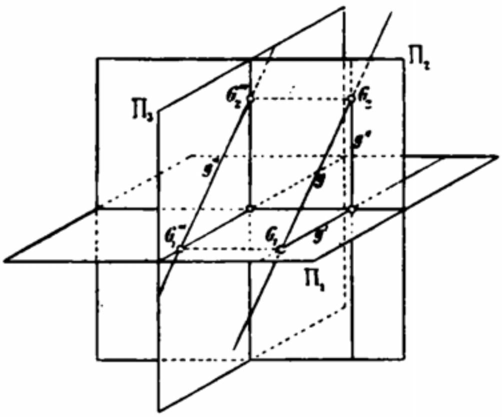

Fig. 24.

36. Im übrigen ist die Einführung einer dritten Projektionsebene (welche zudem den jeweiligen Bedingungen der Aufgabe entsprechend noch in anderer Weise gewählt werden kann) als eine der Hilfsmethoden zu betrachten, die wir in der Folge noch weiter zu entwickeln haben werden. Den Hauptbestandteil der Methode der Orthogonalprojektion bildet die Benutzung des rechtwinkligen Zweitafelsystems oder das Grund- und Aufrißverfahren.

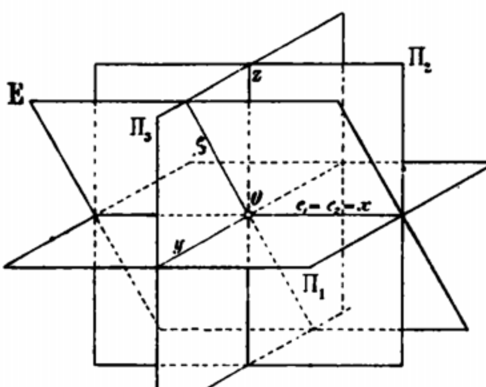

Fig. 25.

37. Die in der Horizontal- und Vertikalebene konstruierten Projektionen einer Raumfigur sollen jetzt in einer und derselben Zeichnungsebene zur Darstellung gebracht werden. Zu diesem Zwecke wählt man etwa die Aufrißebene als Zeichnungsebene und denkt sich nach Ausführung der Projektionen die Horizontalebene durch Drehung um die Achse x mit der ersteren derart vereinigt, daß der vordere Teil der Grundrißebene (den wir als $+\Pi_1$ bezeichnen wollen) in den unteren Teil der Aufrißebene ($-\Pi_2$) zu liegen kommt; folglich fällt zugleich der hintere Teil der Grundrißebene ($-\Pi_1$) mit dem oberen Teil der Aufrißebene ($+\Pi_2$) zusammen (Fig. 26).

Soll eine Seitenrißebene Π_3 zur Verwendung kommen, so denkt man sich auch diese mit Π_2 vereinigt, und zwar durch eine Drehung um die Achse z, indem man die vordere Halbebene Π_3 mit der linken Halbebene Π_2 zur Deckung bringt. In Fig. 27 a und 27 b sind diejenigen Quadranten der drei Projektionsebenen, welche den oben, vorn und rechts gelegenen Raumoktanten begrenzen (in dem also alle drei Tafelabstände eines Punktes P positiv sind) vor und nach ihrer Umlegung in die Bildebene dargestellt.

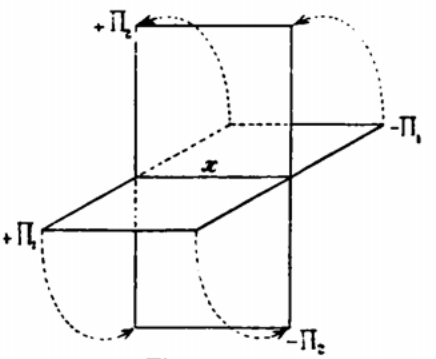

Fig. 26.

Durch die getroffenen (an sich willkürlichen) Festsetzungen über die Anordnung der verschiedenen Projektionen einer Figur in der Zeichnungsebene ist umgekehrt der Übergang von diesen zu ihrer Konstruktion im Raume eindeutig festgelegt.

