VORLESUNGEN
ÜBER
TECHNISCHE MECHANIKVON

DR. PHIL. Dr.-Ing. AUG. FÖPPL
WEILAND PROF. A. D. TECHN. HOCHSCHULE IN MÜNCHEN, GEH. HOFRAT

SECHSTER BAND

DIE WICHTIGSTEN LEHREN DER HÖHEREN DYNAMIK

FÜNFTE AUFLAGE

MIT 33 ABBILDUNGEN IM TEXT

MÜNCHEN UND BERLIN 1943
VERLAG VON R. OLDENBOURG

Photomechanische Übertragung (Manuldruck)
der Firma F. Ullmann G. m. b. H., Zwickau/Sa.

Printed in Germany.

Aus dem Vorworte zur ersten Auflage.

Im Jahre 1900 lagen meine „Vorlesungen“ zum ersten Male fertig in vier Bänden vor. Als ich dann aber später neue Auflagen für die einzelnen Bände zu bearbeiten hatte, drängte sich mir immer mehr die Notwendigkeit auf, den in den beiden letzten Bänden vorgetragenen Lehrstoff erheblich zu ergänzen, um den häufig noch weiter gehenden Ansprüchen des Leserkreises, für den das Werk von vornherein bestimmt war, vollständig genügen zu können. Da mir aber eine Vergrößerung des Umfanges der beiden letzten Bände durchaus nicht ratsam erschien, blieb mir nur übrig, jeden dieser beiden Bände in zwei selbständige Teile zu zerlegen. Die Neubearbeitung, die sich dadurch erforderlich machte, ist jetzt abgeschlossen. Der dritte und vierte Band umfassen nur noch die einfacheren Lehren, mit denen sich jeder Ingenieur begnügen kann, solange er nicht durch äußere Umstände oder auch durch inneren Trieb veranlaßt wird, über das gewöhnliche Maß einer tüchtigen wissenschaftlichen Ausbildung hinausgehende Studien zu machen, während der fünfte und sechste Band weitergehende Bedürfnisse zu befriedigen bestimmt sind.

Von diesem Schlußbande des ganzen Werkes enthält der erste Abschnitt eine ziemlich ausführliche Darstellung der Lehre von der relativen Bewegung. Davon werden zunächst die grundlegenden Fragen der ganzen Dynamik betroffen. Früher war es freilich nicht Brauch, in einem Lehrbuche der Technischen Mechanik auf diese Dinge näher einzugehen. Aber ich hielt es für nötig, sie genauer zu besprechen, weil sich ein wissenschaftlich gebildeter und selbständig denkender Ingenieur, wenn er sich auch sonst mit Recht mehr an die unmittelbar praktisch verwendbaren Lehren der Mechanik hält, bei vielen Anlässen dazu gedrängt fühlen wird, sich auch über diese letzten und tiefsten Fragen der Mechanik ein klares Urteil zu bilden.

Der Rest des ersten Abschnitts bildet eine Fortsetzung des gleichbezeichneten Abschnitts im vierten Bande. Ich nehme an, daß er einem Ingenieur, der mit der Untersuchung von Relativbewegungen in praktischen Fällen zu tun bekommt, eine brauchbare Anleitung dazu geben kann.

Der zweite Abschnitt behandelt die „mehrläufigen Verbände", also das, was man sonst häufig als „System Mechanik" bezeichnet. Hierbei war ich namentlich darauf bedacht, das Verfahren von Lagrange zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen nicht nur kurz zu besprechen, wie dies früher schon in den älteren Auflagen des vierten Bandes geschehen war, sondern es auch so eingehend zu erläutern, daß der Leser dadurch in den Stand gesetzt werden kann, dieses Verfahren auf neue Aufgaben selbständig und mit Sicherheit anzuwenden. Dazu soll besonders die ausführliche Durchsprechung einiger geeigneter Beispiele verhelfen, von denen übrigens das „Doppelpendel" und das „rollende Rad" auch schon ihrem Gegenstande nach die Aufmerksamkeit des Technikers herausfordern dürften.

Auch das Verfahren von Lagrange hat früher in den Lehrbüchern der Technischen Mechanik keinen Platz gefunden. Es verdient ihn aber meiner Ansicht nach zweifellos. Ich halte es zwar keineswegs für nötig, daß sich die Mehrzahl der Studierenden der Ingenieurwissenschaften damit schon auf der Hochschule vertraut macht, und halte dies auch nicht für möglich. Nicht etwa weil der Gegenstand zu schwierig wäre, denn das ist er bei einer verständigen Darstellung durchaus nicht; sondern wegen des Zeitmangels, der es mit Rücksicht auf andere Lehren, die eben doch noch wichtiger sind, verbietet, in den regelmäßigen Vorlesungen über Technische Mechanik darauf einzugehen. Wer aber später durch seine Berufsaufgaben in die Lage kommt, von den Lehren der Dynamik zuweilen auch bei etwas schwierigeren Untersuchungen Gebrauch zu machen, sollte den Versuch nicht unterlassen, sich mit diesem oft sehr nützlichen Hilfsmittel bekannt zu machen. Ich glaube ihm auch in Aussicht stellen zu dürfen, daß ihm dies an der Hand der hier gegebenen Darstellung kaum besonders schwer fallen kann.

Der dritte Abschnitt ist der Lehre vom Kreisel gewidmet, also einem Gegenstande, der durch mancherlei Anwendungen, die davon teils gemacht, teils geplant wurden, neuerdings auch in der praktischen Technik immer mehr in den Vordergrund getreten ist, während er in der analytischen Mechanik schon von jeher eine wichtige Rolle gespielt hat. Besonders eingehend habe ich dabei den Schlickschen Schiffskreisel besprochen: nicht nur wegen der Bedeutung, die dieser Einrichtung an sich schon zukommt, sondern auch als ein Musterbeispiel für die genauere Untersuchung der Eigenschaften von „Kreiselverbänden“ überhaupt.

Der vierte Abschnitt enthält verschiedene Anwendungen der Dynamik: auf die Schwingungen der Regulatoren von Kraftmaschinen, das „Pendeln“ von elastisch gekuppelten Maschinen, sowie auf die Planetenbewegung.

Der fünfte und letzte Abschnitt gilt der Hydrodynamik. Der größte Teil seines Inhalts ist aus der zweiten Auflage des vierten Bandes übernommen. Bei der dritten Auflage war nämlich der die Hydrodynamik behandelnde Abschnitt besonders stark gekürzt worden, und was damals wegfiel, findet man jetzt hier wieder. Indessen sind auch verschiedene Gegenstände in zum Teil ziemlich ausführlicher Behandlung neu aufgenommen; so wurde namentlich die neuere Theorie der Wasserbewegung in den Turbinen, die sich auf die in Zylinderkoordinaten ausgedrückten Eulerschen Gleichungen stützt, ihren Grundzügen nach dargestellt.

Aus diesen Inhaltsangaben geht übrigens zugleich hervor, was ich unter den „wichtigsten Lehren der höheren Dynamik“ verstehe. Eine Erläuterung des für diesen Band gewählten Titels ist ja in der Tat nötig, da verschiedene Beurteiler, namentlich wenn sie verschiedenen Fachrichtungen angehören, wie etwa ein Ingenieur, ein Physiker und ein Mathematiker, sehr verschiedener Ansicht darüber sein können, welche Lehren der Dynamik als die „wichtigsten“ anzusehen oder auch nur, welche zu den „höheren“ Teilen der Dynamik zu rechnen sind. Ich brauche indessen kaum noch besonders hervorzuheben, daß ich diese Bezeichnungen im Sinne des Ingenieurs verstanden wissen will und daß ich mich bemüht habe, bei der Auswahl des Stoffes vor allem auf die Bedürfnisse der Technik zu achten.

München, im Oktober 1909.

A. Föppl.

Vorwort zur vierten Auflage.

Der fünfte und der sechste Band meiner „Vorlesungen" waren vor dem Kriege noch nicht zu neuen Auflagen gekommen. Als aber nach der Beendigung des Krieges die große Nachfrage nach allen Lehrbüchern einsetzte, wurden auch von diesen beiden Bänden die inzwischen spärlich gewordenen Auflagenreste schnell vergriffen. Die ersten vier Bände meines Lehrbuchs wurden freilich noch weit mehr begehrt und für sie mußte daher in erster Linie durch die Herausgabe von Neuauflagen gesorgt werden.

Es wäre mir nicht möglich gewesen, alle sechs Bände zu gleicher Zeit neu für den Druck zu bearbeiten. Daher vereinbarte ich mit der Verlagsbuchhandlung, daß von den beiden Schlußbänden, deren Bearbeitung andernfalls am meisten Zeit erfordert hätte, für den nächsten Bedarf vorläufig kleinere unveränderte Neuauflagen nach dem „anastatischen" Herstellungsverfahren herausgegeben werden sollten. Hierbei wurde freilich der Bedarf unterschätzt und es erwies sich daher bald darauf als nötig, den Nachdruck nochmals zu wiederholen. Auf diese Weise ist es gekommen, daß dieser Band jetzt schon in „vierter" Auflage erscheint, obschon es erst die zweite Ausgabe ist, an die ich selbst die Hand angelegt habe

Bei dieser Bearbeitung habe ich das Buch an vielen Stellen in den Einzelheiten ziemlich stark umgeändert. In der Gesamtanlage wird man es aber fast genau wieder so finden, wie es auch vorher schon war. Das hängt zum Teile damit zusammen, daß das Buch den Bestandteil eines mehrbändigen Werkes bildet, so daß es auf die einmal gewählte Stoffverteilung über die verschiedenen Bände von vornherein mehr oder weniger festgelegt war. Andererseits sah ich auch keinen zwingenden Grund zu größeren Änderungen. An einem Beispiele möge dies noch etwas näher dargelegt werden.

Ich wähle dazu das Beispiel der Hydrodynamik, weil gerade deren Behandlung in meinem Lehrbuche schon öfters getadelt wurde und zwar, wie ich sofort hinzufügen möchte, vom Standpunkte mancher Beurteiler aus sicherlich nicht ohne Grund. Es bedarf daher einer Rechtfertigung dafür, daß ich hierin auch diesmal nichts Wesentliches geändert habe.

Wer mein Lehrbuch zur Hand nimmt, um gerade nur die Hydrodynamik zu studieren, ohne sich um die anderen Teile viel zu kümmern, wird es als lästig empfinden, daß dieser Gegenstand über drei verschiedene Bände verteilt ist, von denen jeder ein Stück davon bringt, ohne daß er damit annähernd vollständig erschöpft würde. Außerdem wird wohl auch mancher Leser unzufrieden damit sein, daß ich in dieser neuen Auflage auf die zahlreichen Arbeiten und Forschungsergebnisse nicht näher eingegangen bin, die mit der heutigen Theorie des Flugzeugs zusammenhängen. Aber ein Buch, wie ich es herausgegeben habe, kann es nicht allen recht machen. Dagegen soll zugegeben werden, daß ein Band, der ausschließlich die Hydrodynamik in dem ganzen hierbei in Frage kommenden Umfange und in etwas größerer Vollständigkeit als in meinem Lehrbuche behandelte, unter sonst gleichen Umständen in mancher Hinsicht meiner Darstellung dieses Zweiges der Mechanik vorzuziehen wäre.

Aber ich bin der Meinung, daß die von mir gewählte und jetzt abermals beibehaltene Stoffeinteilung auch ihre Vorzüge hat, die mir immer noch wichtiger erscheinen, als die Nachteile, die unleugbar mit der Zersplitterung und mit der Beschränkung des Stoffes in meinem Werke verbunden sind. Diese Vorzüge kommen zwar nicht bei einem Leser zur Geltung, der mit dem Gegenstande vorher schon besser vertraut ist, wohl aber bei dem Anfänger, der in die Wissenschaft der Mechanik durch mein Buch erst eingeführt zu werden wünscht. Der erste Band meines Werkes macht nämlich nur geringe Ansprüche an die Vorbildung des Lesers und er bringt trotzdem in seinem letzten Abschnitte, der die Mechanik der flüssigen Körper behandelt, schon viele wichtige Dinge und darunter auch manche, die man nicht überall findet. Auf einer etwas höheren Stufe der Ausbildung, wie sie durch das Studium der vorausgehenden Bände erlangt werden kann, muß ein Leser bereits angelangt sein, um den Ausführungen des vierten Bandes mit vollem Verständnisse folgen zu können und beim sechsten Bande endlich steigen diese Anforderungen noch weiter.

Wer sich der Reihe nach durch diese drei aufeinander folgenden und einander ergänzenden Lehrgänge hindurch gearbeitet und sich mit ihrem Inhalte genügend vertraut gemacht hat, kennt zwar immer noch nicht die ganze für die technischen Anwendungen überhaupt in Betracht kommende Hydrodynamik, wohl aber ihre hauptsächlichsten Lehren. Auf dieser Grundlage kann es ihm nicht mehr schwer fallen, auch in das Verständnis von anderen Werken einzudringen, die den Stoff vollständiger behandeln, sobald sich ihm dies als nötig oder wünschenswert erweist.

Hierzu bemerke ich noch, daß ich eine Vollständigkeit von ähnlichem Umfange, wie man sie etwa von einem Handbuche erwartet, in meinem Lehrbuche überhaupt niemals angestrebt habe. Ein Handbuch wendet sich an Leser, die von vornherein schon auf einer ansehnlichen wissenschaftlichen Höhe stehen und befindet sich damit in ganz anderer Lage. Es darf in den Einzelausführungen viel knapper gefaßt sein und gewinnt dadurch den Raum für den weiteren Stoff. Ein Lehrbuch dagegen muß sich in der Stoffauswahl beschränken, um in aller Ausführlichkeit auf die Dinge eingehen zu können, die es überhaupt in Betracht zieht.

Daß meine Art der Behandlung der Mechanik, die ich am Beispiele der Hydrodynamik hier nochmals näher zu begründen versuchte, den Beifall vieler Leser gefunden hat, beweist übrigens der große buchhändlerische Erfolg, der diesem Lehrbuche beschieden gewesen ist. Möge es auch in Zukunft noch zahlreichen Ingenieuren dienen, die sich in Büchern mit strengerer oder knapperer Fassung nicht so leicht zurecht finden würden!

Der fünfte Band meiner „Vorlesungen", der auch schon mehrmals in unveränderter Fassung neu gedruckt wurde, wird voraussichtlich im Laufe des nächsten Jahres ebenfalls in neuer Bearbeitung erscheinen können.

München, im Juni 1921.

A. Föppl.

Vorwort zur fünften Auflage.

Abgesehen von offenkundigen Druckfehlern wurde gegenüber der alten Auflage nur § 36 „Reguläre und pseudoreguläre Präzession" umgearbeitet, da sich hier ein Abschätzungsfehler eingeschlichen hatte, worauf mich Herr Dr.-Ing. Eberhard Schneller-Darmstadt in dankenswerter Weise aufmerksam gemacht hat.

München, Februar 1943.

L. Föppl

Inhaltsübersicht.

Erster Abschnitt.

Die relative Bewegung.

Zweiter Abschnitt.

Die Bewegungsgleichungen für mehrläufige Verbände.

Dritter Abschnitt.

Der Kreisel.

Vierter Abschnitt.

Verschiedene Anwendungen.

Fünfter Abschnitt.

Hydrodynamik.

Erster Abschnitt.

Die relative Bewegung.

§ 1. Die Grundlagen der Dynamik.

Eine Aufgabe der Dynamik nach vorhandenen Mustern zu lösen ist keine besondere Kunst. Dazu gehört neben einer allgemeinen Kenntnis der dabei anzuwendenden Sätze nur eine entsprechende Rechenfertigkeit. Wo aber ein Muster fehlt, an das man sich entweder unmittelbar oder mit geringen Abweichungen anlehnen kann, werden sofort höhere Ansprüche an die Urteilskraft gestellt. Der Bearbeiter sieht sich in solchen Fällen häufig genötigt, über den Ursprung der Sätze, auf die er sich stützen will, schärfer nachzudenken, um den genauen Sinn festzustellen, der mit ihnen zu verbinden ist. Erst wenn darüber kein Zweifel mehr möglich ist, darf er sicher sein, sie im gegebenen Falle richtig anzuwenden. Insbesondere gilt dies auch bei allen Betrachtungen, die sich auf die relative Bewegung beziehen.

Im ersten und auch im vierten Bande dieses Werkes sind die Grundlagen, auf denen die Dynamik beruht, zwar schon ziemlich ausführlich besprochen worden. Aber wer es genau nimmt und in Zweifel darüber gerät, wie diese oder jene Aussage gemeint war und wie sie begründet werden kann, hat ein Recht, von dem Lehrbuche, dessen Führung er sich anvertraut, noch weitere Aufschlüsse von grundsätzlicher Art zu verlangen.

Man muß heute unterscheiden zwischen der alten oder „klassischen“ Dynamik, die auf den Arbeiten von Galilei und von Newton beruht, und der neueren „Relativitäts-Mechanik“, in der der Nachweis dafür erbracht wird, daß der Begriff der „absoluten Zeit“, wie er von Newton zum Aufbau der Mechanik verwendet worden war, einer strengen Kritik nicht standzu halten vermag. Daß von einem „absoluten Raum“ oder einer „absoluten Bewegung“ im strengen Sinne, also in dem von Newton gemeinten Sinne dieser Bezeichnungen keine Rede sein kann, daß vielmehr alle Ortsveränderungen im Raume nur als relative aufzufassen und nur als solche verständlich zu machen sind, hatte man schon lange zuvor erkannt. Diese Erkenntnis ist auch für den Techniker sehr wichtig und im 1. und 4. Bande dieses Werkes liegt sie schon überall zugrunde.

Aber erst in der Relativitäts-Mechanik wird gezeigt, daß das Gleiche auch von der Zeit gilt. Auch die Zeit hat, wie wir heute anerkennen müssen, nur relative Bedeutung. Alle Zeitangaben stehen nämlich ihrem Wesen nach in notwendiger Abhängigkeit von der Art der Aufstellung und von der damit verbundenen Bewegung des Beobachters. Die Aussage, daß zwei Ereignisse, die an verschiedenen Stellen des Raumes geschehen, gleichzeitig erfolgt seien, hat nur dann einen bestimmten Sinn, wenn hinzugefügt wird, von wo aus und mit welchen Mitteln die Gleichzeitigkeit festgestellt wurde.

Zwei Ereignisse im Weltalle, die sich durch Lichterscheinungen verraten und die den Astronomen unserer Erde als gleichzeitig erscheinen, können für die Bewohner eines anderen Weltkörpers durch lange Zeiträume getrennt sein. Das hängt damit zusammen, daß das Licht, das von diesen Ereignissen Kunde bringt, Zeit braucht, um zu den verschiedenen Beobachtern zu gelangen. Diese Zeit wird auch offenbar nicht nur von der verschiedenen Entfernung der Beobachter, sondern auch von der Geschwindigkeit abhängen, mit der sich die Aufstellungsorte der Beobachter selbst bewegen.

Über diese Umstände ist man sich nun freilich schon seit langem klar gewesen. Man war aber früher immer bei dem Gedanken stehen geblieben, daß es möglich sein müsse, durch eine geeignete Umrechnung der von den Beobachtern gemachten Zeitangaben unter Berücksichtigung der genannten Umstände eine „absolute Zeit“ dieses oder jenes Ereignisses festzustellen und daher namentlich auch zu entscheiden, ob zwei Ereignisse gleichzeitig erfolgten oder welches von beiden früher eintrat.

Es ist nun aber nachgewiesen worden, daß dies grundsätzlich nicht möglich ist, sobald man den Begriff des absoluten Raumes aufgegeben hat und daß daher der Zeitbegriff für alle Fälle, in denen die Lichtgeschwindigkeit nicht als unendlich groß anzusehen ist, einer ganz neuen Fassung bedarf.

Diese Erkenntnis bildete den logischen Ausgangspunkt der neueren „relativistischen" Mechanik. Dazu kam aber noch als weitere Grundlage der Mißerfolg aller früheren Versuche, die man bis dahin angestellt hatte, um einen Einfluß der Bewegung des Beobachtungsortes gegen den Fixsternhimmel nachzuweisen, so daß sich daraus auf die Bewegung relativ zu einem „Lichtäther" hätte schließen lassen. Diese wiederholten Mißerfolge führten zur Vermutung, daß alle Naturgesetze in der gleichen Weise für jede Aufstellung des Beobachters gültig seien, unabhängig von der Geschwindigkeit, mit der sich der Aufstellungsort bewegt, und daß sich insbesondere das Licht im leeren Raume stets mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzt, unabhängig zugleich von der Geschwindigkeit jedes Körpers, von dem es ausgesendet wird. Diese Vermutung nähert sich um so mehr einer Gewißheit, je länger es dauert, seit sie aufgestellt werden konnte, ohne daß sich bis dahin eine Erfahrungstatsache hätte ausfindig machen lassen, die ihr widerspricht. Sie erschien aber auch damals schon wohlbegründet und in der Relativitätstheorie wird sie unter der Bezeichnung des „Prinzips der Relativität" zum Hauptausgangspunkte der neueren Mechanik und der Physik überhaupt erhoben.

Die Relativitäts-Mechanik und die alte Galilei-Newtonsche Mechanik widersprechen sich praktisch nicht, sondern sie führen zu den gleichen Ergebnissen in allen Fällen, in denen die Geschwindigkeiten der Körper, mit denen man zu tun hat, als sehr klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit angesehen werden können. Dagegen bewegen sich die Elektronen in den Entladungsröhren mit Geschwindigkeiten, die nicht viel hinter der Lichtgeschwindigkeit zurückstehen oder die wenigstens von gleicher Größenordnung mit ihr sind. Die Aufgabe, zu einer Theorie dieser Elektronenbewegungen zu gelangen, hat den ersten Anstoß zur Aufstellung der Relativitäts-Mechanik gegeben.