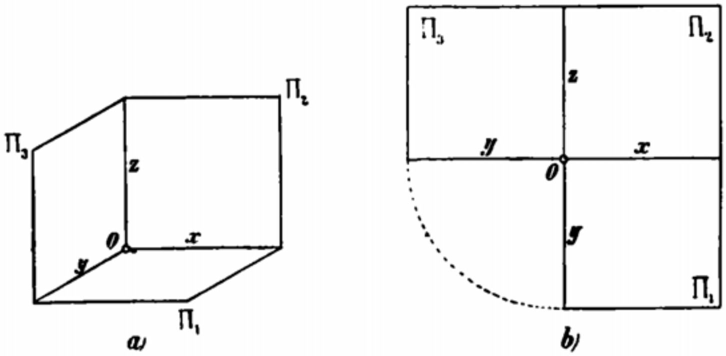

Fig. 27.

38. Zur leichteren Orientierung in den Figuren dient außer der Bezeichnung ihrer Punkte, Linien und Flächen durch Buchstaben die folgende Regel für das Zeichnen der Linien. In jeder Figur sind hauptsächliche und nebensächliche Linien zu unterscheiden; zu den ersteren gehören die bei der Problemstellung gegebenen und gesuchten Linien, sowie die Achse der Projektion, zu den letzteren die nur Konstruktionszwecken dienenden

Hilfslinien. Die Projektion einer jeden hauptsächlichen Linie wird voll ausgezogen, soweit letztere selbst im vorderen, oberen Raumquadranten liegt und sichtbar ist; andernfalls wird sie punktiert. Nebenlinien werden — ob sichtbar oder unsichtbar — gestrichelt oder strichpunktiert. Für die Beurteilung der Sichtbarkeit ist zu bemerken, daß alle vorkommenden Flächen, ebenso wie die Projektionstafeln als undurchsichtig gelten, daß ferner die Sehrichtung den projizierenden Strahlen in ihrer ursprünglichen Lage folgt, und zwar für Π_1 von oben nach unten, für Π_2 von vorn nach hinten.

Bei der Abbildung allseitig begrenzter Objekte denkt man sich diese zweckmäßig ganz in dem oberen, vorderen Raumquadranten gelegen, wodurch die Darstellung an Übersichtlichkeit gewinnt.

Darstellung der Grundgebilde: Punkt, Gerade, Ebene in verschiedenen Lagen.

Wir nehmen die oben geforderte Umlegung der einen Projektionsebene in die andere als vollzogen an und betrachten alle möglichen Lagen von Punkten, Geraden und Ebenen gegen das ursprüngliche System und die entsprechende Anordnung ihrer Projektionen resp. Spuren in der Zeichnungsebene.

39. Der Punkt. Die Projektionen P' und P'' eines Punktes P liegen in einer zur Achse senkrechten Geraden (Fig. 28). Umgekehrt bilden je zwei Punkte P' und P'', deren Verbindungslinie zur Achse senkrecht ist, die beiden Projektionen eines Raumpunktes P. Aus einer derselben wird P mittels seines senkrechten Abstandes von der betreffenden Tafel konstruiert. Der Punkt P liegt senkrecht über P' im Abstand $PP' = P''P_x$, und vor P'' im Abstand $PP'' = P'P_x$.

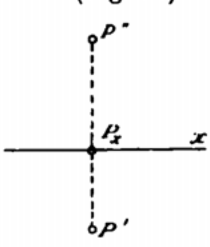

Fig. 28.

P liegt über, auf oder unter Π_1, je nachdem P'' oberhalb, auf oder unterhalb der Achse liegt, und befindet sich zugleich vor, auf oder hinter Π_2, je nachdem P' unterhalb, auf oder oberhalb der Achse liegt. Die so unterschiedenen Lagen eines Punktes sind in Fig. 29 dargestellt. Die Punkte P_1, P_3, P_7, P_9 gehören resp. dem oben vorn, unten vorn, oben hinten, unten hinten liegenden Raumquadranten, die Punkte P_2, P_4, P_6, P_8,