Ein anderer Fall, in dem die alte und die neue Mechanik zu merklich verschiedenen Ergebnissen gelangen, liegt bei den Bewegungen der Himmelskörper vor. Die Relativgeschwindigkeiten, mit denen sich zwei Himmelskörper gegeneinander bewegen, ist zwar in allen Fällen, die man aus der Beobachtung kennt, sehr klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit, sie steigt aber doch auf ungefähr 50 Kilometer in der Sekunde oder auch noch etwas darüber hinaus. Jedenfalls sind diese Geschwindigkeiten weit höher, als sie jemals bei den irdischen Körpern vorkommen, die etwa als Maschinenteile oder als Geschosse den Gegenstand einer Untersuchung der technischen Mechanik bilden können. Gegenüber der Lichtgeschwindigkeit von 300000 Kilometern in der Sekunde erscheinen sie freilich immer noch recht klein, um so mehr als die Abweichungen zwischen den Voraussagen der alten und der neuen Dynamik mit dem Quadrate des Verhältnisses beider Geschwindigkeiten zueinander wachsen. Die Folge ist daher auch, daß es zunächst sehr schwer erschien, aus den astronomischen Messungen den bündigen Nachweis für die Richtigkeit der Relativitäts-Mechanik gegenüber der Newtonschen zu erbringen.

Andererseits sind aber die astronomischen Messungen außerordentlich genau und die Zeiträume, die sie umfassen, reichen um Jahrhunderte zurück. Hierdurch ist es eben doch möglich geworden, wenigstens in einem ganz bestimmten Falle zu einem Vergleiche zwischen den Ergebnissen der Relativitäts-Mechanik und der Newtonschen Mechanik zu gelangen, der zugunsten der neuen Theorie ausfiel. Dieser Fall liegt bei der Bewegung des Planeten Merkur vor. Von allen Planeten hat Merkur den kleinsten Abstand von der Sonne und er umkreist sie daher auch mit der größten Geschwindigkeit, so daß bei ihm die Bedingungen für eine Abweichung zwischen den Ergebnissen der alten und der neuen Theorie von vornherein am günstigsten lagen.

Ein Planet beschreibt überhaupt nicht genau eine elliptische Bahn um die Sonne, wie sie von den Keplerschen Gesetzen gefordert wird, sondern es treten kleine Abweichungen davon ein, die sich in der Hauptsache auf die Anziehungskräfte zurückführen lassen, die von den übrigen Planeten auf den beobachteten nach dem Newtonschen Gesetze ausgeübt werden. Die Astronomen haben es verstanden, eine „Störungstheorie" auszuarbeiten, die jene Abweichungen nicht nur zu erklären, sondern sie auch genau vorauszuberechnen gestattet. Die Ergebnisse waren sonst in guter Übereinstimmung mit der Beobachtung, mit der einzigen Ausnahme des Planeten Merkur, bei dem ein Bewegungsanteil blieb, der sich mit der auf das Newtonsche Gesetz gestützten Theorie nicht erklären ließ.

Jener Punkt der Planetenbahn, in dem sich der Planet der Sonne am nächsten befindet, wird das Perihel genannt, und nach der Galilei-Newtonschen Mechanik wäre zu erwarten, daß der von der Sonne nach dem Perihel gezogene Radiusvektor bei jedem neuen Umlaufe stets wieder dieselbe Richtung in dem gegen den Fixsternhimmel festgelegten Inertialsysteme einnehmen müßte. Bei den übrigen Planeten trifft dies auch tatsächlich zu, so weit, als die Genauigkeit der Beobachtung reicht. Beim Merkur dreht sich aber dieser Radiusvektor ein wenig, und zwar so, daß er im Laufe eines Jahrhunderts einen Winkel von etwa 43 Bogensekunden beschreibt. Das scheint zwar nur wenig, aber es ist doch weit mehr, als sich etwa durch Beobachtungsfehler erklären ließe, und diese aus dem sonst so wohl geordneten Bilde herausfallende Perihel-Bewegung des Merkur hat den Astronomen schon von jeher viel zu schaffen gemacht.

Da war es zweifellos ein großer Erfolg der Relativitätstheorie, daß sie ohne jede für diesen besonderen Zweck neu eingeführte Annahme eine Perihel-Bewegung jedes Planeten zu berechnen gestattete, die im Falle des Merkur der Größe nach mit der beobachteten übereinstimmt, während sie für die anderen Planeten nach derselben Theorie so klein ausfällt, daß sie sich in den vorhandenen Beobachtungsergebnissen nicht mehr auszusprechen vermag. Das war der erste große Erfolg, der die Richtigkeit der Relativitätstheorie sehr wahrscheinlich machte.

In jüngster Zeit kam noch ein anderer hinzu. Die Relativitätstheorie ist nicht auf die Mechanik beschränkt, sondern sie umfaßt das ganze Gebiet der Physik und besonders auch die Optik. In dieser Hinsicht gelangte die Relativitätstheorie zu dem Schlusse, daß sich ein Lichtstrahl in einem Gravitationsfelde nicht genau gradlinig fortpflanzt, sondern daß er ein wenig gekrümmt wird. Die Krümmung kann sich für einen Beobachter auf der Erde bemerklich machen, wenn das von einem Fixsterne ausgesendete Licht durch das starke Gravitationsfeld in der nächsten Umgebung der Sonne hindurchgeht und von da aus weiter zur Erde gelangt. Die Rechnungen führten zu dem

Schlusse, daß dabei eine Richtungsablenkung des Lichtstrahls von nahezu 2 Bogensekunden herauskommen könne. Das ist aber eine Größe, die sich unter günstigen Umständen durch Messung nachweisen läßt.

Gelegenheit zu einem solchen Versuche bietet jede totale Sonnenfinsternis, indem man nach Eintritt der Finsternis die in der Umgebung der Sonne stehenden Fixsterne auf photographischen Platten aufnimmt. Eine Reihe solcher Aufnahmen, bei deren jeder die Sonnenscheibe eine etwas gegen die vorige verschobene Stellung einnimmt, läßt sich später in aller Muße ausmessen, und die Genauigkeit, mit der dies geschehen kann, reicht aus, um Verschiebungen eines Sternes gegen die anderen von der Größenordnung einer Bogensekunde, die etwa bei der Annäherung an den Sonnenrand im Verlaufe des ganzen Vorganges hervorgebracht wurden, mit Sicherheit nachzuweisen. Nach den Berichten über die Ergebnisse der Beobachtungen bei einer im Jahre 1919 vorgekommenen Sonnenfinsternis, die von englischen Astronomen mit großem Aufwande von Mitteln zur Prüfung der Relativitätstheorie angestellt wurden, hat sich die vorausgesagte Verschiebung der Sternorte auf der photographischen Platte in der Tat nachweisen lassen. Sollte sich dies noch weiterhin endgültig bestätigen, so würde man darin den sicheren Beweis für die Richtigkeit der Relativitätstheorie zu erblicken haben, zum mindesten ihren allgemeinen Umrissen nach und mit dem Vorbehalte, daß in den Einzelheiten später vielleicht noch manches zu ändern sein könnte.

Wie aus alledem hervorgeht, handelt es sich bei der Relativitätstheorie um einen wissenschaftlichen Fortschritt von einer Größe und von einem Umfange, der fast alles in den Schatten stellt, was etwa seit den Tagen von Newton zum Ausbau unserer Naturerkenntnis geleistet wurde. Es ist heute durchaus noch nicht abzusehen, wie weit die Gebiete sein werden, auf die sich die Folgerungen erstrecken können, die sich weiterhin noch aus der Relativitätstheorie werden ziehen lassen. Es soll auch hier nicht versucht werden, Vermutungen darüber auszusprechen, welche praktische Folgen sich etwa noch daran knüpfen könnten, oder einen Abriß von dem zu geben, was sonst an neuen Gedanken hinsichtlich des Zusammenhanges zwischen Masse und Energie oder über die Eigenschaften des Gravitationsfeldes bisher dabei herausgekommen ist und noch einer weiteren Ausarbeitung harrt.

Ein Lehrbuch wie meine „Vorlesungen“ darf an einer solchen Entwicklung nicht stillschweigend vorübergehen, sondern muß irgendwie Stellung dazu nehmen. Aber es wäre meines Erachtens verfehlt, wenn ich hier den Versuch machen wollte, einen Abriß zur Einführung in die Relativitätstheorie für den damit bisher noch nicht bekannten Leser zu geben. Wer sich aus Lernbegierde und Forschungstrieb damit beschäftigen möchte, muß auf große geistige Anstrengungen gefaßt sein, die erheblich über jene hinausgehen, die dem Leser meiner „Vorlesungen“ sonst zugemutet werden. Er mag sich dazu an die Bücher halten, die eigens für diesen Zweck bestimmt sind. Ich kann mich selbst nicht als einen geeigneten Führer in dieses neue Gebiet betrachten. Ich fühle mich dafür schon zu alt und glaube daher die volle Anpassungs- und Einfühlungsfähigkeit in die neue Begriffswelt bereits verloren zu haben.

Hierbei möchte ich nicht unerwähnt lassen, daß ich früher selbst mich wiederholt bemüht habe, in der gleichen Richtung zu einem Fortschritte zu gelangen, daß ich aber daran gescheitert bin, die Relativität des Zeitbegriffes zu erkennen, wie sie später in der Relativitätstheorie dargelegt wurde. Veröffentlicht habe ich über meine früheren Bestrebungen freilich nicht viel, da ich selbst herausfühlte, daß sie unfertig und unvollständig sein mußten. Aus meiner Akademieabhandlung vom Jahre 1904 „Über absolute und relative Bewegung“ kann man aber erkennen, nach welcher Richtung sie ungefähr hinausgingen.

In der ersten Auflage dieses Buches, deren Bearbeitung schon in die Zeit nach der Relativitätstheorie in ihrer ursprünglichen Fassung fiel, habe ich in den ersten sechs Paragraphen eine Theorie der Relativbewegung vom rein geometrischen Standpunkte aus gegeben, ohne auf die Relativität des Zeitbegriffes näher einzugehen, die dabei nur eine flüchtige Erwähnung fand. Auch heute scheint es mir noch zweckmäßig, an dieser Behandlungsweise festzuhalten. Denn bei allen technischen Anwendungen der Dynamik, die heutzutage überhaupt in Frage kommen können, genügt es, die Lichtgeschwindigkeit als unendlich groß anzusehen, womit jede Notwendigkeit wegfällt, auf die Relativität des Zeitbegriffs zu achten. Die Relativität der Bewegung vom geometrischen Standpunkte aus ist dagegen auch für das Verständnis der alten Dynamik so wichtig und geradezu unentbehrlich, daß sie einer gründlichen Besprechung in jedem Falle bedarf. Wer sich mit der Dynamik nur in jenem Umfange bekannt zu machen wünscht, der bei irgendeiner technisch wichtigen Untersuchung allenfalls in Betracht kommen kann, darf sich daher mit dem begnügen, was er hier finden kann. Aber auch für den, der seinen Studien später noch eine weitere Ausdehnung zu geben beabsichtigt, wird es eine gute Vorschule sein, wenn er sich zunächst einmal mit einer Darstellung der Dynamik bekannt macht, die auf die Relativität im Raume genügend achtet, ohne auf die aus der zeitlichen Relativität fließenden Folgerungen näher einzugehen.

§ 2. Ein Punkthaufen als Welt für sich.

Der Begriff des Punkthaufens wurde schon im ersten und auch im vierten Bande dieses Werkes aufgestellt und ausführlich besprochen. Darauf muß ich mich hier stützen. Für die dynamische Betrachtung kann man hiernach einen Körper oder mehrere Körper und schließlich auch das ganze Weltall oder einen bestimmt abgegrenzten Teil davon unter dem Bilde eines Punkthaufens auffassen.

Wir betrachten einen Haufen, der aus n materiellen Punkten besteht, die sich in beliebiger Weise gegeneinander bewegen mögen. Die Massen dieser Punkte $m_1, m_2 \ldots m_n$ sehen wir als gegeben an. Dagegen soll über die Kräfte, die an den Punkten angreifen und die ihre Bewegungen bestimmen von vornherein nichts bekannt sein.

Außer den Punkten seien noch verschiedene Beobachter vorhanden, die ihren Standpunkt nach Belieben zu wählen und sich gegenseitig zu verständigen vermögen. Die Zeichen, die sie sich zu diesem Zwecke geben, sollen in unmeßbar kurzer Zeit von einem Orte zum anderen gelangen. Die Beobachter sollen mit allen erforderlichen Meßwerkzeugen zur Feststellung der gegenseitigen Lage der verschiedenen materiellen Punkte und auch mit Uhren versehen sein, die dauernd in übereinstimmendem Gange gehalten werden, so etwa, daß eine von ihnen als Normaluhr angesehen und die anderen nach ihr gestellt werden.

Dagegen soll es den Beobachtern an jeder Orientierung nach außen hin fehlen. Von anderen Massen als von den zu dem Punkthaufen gehörigen sollen sie überhaupt nichts wahrnehmen. Es soll ihnen auch jede Möglichkeit fehlen, den Gang ihrer Normaluhr mit den für die außerhalb liegenden Teile der Welt gültigen Zeitfestsetzungen zu vergleichen. Unter solchen Umständen bildet der Punkthaufen für die Beobachter, die zu ihm gehören und die nichts außer ihm bemerken können, eine für sich abgeschlossene Welt und wir wollen ihnen dieselbe Aufgabe stellen, die unseren Astronomen und Naturforschern obliegt, zunächst einmal eine geeignete Beschreibung der von ihnen wahrgenommenen Bewegungen für einen längeren Zeitabschnitt zu geben.

Zu diesem Zwecke müssen die verschiedenen Beobachter eine Verabredung darüber treffen, welches Koordinatensystem sie bei der Beschreibung der Bewegungen zugrunde legen wollen. Zunächst ist es ziemlich gleichgültig, wie sie diese Wahl treffen, wenn nur kein Zweifel darüber bleibt, wie jeder Beobachter seine Angaben dementsprechend einzurichten oder umzurechnen hat, so daß sich alle Angaben auf die gleiche Art der Aufstellung eines dieser Beobachter beziehen lassen. Diese beliebig zu wählende Normalaufstellung muß jedenfalls genau beschrieben werden, so daß sie sich jederzeit wiederfinden läßt, wenn sie einmal verloren gegangen war. Das kann etwa dadurch geschehen, daß man den Ursprung eines rechtwinkligen Achsenkreuzes fortwährend mit einem der materiellen Punkte des ganzen Haufens zusammenfallen, ferner die X-Achse stets durch einen zweiten und außerdem die XY-Ebene noch durch einen dritten Punkt des Haufens gehen läßt. Falls die Punkte so ausgewählt wurden, daß während der Beobachtungszeit niemals alle drei in eine Gerade fallen, genügen diese Festsetzungen, um für jeden Beobachter das Koordinatensystem, auf das er seine Angaben zu beziehen hat, jederzeit kenntlich zu machen.

Nun steht der Ausführung der Beobachtungen und der Aufzeichnung ihrer Ergebnisse nichts mehr im Wege. Die zunächst gestellte Aufgabe ist gelöst, sobald die Koordinaten aller Punkte als Funktionen der Zeit in Gestalt von Tabellen oder durch Zeichnungen wiedergegeben sind.

Nachdem dies geschehen ist, wird man sich die Frage vorzulegen haben, inwiefern man das bisher gehandhabte Verfahren verbessern kann. Das zuerst beliebig gewählte Bezugssystem wird nicht zur möglichst einfachen Beschreibung des ganzen Geschehens geführt haben; es wird sich vielmehr empfehlen, nachträglich eine Umrechnung auf ein anderes Bezugssystem vorzunehmen, das eine möglichst einfache Darstellung gestattet. Die früheren Beobachtungen werden dadurch nicht wertlos, da sie durch bloße Koordinatenumformungen sofort wieder nutzbar gemacht werden können. Auch Abweichungen im Gange der Normaluhr, die bei den ursprünglichen Beobachtungen als maßgebend angesehen wurde, gegenüber einer in anderer Weise festzusetzenden Zeitfolge, die sich etwa mehr empfehlen sollte, kann man nachträglich leicht Rechnung tragen.

Gegen das zuerst gewählte Koordinatensystem beschreibt der Massenmittelpunkt des Punkthaufens irgend eine Bahn, die sich aus den bereits vorgenommenen Beobachtungen leicht ermitteln läßt. Daran werden die Beobachter, die wir uns mit allen Kenntnissen ausgerüstet denken müssen, die uns zu Gebote stehen, zweifellos Anstoß nehmen und sie werden daher einem Vorschlage allgemein zustimmen, die Willkür, die ihnen bei der Wahl des Bezugssystems offen gelassen ist, zur Festlegung eines neuen Koordinatensystems zu benutzen, in dem der Massenmittelpunkt des ganzen Punkthaufens dauernd in Ruhe bleibt. Das geschieht, indem verabredet wird, daß der Ursprung des künftighin zu benutzenden Koordinatensystems stets mit dem Massenmittelpunkt zusammenfallen soll. Die Richtungen der Koordinatenachsen mögen dabei zunächst in beliebiger Weise, etwa so wie vorher festgelegt werden.

Bei dieser ersten Verbesserung wird man es aber nicht bewenden lassen. Man bilde für das jetzt gültige zweite Koordinatensystem den Drall des ganzen Punkthaufens, also die Summe der statischen Momente der Bewegungsgrößen aller materiellen Punkte. Da der Schwerpunkt gegen das zweite Koordinatensystem in Ruhe ist, bleibt es gleichgültig, welchen Punkt man dabei als Momentenpunkt annimmt; man kann dazu den Ursprung wählen. Der Drall ist eine gerichtete Größe, die sich für jeden Augenblick auf Grund der vorhergegangenen Feststellungen nach Größe und Richtung, bezogen auf das zweite Koordinatensystem ermitteln läßt. Die Beobachter wissen, welche wichtige Rolle der Drall in der für unsere Welt gültigen Dynamik spielt und sie werden auf Grund dieser Kenntnis vermuten, daß es sich auch für die Lösung der ihnen innerhalb ihres Punkthaufens gestellten Aufgabe empfehlen wird, vom zweiten Bezugssysteme nunmehr zu einem dritten überzugehen, in dem der Drall dauernd gleich Null bleibt.

Das steht ihnen jedenfalls frei und das ist auch sofort ausführbar. Das dritte Koordinatensystem, dessen Ursprung natürlich immer noch mit dem Massenmittelpunkt zusammenfallen soll, muß sich dazu in jedem Augenblicke gegen das zweite mit solcher Geschwindigkeit und um eine solche Achse drehen, daß der Drall eines starren Körpers, der aus den materiellen Punkten in ihren augenblicklichen Lagen gebildet ist, für diese Winkelgeschwindigkeit, bezogen auf das zweite Koordinatensystem, mit dem vorher ermittelten Dralle für die tatsächlich festgestellten Bewegungen des Punkthaufens übereinstimmt.

Durch diese Betrachtungen ist der Weg gewiesen, auf dem der Beobachter zu einer Aufstellung gelangen kann, für die der Schwerpunkt des ganzen Punkthaufens ruht und der Drall der Bewegung dauernd gleich Null ist. Welchen Vorteil bietet aber nun diese Wahl des Bezugssystems? Das zeigt sich, wenn wir nach der Erledigung der geometrischen Beschreibung der Bewegungen dazu übergehen, nach ihren Ursachen, d. h. nach einem festen gesetzmäßigen Zusammenhang zu suchen, auf Grund dessen die weitere Bewegung in Übereinstimmung mit dem Ergebnisse der Beobachtung vorausgesagt werden kann. Wir wissen schon, daß die Einführung des Kraftbegriffes sich dazu sonst sehr geeignet erwiesen hat. Wenn nun auch bei der Aufgabe, mit der wir uns hier zu beschäftigen haben, von vornherein keineswegs feststeht, ob der Kraftbegriff hier ebenfalls so wie in anderen Fällen, die sich auf tatsächlich von uns beobachtete Naturvorgänge beziehen, zu einer einfachen gesetzmäßigen Darstellung zu führen vermag, so werden unsere Beobachter, die von den früheren Fällen Kenntnis haben, jedenfalls den Versuch dazu machen.

Man wird also das Produkt aus der von vornherein gegebenen Masse jedes materiellen Punktes und der auf das soeben angenommene Koordinatensystem bezogenen Beschleunigung als eine Kraft deuten, die an dem Punkte angreift. Der Vorteil des gewählten Bezugssystems zeigt sich dann darin, daß nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunkts und nach dem Flächensatze keine äußeren Kräfte an dem Punkthaufen anzubringen sind, sondern alle Kräfte nur als innere betrachtet werden können, die zwischen den einzelnen Punkten des Haufens übertragen werden. Die beiden genannten Sätze sind nämlich ohne weiteres anwendbar, da sie nur mathematische Folgerungen der dynamischen Grundgleichung bilden, also aus einer Gleichung hervorgehen, die im Falle unseres Punkthaufens infolge der Definition für die an einem materiellen Punkte angreifende Kraft ohne weiteres erfüllt ist.

Zugleich ist ferner durch die Wahl des Bezugssystems erreicht, daß für die in der angegebenen Weise definierten Kräfte das Wechselwirkungsgesetz in seiner allgemeinsten Fassung erfüllt ist. Da nämlich gemäß den getroffenen Festsetzungen jederzeit $\Sigma m \mathfrak{r} = 0$ ist, folgt, daß auch $\sum m \frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} = 0$ und daher $\Sigma \mathfrak{P} = 0$ ist, wenn wir diese Buchstaben in der von früher her bekannten Bedeutung gebrauchen, nämlich unter $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor von m in dem zuletzt gewählten Bezugssysteme und unter $\mathfrak{P}$ die an dem zugehörigen Punkte angreifende Kraft verstehen. Ebenso folgt aus der durch die Wahl des Koordinatensvstems erfüllten Bedingung, daß zu jeder Zeit

$$\Sigma \mathrm{V} m \mathfrak{v} \mathfrak{r} = 0$$

oder, wenn wir die äußeren Produkte durch eckige Klammern bezeichnen,

$$\Sigma m [\mathfrak{v} \mathfrak{r}] = 0$$

wird, durch Differentiation auch

$$\sum \mathrm{V}\, m \frac{d \mathfrak{v}}{dt} \mathfrak{r} = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma \mathrm{V}\, \mathfrak{P} \mathfrak{r} = 0,$$

oder in anderer Schreibweise

$$\sum m \left[\frac{d \mathfrak{v}}{dt} \mathfrak{r}\right] = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma [\mathfrak{P} \mathfrak{r}] = 0.$$

Die beiden Gleichungen $\Sigma \mathfrak{P} = 0$ und $\Sigma [\mathfrak{P} \mathfrak{r}] = 0$ bilden aber zusammen den analytischen Ausdruck für die Gültigkeit des Wechselwirkungsgesetzes in der aus Band I, § 21 bekannten allgemeineren Form.

Man sieht leicht die Wichtigkeit dieser Betrachtungen für eine kritische Würdigung der Grundlagen der Mechanik ein. Denn es folgt daraus, daß auch in einer Welt, die ganz anderen Gesetzen unterworfen wäre, als die uns aus der Erfahrung bekannte wirkliche Welt, ein Beobachter trotzdem eine Dynamik aufstellen könnte, die sich mit der unsrigen in den Grundzügen deckt. Durch passende Wahl des Bezugssystems in Verbindung mit der vorher angegebenen Definition des Kraftbegriffes könnte er es immer erreichen, daß die dynamische Grundgleichung mit allen aus ihr gezogenen Folgerungen, sowie das Wechselwirkungsgesetz erfüllt sind. Die Abweichung der Gesetze jener anderen Welt gegenüber der unsrigen würde sich erst herausstellen, wenn der Beobachter untersuchte, was für Kräfte unter gegebenen Umständen an den einzelnen materiellen Punkten angreifen.

Daraus folgt zugleich, daß auch bei dem Aufbau unserer Mechanik die Erfahrung erst an dieser Stelle einsetzt, während alles, was vorausgeht, nicht aus der Erfahrung entspringt, sondern durch die von uns gewählte besondere Darstellungsmethode hineingetragen wird. Das gilt auch für die sogenannte „absolute“ Bewegung, nämlich von den Bewegungen der materiellen Punkte unserer wirklichen Welt gegen das in der vorher beschriebenen Weise für sie konstruierte Koordinatensystem, das wir auch als das Hauptbezugssystem bezeichnen wollen. Ein Gegensatz zur relativen Bewegung soll damit nicht hervorgehoben werden, wenn hier von der absoluten Bewegung gesprochen wird. Vielmehr wird nur unter allen an sich möglichen und geometrisch sonst ganz gleichberechtigten Arten, die Bewegungen innerhalb unserer Welt zu beschreiben, eine besonders hervorgehoben, weil sie zu der einfachsten Fassung der Kraftgesetze führt, und ihr ein besonderer Namen gegeben, der darauf hinweisen soll.

Man kann auch umgekehrt verlangen, zu einem in beliebiger Weise bewegten isolierten Punkthaufen ein Bezugssystem aufzusuchen, für das das Wechselwirkungsgesetz für die zwischen den Punkten des Haufens auftretenden inneren Kräfte erfüllt ist, und zwar natürlich so, daß äußere Kräfte dabei nicht zu Hilfe genommen werden müssen. Das vorher besprochene Bezugssystem, für das der Schwerpunkt ruht und der Drall stets gleich Null bleibt, genügt, wie wir schon wissen, den Bedingungen dieser Aufgabe: aber es ist nicht das einzige. Man kann auch Koordinatensysteme angeben, deren Ursprung ebenfalls mit dem Schwerpunkt zusammenfällt, die sich aber gegen das vorige stets so drehen, daß der Drall dauernd irgend einen Vektor von beliebig angenommener Größe und Richtung darin bildet. Für diese ist dann $\Sigma[m\mathfrak{v}\mathfrak{r}] = \mathfrak{C}$, worin $\mathfrak{C}$ eine Konstante bedeutet.

Durch Differentiation nach der Zeit findet man aber daraus, wie vorher, $\Sigma[\mathfrak{P}\mathfrak{r}] = 0$, d. h. das Wechselwirkungsgesetz ist auch in allen diesen Fällen erfüllt. Die bloße Forderung, das Wechselwirkungsgesetz zu erfüllen, reicht daher nicht aus, um das Bezugssystem eindeutig festzulegen. Das Hauptbezugssystem zeichnet sich indessen vor den übrigen, die die genannte Eigenschaft mit ihm teilen, auch noch dadurch aus, daß die lebendige Kraft darin den angemessensten Wert erhält, wie ich sofort näher ausführen werde.

§ 3. Die lebendige Kraft bei der relativen Bewegung.

Wir kehren zurück zu dem im Anfange des vorigen Paragraphen besprochenen Falle eines isolierten Punkthaufens, dessen Bewegung relativ zu einem in beliebiger Weise festgelegten Koordinatensystem bereits dargestellt sein soll. Wir berechnen die über alle Punkte des Haufens erstreckte Summe

$$L = \tfrac{1}{2}\Sigma m \mathfrak{v}^2$$

und bezeichnen sie als die lebendige Kraft des Punkthaufens in bezug auf das gewählte Koordinatensystem.

Zunächst ist leicht einzusehen, daß der Satz von der lebendigen Kraft für diese relative Bewegung seine Gültigkeit in der gewöhnlichen Form behält, obschon ihm jetzt keineswegs die Bedeutung eines Naturgesetzes, sondern nur eine formale Bedeutung zukommt, weil wir uns die Kräfte an den materiellen Punkten nicht besonders gegeben denken, sondern sie erst aus den beobachteten Beschleunigungen ableiten. Bezeichnen wir nämlich die Kraft am Punkt i mit $\mathfrak{P}_i$ und das im Zeitelemente dt relativ zu dem gewählten Koordinatensystem zurückgelegte Wegelement mit $d\mathfrak{s}_i$, so hat man

$$\mathfrak{P}_i d\mathfrak{s}_i = m_i \frac{d\mathfrak{v}_i}{dt} \cdot \mathfrak{v}_i dt = m_i \mathfrak{v}_i d\mathfrak{v}_i = \tfrac{1}{2} m_i d(\mathfrak{v}_i^2),$$

woraus bei Summation über alle Punkte

$$\Sigma \mathfrak{P} d\mathfrak{s} = dL \tag{1}$$

folgt. Diese Gleichung spricht aber den Satz von der lebendigen Kraft aus, der somit auch für die relativen Bewegungen gilt, falls man nur die Kräfte an jedem Punkte proportional mit den relativen Beschleunigungen wählt.

Wir fragen ferner, wie sich die lebendige Kraft ändert, wenn man von einem Koordinatensystem zu einem anderen übergeht. Zu diesem Zwecke gehen wir zuerst aus von dem Hauptbezugssysteme, das im vorigen Paragraphen eingeführt war, also von jenem, in dem der Schwerpunkt ruht und der Drall jederzeit gleich Null ist. Die Geschwindigkeit von m_i relativ zu diesem sei zum Unterschiede mit $\mathfrak{v}_i'$ bezeichnet. Die zugehörige lebendige Kraft ist dann

$$L' = \tfrac{1}{2}\Sigma m \mathfrak{v}'^2. \tag{2}$$

Nun sei ein anderes Koordinatensystem betrachtet, das mit dem Hauptbezugssysteme im Ursprung zusammenfällt und sich dagegen mit einer Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ dreht, die irgend eine Funktion der Zeit sein kann. Auf dieses System beziehe sich die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_i$; dann kann

$$\mathfrak{v}_i = \mathfrak{v}_i' + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}_i] \tag{3}$$

gesetzt werden, und für die lebendige Kraft L, bezogen auf das neue Koordinatensystem, erhält man

$$L = \tfrac{1}{2}\Sigma m \mathfrak{v}^2 = \tfrac{1}{2}\Sigma m \mathfrak{v}'^2 + \Sigma m \mathfrak{v}'[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}] + \tfrac{1}{2}\Sigma m [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]^2.$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes ist gleich L'. Das zweite Glied wird zu Null. Um dies zu zeigen, machen wir von dem Satze der Vektoranalysis

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}] \tag{4}$$

Gebrauch, der in den früheren Bänden dieses Werkes noch nicht angewendet wurde und daher hier zuerst zu beweisen ist.

Nach der Definition des äußeren Produktes (Band I, Gl. 53) hat man

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{i}(B_2C_3 - B_3C_2) + \mathfrak{j}(B_3C_1 - B_1C_3) + \mathfrak{k}(B_1C_2 - B_2C_1),$$

und daher wird

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = A_1(B_2C_3 - B_3C_2) &+ A_2(B_3C_1 - B_1C_3)\\ &+ A_3(B_1C_2 - B_2C_1).\end{aligned}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite läßt sich aber durch andere Zusammenfassung der Glieder auch in der Form

$$B_1(C_2A_3 - C_3A_2) + B_2(C_3A_1 - C_1A_3) + B_3(C_1A_2 - C_2A_1)$$

schreiben, was mit der Entwicklung von $\mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}]$ zusammenfällt. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir erhalten nun durch Anwendung dieses Satzes

$$\Sigma m \mathfrak{v}'[\mathfrak{u}\mathfrak{r}] = \Sigma m \mathfrak{u}[\mathfrak{r}\mathfrak{v}'] = \mathfrak{u}\Sigma m[\mathfrak{r}\mathfrak{v}'] = -\mathfrak{u}\Sigma[m\mathfrak{v}'\mathfrak{r}],$$

wobei der konstante Faktor $\mathfrak{u}$ herausgehoben werden konnte. Der zuletzt vorkommende Summenausdruck gibt aber den Drall des Punkthaufens für das Hauptbezugssystem an, der nach Definition gleich Null ist In der Tat verschwindet daher das zweite Glied in dem Ausdrucke für L.

Auch für die Umformung des dritten Gliedes stützen wir uns auf einen Satz der Vektor-Algebra. Nach dem vorhergehenden Satze hat man nämlich, indem man $\mathfrak{A}$ in Gl. (4) durch $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ ersetzt,

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] \cdot [\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{B}[\mathfrak{C}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]]$$

und andererseits ist nach einem schon in Band IV (Gl. 118 der 6. Aufl.) bewiesenen Satze

$$[\mathfrak{C}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}^2 - \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{C}.$$

Im Ganzen wird daher

$$[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]^2 = \mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2 - (\mathfrak{B}\mathfrak{C})^2. \tag{5}$$

Wenden wir diesen Satz auf das dritte Glied in dem Ausdrucke für L an, so erhalten wir

$$\Sigma m[\mathfrak{u}\mathfrak{r}]^2 = \mathfrak{u}^2 \Sigma m \mathfrak{r}^2 - \Sigma m(\mathfrak{u}\mathfrak{r})^2.$$

Setzen wir hierin $\mathfrak{u} = u\mathfrak{u}_1$, verstehen also unter $\mathfrak{u}_1$ den in der Richtung von $\mathfrak{u}$ gezogenen Einheitsvektor, so geht dies über in

$$u^2 \Sigma m(\mathfrak{r}^2 - (\mathfrak{u}_1\mathfrak{r})^2).$$

Nun ist $\mathfrak{u}_1\mathfrak{r}$ die Projektion von $\mathfrak{r}$ auf die Richtung von $\mathfrak{u}$, und nach dem Pythagoreischen Satze stellt daher die Summe das Trägheitsmoment des Punkthaufens in bezug auf die Achse $\mathfrak{u}$ dar. Schreiben wir dafür Θ, so wird schließlich

$$L = L' + \tfrac{1}{2}u^2\Theta. \tag{6}$$

Da die Punkte nicht alle in einer einzigen Geraden liegen sollten, ist Θ für alle Achsen, die man ziehen mag, eine von Null verschiedene positive Größe. Es ist daher bewiesen, daß die lebendige Kraft für das Hauptbezugssystem kleiner ist als für jedes andere Koordinatensystem, das mit jenem den Ursprung gemeinsam hat.

Dieser Satz läßt sich sofort auch auf jedes andere Koordinatensystem übertragen, bei dem die angegebene Beschränkung wegfällt. Zu jedem beliebig festgelegten Koordinatensysteme läßt sich nämlich ein zweites angeben, das ihm jederzeit parallel bleibt, dessen Ursprung aber wie vorher mit dem Schwerpunkt des Punkthaufens zusammenfällt. Die Geschwindigkeiten relativ zu dem einen unterscheiden sich dann von denen relativ zu dem andern um ein konstantes Glied $\mathfrak{a}$, das die augenblickliche Geschwindigkeit der Translationsbewegung beider Koordinatensysteme gegeneinander angibt. Bildet man nun von neuem die lebendige Kraft, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m(\mathfrak{v}+\mathfrak{a})^2 = \tfrac{1}{2}\Sigma m\mathfrak{v}^2 + \Sigma m\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{a} + \tfrac{1}{2}\Sigma m\mathfrak{a}^2.$$

Für das dauernd mit dem Schwerpunkt zusammenfallende Koordinatensystem ist aber $\Sigma m\mathfrak{v} = 0$. Die lebendige Kraft in bezug auf ein beliebiges Koordinatensystem läßt sich daher, wenn wir den Buchstaben L jetzt darauf beziehen, in der aus Gl. (6) hervorgehenden Form

$$L = L' + \tfrac{1}{2}u^2\Theta + \tfrac{1}{2}a^2 M \tag{7}$$

anschreiben und daraus folgt, daß in der Tat die lebendige Kraft für das Hauptbezugssystem kleiner ist als für jedes andere mögliche Bezugssystem. Unter M ist in der vorhergehenden Formel natürlich die Gesamtmasse des ganzen Haufens und unter a der Absolutbetrag der Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{a}$ zu verstehen.

Ein mit unserer Wissenschaft vertrauter Beobachter, der jetzt nur mit dem ihm gegebenen isolierten Punkthaufen zu tun hat, der unbekannten und erst noch zu erforschenden Wirkungsgesetzen unterworfen ist, wird bei der ihm freistehenden Wahl des Bezugssystems Rücksicht darauf nehmen, was sich in einer anderen, nämlich in unserer wirklichen Welt schon bewährt hat. Er wird daher dafür sorgen, daß ein Begriff, der für unsere Physik von so großer Bedeutung geworden ist, wie der Energiebegriff, womöglich auch für ihn anwendbar bleibt. Wenn die lebendige Kraft des Punkthaufens aber als eine „Energie“ angesehen werden soll, muß sie einen nur durch die relativen Bewegungen der Massen zueinander eindeutig bestimmten Wert haben. Durch diese Forderung wird die vorher noch bestehende Willkür in der Wahl des Bezugssystems aufgehoben; nur für das Hauptbezugssystem, wie wir es vorher schon genannt haben, erhält die lebendige Kraft einen solchen ausgezeichneten und hiermit zugleich eindeutig bestimmten Wert. Ob sich in einer anderen, uns ganz fremden Welt, wie sie durch den isolierten

Punkthaufen angedeutet werden soll, der Energiebegriff auch noch als ein so weit reichendes Hilfsmittel zur einfachen Darstellung der vorkommenden Gesetzmäßigkeiten bewähren würde, wie bei uns, ist natürlich ganz ungewiß. Aber der Beobachter, der, aus unserer Welt kommend, sich in der ihm fremden zurecht finden soll, kann gar nicht anders handeln, als auf Grund der vorhergehenden Erwägungen das Hauptbezugssystem als das vor allen anderen ausgezeichnete zu wählen. Es steht ihm dann auch frei, die darauf bezogenen Bewegungen als die für ihn „absoluten" zu bezeichnen.

§ 4. Zeit und Masse.

Wir müssen jetzt auf einige Fragen zurückkommen, über die wir bisher stillschweigend hinweggegangen sind. Von dem Beobachter des isolierten Punkthaufens war vorausgesetzt, daß er sich im Besitze einer Uhr befinde, mit der er seine Zeitmessungen vornehme. Ob die Uhr richtig gehe oder nicht, blieb dahingestellt. Wir können jetzt noch hinzufügen, daß, selbst wenn die Uhr in unserem Sinne richtig gehen sollte, dies für den isolierten Punkthaufen, der eine Welt für sich bilden soll, ganz ohne Bedeutung ist. Welches Zeitmaß das für ihn angemessenste ist, muß der Beobachter erst selbst herausfinden, gerade so wie er sich auch das angemessenste Bezugssystem erst selbst schaffen mußte. Die Uhr, gleichgültig ob sie richtig oder falsch ging, hatte nur den Zweck, zunächst einmal einen Satz von Beobachtungen zu ermöglichen, der dann später, wenn die Abweichungen des Uhrganges von einem besser geeigneten Zeitmaße festgestellt sind, auf diese neue besser gewählte Zeit umgerechnet werden kann.

Bezeichnen wir die von der Uhr abgelesene Zeit mit t, die „wahre" Zeit, wie wir der Kürze halber sagen wollen, mit T, so wird zwischen beiden irgend ein Zusammenhang bestehen, den wir in der Form

$$t = \varphi(T)$$

zum Ausdruck bringen wollen.

Hatten wir nun ein Koordinatensystem in beliebiger Weise festgelegt, so ergaben sich die Relativgeschwindigkeiten der materiellen Punkte gegen dieses Koordinatensystem als die Differentialquotienten der darauf bezogenen Radienvektoren nach der Zeit. Die Zeit aber kann entweder die Uhrzeit t oder die wahre Zeit T sein, und je nachdem wir die eine oder die andere wählen, erhält die Gesenwindigkeit verschiedene Werte. Zwischen beiden Werten besteht indessen der einfache Zusammenhang

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dT} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{dT} = \varphi' \frac{d\mathfrak{r}}{dt} \tag{8}$$

Um von der Uhrzeit zur wahren Zeit überzugehen, genügt es daher, die Geschwindigkeit jedes Punktes mit dem für alle Punkte gleichen Faktor φ' zu multiplizieren, der selbst freilich im Laufe der Zeit seinen Wert ebenfalls ändern kann. Zu irgend einer bestimmten Zeit finden wir aber z. B. den auf die wahre Zeit bezogenen Drall aus der früheren Darstellung durch einfache Multiplikation mit dem Faktor φ', während die lebendige Kraft mit dem Quadrat von φ' zu multiplizieren ist.

Daraus folgt aber sofort, daß es für die früheren Betrachtungen, die zur Festsetzung des Hauptbezugssystems für den Punkthaufen führten, überhaupt ganz gleichgültig ist, ob dabei eine richtig- oder eine falschgehende Uhr gebraucht wurde. Denn die Bedingung, daß der Drall für das Hauptbezugssystem jederzeit verschwinden soll, bleibt immer noch erfüllt, wenn man auch jedes darin auftretende Glied mit einem konstanten Faktor multipliziert, und ebenso bleibt auch Gl. (7) immer noch bestehen, wenn auch jeder Beitrag zur lebendigen Kraft des Punkthaufens mit dem Quadrat von φ' multipliziert wird.

Anders ist es freilich mit den Kräften, denen wir, wenn die Zeitmessung geändert wird, ganz andere Werte beilegen müssen als vorher. Für die Beschleunigung im neuen Zeitmaße erhält man nämlich, wenn die Differentialquotienten von φ wieder durch Striche bezeichnet werden,

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dT^2} = \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} \cdot \varphi'^2 + \frac{d\mathfrak{r}}{dt} \varphi''. \tag{9}$$

Die Kräfte an den verschiedenen Punkten werden daher nicht nur der Größe, sondern auch der Richtung nach geändert und zwar in verschiedenem Maße.

Da nun der Beobachter durch andere zwingende Rücksichten nicht genötigt wird, eine Art der Zeitzählung vor einer anderen zu bevorzugen, so bleibt ihm nur übrig, die Wahl danach einzurichten, daß die Ausdrücke für die lebendige Kraft einerseits und die beschleunigenden Kräfte andererseits möglichst einfache, für den weiteren Gebrauch dienliche Werte erlangen. Es hängt daher von Umständen ab, über die wir bei unserem isolierten Punkthaufen keine Voraussetzungen gemacht haben, wie die Zeitskala zu wählen ist, die für den Beobachter als die angemessenste erscheint und die er aus diesem Grunde dann als die für ihn „wahre“ Zeit bezeichnen wird.

Ferner haben wir angenommen, daß für den Beobachter des isolierten Punkthaufens alle Massen von vornherein gegeben seien. Wenn man sich die Körper, die wir als materielle Punkte betrachteten, alle aus demselben Stoffe bestehend denkt, kann man dies damit rechtfertigen, daß die Massen dann einfach dem aus der Beobachtung zu entnehmenden Volumen proportional zu setzen sind. Im anderen Falle freilich würde für den Beobachter, wenn wir ihn ganz unabhängig von uns machen wollen, die weitere Aufgabe zufallen, die Verhältnisse der einzelnen Massen zueinander erst selbst noch in geeigneter Weise festzustellen. Für die Lösung dieser Aufgabe vermögen wir ihm ohne eine nähere Kenntnis des besonderen Verhaltens des Punkthaufens keine Anweisung mit auf den Weg zu geben. Man kann nur sagen, daß die Wahl jedenfalls so zu treffen ist, daß die Kraftgesetze, zu denen er bei dieser Wahl gelangt, möglichst einfach und leicht übersehbar ausfallen.

§ 5. Trägheitsgesetz und absolute Bewegung.

Der Zweck der vorhergehenden Betrachtungen besteht selbstverständlich darin, durch möglichst weitgehende Verallgemeinerung der Aufgabe, sich in einem isolierten Punkthaufen zurecht zu finden, einen Maßstab für die Lösung zu finden, die wir selbst davon für die Vorgänge in unserer wirklichen Welt im Laufe der geschichtlichen Entwicklung der Wissenschaft gegeben haben. Wir müssen daher jetzt zusehen, was zu dem, was ganz allgemein gültig ist, in unserem besonderen Falle, und zwar nicht mehr als Folge einer bloß logischen Verstandestätigkeit, sondern auf Grund der Verwertung von Beobachtungsergebnissen in unserer wirklichen Welt hinzugetreten ist.

Da steht voran das Trägheitsgesetz, und wir werden uns vor allem danach zu fragen haben, welche Bedeutung ihm im Sinne der vorhergehenden Ausführungen zukommt.

Wenn man sagt, ein materieller Punkt, an dem keine Kraft angreift, bleibe entweder in Ruhe oder er setze seine Bewegung mit unveränderter Geschwindigkeit in der gleichen Richtung fort, so ist diese Aussage ohne weitere ergänzende Zusätze ganz bedeutungslos. Zunächst kommt es ganz darauf an, welches Bezugssystem wir für die Beschreibung der Bewegung zugrunde legen. In jedem isolierten Punkthaufen können wir es durch geeignete Festlegung des Koordinatensystems erreichen, daß ein beliebiger materieller Punkt entweder ruht oder eine gleichförmig geradlinige Bewegung beschreibt. Nun haben wir freilich gesehen, daß sich in jedem isolierten Punkthaufen, wenn wir die Massen darin als gegebene Größen ansehen dürfen, ein Hauptbezugssystem angeben läßt, das wir ohnehin notwendig wählen müssen, wenn wir die wichtigsten Begriffe, die wir zur Beschreibung der Naturvorgänge ausgebildet haben, darauf anwenden wollen. Wir können daher unbedenklich sagen, daß die Aussage des Trägheitsgesetzes auf dieses Hauptbezugssystem gemünzt ist.

Aber auch, wenn sie so gedeutet wird, bleibt die Aussage des Trägheitsgesetzes znnächst noch inhaltsleer. Gewiß dürfen wir im Sinne der früheren Ausführungen sagen, daß an einem materiellen Punkte, dessen Bewegung relativ zu dem Hauptbezugssysteme oder (wie wir dafür kürzer sagen können) dessen absolute Bewegung geradlinig und gleichförmig ist, keine Kraft angreift. Aber das ist dann keine Erfahrungstatsache, sondern eine Folge der Definition des Begriffes der Kraft. In der Tat haben wir ja gar kein anderes Mittel, um die Kräfte festzustellen, die zwischen den Himmelskörpern auftreten, als sie aus den beobachteten Beschleunigungen abzuleiten.

Und doch spricht das Trägheitsgesetz eine grundlegende Erfahrungstatsache aus, wie wir auch ohne eingehendere Analyse von vornherein schon fühlen. Sie besteht in folgendem. Die Forschung hat uns dazu geführt, zwischen den Körpern bestimmte Kräfte anzunehmen, die von verhältnismäßig leicht übersehbaren Umständen abhängen und die einfachen Wirkungsgesetzen unterliegen. Die Physik liefert uns ein Verzeichnis dieser Kräfte und die Erfahrung zeigt uns, daß dieses Verzeichnis in der Tat ziemlich vollständig sein muß. Wir können uns nun auf Grund dieser Kenntnis sehr wohl einen materiellen Punkt in unserer Welt vorstellen, der sich unter solchen Umständen befindet, daß die in jenem Verzeichnis aufgeführten Kräfte entweder überhaupt (ganz oder nahezu) wegfallen oder sich gegenseitig aufheben. Das Trägheitsgesetz sagt uns dann aus, daß der materielle Punkt unter diesen Umständen (entweder ganz oder nahezu) eine geradlinig gleichförmige Bewegung beschreibe oder daß andernfalls das Verzeichnis der Kräfte noch nicht vollständig sei. In diesem Falle läge eine Entdeckung vor, und es würde dann die Aufgabe einer näheren Erforschung des Sachverhalts sein, das Verzeichnis der aus der Erfahrung bekannten Kräfte entsprechend zu ergänzen.

Als Inhalt des Trägheitsgesetzes ist daher der Ausdruck der Überzeugung der Naturforschung anzusehen, daß sie mit den von ihr aufgestellten Gesetzen über das Auftreten besonderer Kräfte die Bewegungsvorgänge im Hauptbezugssysteme (abgesehen von geringfügigen Ausnahmen, die noch ihrer Eingliederung in das bestehende System harren mögen) vollständig darzustellen vermag. Oder mit anderen Worten: Bei der Aussage des Trägheitsgesetzes ist der Ton auf das Wort „Kraft“ zu legen und darunter eine von jenen Kräften zu verstehen, die von der Physik anerkannt und näher besprochen sind. Das sind also die Oberflächenkräfte, die zwischen Körpern übertragen werden, die in Berührung miteinander stehen, dann die Newtonsche Gravitationskraft und die elektrischen und magnetischen Fernkräfte. Daß eine Kraft eine Beschleunigung hervorbringt, ist also nach unserer Darstellung die Folge der Definition des Wortes Kraft; daß aber die in der wirklichen Welt zu beobachtenden Kräfte, diese bezogen auf das Hauptbezugssystem, sich alle in diese kurze Liste einreihen lassen, ist ein Ergebnis der experimentellen Forschung, und nichts anderes als dieses Ergebnis kommt im Trägheitsgesetze zum Ausdrucke.

Wenn eine solche theoretische Darstellung der Bewegungsvorgänge möglich sein soll, muß sie mit einer bestimmten Art der Zeitmessung verbunden sein. Wir sahen vorher, daß im isolierten Punkthaufen die Zeitskala von vornherein willkürlich ist und daß die Entscheidung über die angemessenste Art der Zeitzählung erst aus besonderen Erfahrungen über die Einzelheiten der Bewegungsvorgänge abgeleitet werden kann. In unserem Falle wird durch das Trägheitsgesetz darüber entschieden. Ein materieller Punkt, an dem keine der allgemein anerkannten Kräfte wirkt, beschreibt gegen das Hauptbezugssystem nach dem Trägheitsgesetze eine geradlinige, gleichförmige Bewegung. Damit ist die Zeitskala festgelegt. Wir müssen unsere Uhren so einrichten oder ihre Angaben nötigenfalls derart verbessern, daß sie um gleich viel fortschreiten, während ein zu unserer Welt gehöriger materieller Punkt unter den angegebenen Umständen gleiche Wege durchlaufen hat. Gleichbedeutend damit ist auch die Forderung, daß ein materieller Punkt, der einer Zentralkraft unterworfen ist, in gleichen Zeiten gleiche Sektorenflächen beschreibt, oder daß sich ein starrer Körper, der um eine Hauptträgheitsachse rotiert, in gleichen Zeiten um gleiche Winkel dreht, wenn keine Kräfte an ihm wirken, oder nur solche, die sich zu einer durch den Massenmittelpunkt gehenden Resultierenden zusammensetzen lassen. Denn daß dies so sein muß, bildet eine notwendige Folgerung aus dem Trägheitssatze, wie schon aus den Lehren des vierten Bandes bekannt ist.[1])

Die früheren Ausführungen über die Bedeutung des Trägheitsgesetzes sind daher noch dahin zu ergänzen, daß es zugleich eine Anweisung dafür liefert, wie die Zeiten zu zählen sind, oder mit anderen Worten, was wir in unserer Welt unter der „wahren“ Zeit zu verstehen haben.

Ähnlich ist es auch mit den Massen. Wenn wir einen Vorgang zu beobachten vermögen, bei dem nur zwei Körper, die wir als materielle Punkte ansehen können, Kräfte aufeinander ausüben, während alle anderen Kräfte davon ausgeschlossen sind, folgt das Verhältnis der Massen der beiden Punkte aus dem Verhältnisse ihrer Beschleunigungen gegen das Hauptbezugssystem. Denn das Gesetz der Wechselwirkung ist, wie wir schon früher erkannten, bereits durch die Wahl des Hauptbezugssystems für die Gesamtheit aller Kräfte erfüllt und muß auch noch erfüllt

1) An dieser Stelle muß nochmals daran erinnert werden, daß alle vorhergehenden Betrachtungen auf der Annahme einer unendlich großen Lichtgeschwindigkeit beruhen. Nur unter dieser Voraussetzung kann überhaupt von der Festsetzung einer allgemein anwendbaren „Zeitskala“ die Rede sein. Das ist der Standpunkt der Galilei-Newtonschen Mechanik, der an sich berechtigt ist, wenn er auch nur als eine Vorstufe zur heutigen Relativitätsmechanik anzusehen ist. Er ist berechtigt, weil er mit den einfachsten Mitteln zu einer sehr genauen Darstellung des erfahrungsmäßigen Geschehens führt. Für die Relativitätsmechanik fällt mit der „wahren“ Zeit zugleich auch das Trägheitsgesetz.

Aber auch in Zukunft wird der Zugang zur allgemeinen Dynamik über das Trägheitsgesetz und die Galilei-Newtonsche Lehre erfolgen müssen. Mit dieser einfacheren Lehre wird man sich zuerst vertraut machen müssen, ehe man das Verständnis für die Relativitätstheorie aufbringen kann, bleiben, wenn die Kräfte zwischen diesen Punkten neu hinzutreten, woraus hervorgeht, daß auch die beiden Kräfte für sich dem Wechselwirkungsgesetze genügen.

Natürlich ist es nicht möglich, alle Massen, mit denen wir zu tun haben, auf diesem Wege miteinander zu vergleichen. Hier tritt vielmehr noch die Erfahrung ergänzend hinzu, daß, so oft wir einen solchen Versuch auch erneuern mögen, sich dabei immer wieder herausstellt, daß gleiche Rauminhalte von chemisch und physikalisch gleichen Stoffen auch gleiche Massen besitzen.

An sich sind die Kräfte ihrer Definition nach von dem Koordinatensystem abhängig, auf das wir die Beschreibung der Bewegungen innerhalb des Punkthaufens beziehen. Es war daher schon von vornherein darauf hinzuweisen, daß jede Aussage über eine Kraft ein bestimmtes Bezugssystem fordert und daß insbesondere das Trägheitsgesetz dahin zu erläutern ist, daß das Hauptbezugssystem unseres Weltalls dabei zugrunde gelegt werden muß. Auch alle Aussagen der Experimentalphysik über die unter besonderen Umständen auftretenden Kräfte sind in diesem Sinne zu verstehen. Hierbei ist jedoch zu bemerken, daß es bei den Kräften nur auf die Beschleunigungen ankommt und daß es daher für sie nichts ausmacht, wenn man das Hauptbezugssystem mit einem anderen Koordinatensystem vertauscht, in dem die Beschleunigungen dieselben Werte behalten. Das trifft bei jedem Koordinatensysteme zu, das gegen das Hauptbezugssystem eine geradlinige gleichförmige Translationsbewegung beschreibt. Jedes Bezugssystem, von dem dies zutrifft, vermag daher bei der Aussage des Trägheitsgesetzes das Hauptbezugssystem zu ersetzen und wird aus diesem Grunde als ein Inertialsystem bezeichnet. Ferner ist auch zu bedenken, daß es bei der experimentellen Bestimmung von Kräften, die stets mit unvermeidlichen Versuchsfehlern behaftet ist, gewöhnlich gar nichts ausmacht, wenn man die Kräfte anstatt auf ein Inertialsystem auf ein anderes Koordinatensystem, das etwa mit der Erde fest verbunden ist, bezieht, falls darin die Beschleunigungen so wenig von denen gegen ein Inertialsystem abweichen, daß die Abweichungen gegenüber den Messungsfehlern unerheblich sind.

Die im Hauptbezugssysteme oder in einem Inertialsysteme festgestellten Kräfte kann man der kürzeren Ausdrucksweise wegen als die „wirklich vorhandenen“ oder die „physikalisch existierenden“ Kräfte bezeichnen. Zu ihnen kommen, sobald man auf ein anderes Koordinatensystem übergeht, die „Ergänzungskräfte der Relativbewegung“, wie dies schon im vierten Bande ausführlich besprochen wurde. Nachdem sie beigefügt sind, ist für diese neue Aufstellung des Beobachters wieder die dynamische Grundgleichung mit den bereits bestimmten Kräften, ferner auch der Flächensatz, der Satz von der lebendigen Kraft usf. erfüllt. Dagegen ist das Wechselwirkungsgesetz nicht mehr allgemein erfüllt und auch die relative lebendige Kraft kann nicht mehr allgemein als eine Energiegröße gedeutet werden, in dem Sinne etwa, daß die Umwandlung von lebendiger Kraft in Wärme unter allen Umständen nach einem festen Verhältnisse erfolgen müßte. Darauf wird noch zurückzukommen sein. In der zuletzt genannten Hinsicht zeichnet sich das Hauptbezugssystem in der Tat vor allen anderen und zwar auch vor den übrigen Inertialsystemen in sehr vorteilhafter Weise aus, so daß wir alle Ursache haben, dies durch einen besonderen Namen hervorzuheben, indem wir die darauf bezogenen Bewegungen als die absoluten Bewegungen bezeichnen.

Das „Hauptbezugssystem“ bildet eine Forderung der von uns gewählten Darstellung der Bewegungsvorgänge im Weltall. Die Anweisung, die ursprünglich zu seiner Ermittlung aufgestellt wurde, läßt sich aber praktisch nicht ausführen, da wir nicht über alle Massen und ihre Verteilung im ganzen Weltraume unterrichtet sind. Nimmt man jedoch an, daß die Hauptmassen mit den sichtbaren Fixsternen verbunden sind, so folgt, daß es diesen gegenüber festzulegen ist. Ein Koordinatensystem, das in geeigneter Weise gegen den Fixsternhimmel orientiert ist, kann daher keine merkliche Drehbewegung gegen das geforderte Hauptbezugssystem mehr ausführen. Als eine Aufgabe der Astronomie ist es zu betrachten, diese Orientierung so genau als möglich zu bewirken.

Um die Betrachtungen über das Trägheitsgesetz nochmals kurz zusammenzufassen, können wir sagen, daß es sich durch einen einfachen Satz ebensowenig vollständig wiedergeben läßt, wie etwa der Inhalt eines Buches durch die Angabe des Titels. Das Trägheitsgesetz ist nicht ein einfacher Erfahrungssatz, sondern es bildet das Programm, nach dem wir unsere Naturbeschreibung durchzuführen entschlossen sind: freilich ein Programm, das nicht willkürlich gewählt ist, für das wir uns vielmehr nur deshalb entscheiden, weil die Erfahrung uns bereits gelehrt hat, daß es zu einer einfachen und fruchtbringenden Auffassung der Naturvorgänge führt.

Freilich sind alle vorhergehenden und auch die weiterhin noch folgenden Ausführungen nur insoweit gültig, als die Voraussetzung zutrifft, auf denen sie beruhen, nämlich die Voraussetzung, daß die Lichtgeschwindigkeit als unendlich groß angesehen werden kann. Im anderen Falle sind sie durch die Relativitätstheorie zu ersetzen. Für diese bildet das Trägheitsgesetz kein streng gültiges Naturgesetz und auch alle anderen Aussagen, die damit zusammenhängen, sind entsprechend zu ändern. Das hindert aber nicht, daß wir hier zu einer Darstellung gelangen, die als Grenzfall der Relativitätstheorie angesehen werden kann und die daher ihren Wert behält für die Beurteilung aller Fragen, bei denen sich ein Einfluß der endlichen Lichtgeschwindigkeit nicht bemerklich machen kann.

§ 6. Zwei Punkthaufen.

Wir wollen jetzt die allgemeinen Betrachtungen über den isolierten Punkhaufen noch etwas weiter führen. Dabei nehmen wir an, daß der Beobachter die ihm früher gestellte Aufgabe für einen ihm beliebig gegebenen isolierten Punkthaufen bereits gelöst, insbesondere also dessen Hauptbezugssystem festgestellt und sich für ein geeignetes Zeitmaß entschieden habe. Außerdem möge es ihm auch bis zu einem gewissen Grade schon gelungen sein, durch die Aufstellung von besonderen Kraftgesetzen, die von den unsrigen natürlich vollständig abweichen können, eine ausreichende Beschreibung von den nun für ihn als „absolute“ zu bezeichnenden Bewegungen zu geben. Nachdem er so weit gekommen ist, möge er plötzlich bemerken, daß außer dem ersten Punkthaufen in einiger Entfernung davon noch ein zweiter vorhanden ist, der seiner Beobachtung bis dahin ganz entgangen war. Wie wird er sich nun dieser Entdeckung gegenüber zu verhalten haben?

Die nächsten Schritte sind klar vorgezeichnet. Der Beobachter wird vorerst die Bewegungen innerhalb des zweiten Punkthaufens feststellen, und wir setzen voraus, daß ihm hierzu wie im früheren Falle die Mittel ohne weiteres zu Gebote stehen. Welches Koordinatensystem er anfänglich dazu benutzt, ist ziemlich gleichgültig, obschon es ihm am nächsten liegt, vorläufig das ihm bereits gewohnt gewordene Hauptbezugssystem des ersten Punkthaufens zu wählen. Dann wird er aber ferner auch für den zweiten Punkthaufen nach denselben Grundsätzen wie früher für den ersten das für diesen für sich gültige Hauptbezugssystem ableiten. Und endlich wird er erwägen, ob es nicht vorteilhafter für ihn ist, beide Punkthaufen zusammen als ein Ganzes zu betrachten und für den vereinigten Punkthaufen ebenfalls dessen Hauptbezugssystem aufsuchen, Dadurch gewinnt er drei verschiedene Aufstellungen, die wir in der angegebenen Reihenfolge als die erste, zweite und dritte bezeichnen wollen und deren Bedeutung nun gegeneinander abzuwägen ist.

Je nach der Aufstellung wirken an den einzelnen materiellen Punkten verschiedene Kräfte. Wir hatten angenommen, daß für die erste Aufstellung die Kräfte im ersten Punkthaufen schon durch einfache, aus den Beobachtungen abgeleitete Kraftgesetze in befriedigender Weise dargestellt worden seien. Daraus folgen dann die auf die dritte Aufstellung bezogenen Kräfte durch Beifügung der Ergänzungskräfte nach dem Satze von Coriolis, denn die Bewegung des ersten und des dritten Bezugssystem gegeneinander ist auf Grund der vorgenommenen Beobachtungen als bereits bekannt anzusehen. Die Mühe, die vorher darauf verwendet worden war, die Kraftgesetze innerhalb des ersten Punkthaufens aufzustellen, ist also durch die jetzt eingetretene Erweiterung der Aufgabe nicht verloren gegangen, sondern ihr Ergebnis kann nach einfacher Umrechnung mittels des Satzes von Coriolis sofort übernommen werden. Dasselbe trifft auch für den zweiten Punkthaufen zu, falls sich herausstellen sollte, daß sich auch für die in ihm vorkommenden Bewegungen, bezogen auf die zweite Aufstellung, ähnlich einfache Kraftgesetze angeben lassen wie vorher für den ersten.

Aber nun entsteht die Frage, welche Aufstellungsart weiterhin den Vorzug verdient oder welche, wie man in solchen Fällen zu sagen pflegt, die naturgemäße ist. Denn unter der Voraussetzung, daß beide Punkthaufen stets so weit entfernt voneinander bleiben, daß sie stets deutlich voneinander getrennt werden können, ist es offenbar ganz dem Gutdünken des Beobachters überlassen, ob er jeden Punkthaufen unter Zugrundelegung der ersten und zweiten Aufstellung für sich als isolierten Punkthaufen behandeln, oder ob er beide von vornherein zu einer höheren Einheit zusammenfassen, also sich für die dritte Aufstellung entscheiden will.

Ihre Rechtfertigung kann die zu treffende Entscheidung nur darin finden, daß für sie die Kraftgesetze einfacher und namentlich auch genauer in Übereinstimmung mit den Beobachtungen ausfallen, als im andern Falle. Es könnte sich z. B. zeigen, daß die Ergänzungskräfte der Relativbewegung beim Übergange von der ersten zur dritten Aufstellung im Verhältnisse zu den auf die erste Aufstellung bezogenen Kräften nur sehr geringfügig sind, daß aber bei ihrer Zufügung ein genauerer Anschluß an die Beobachtungen gewonnen wird als er vorher bestand. Das trifft z. B. zu, wenn man unsere Erde unter dem ersten Punkthaufen versteht und unter dem zweiten die ganze übrige Welt. Bei der ersten Aufstellung genügen die in der Physik aufgestellten Kraftgesetze in den meisten Fällen von irdischen Bewegungserscheinungen zu einer befriedigenden Erklärung. Aber die seitliche Ablenkung fallender Körper oder, um ein anderes Beispiel zu nennen, die Ebbe- und Flutbewegung lassen sich damit nicht erklären und man müßte daher, um sie mit zu umfassen, die Liste der Kraftgesetze erweitern, wenn man an der ersten Aufstellung festhalten wollte. Diese Nötigung fällt dagegen weg, wenn man sich für die andere Aufstellung entscheidet.

Von besonderer Bedeutung ist ferner auch der Ausdruck für die lebendige Kraft. Für die erste Aufstellung sei die lebendige Kraft innerhalb des ersten Punkthaufens bereits berechnet und wie in § 3 mit L' bezeichnet. Dann liefert für die dritte Aufstellung der erste Punkthaufen zu der darauf bezogenen lebendigen Kraft nach Gl. (7) S. 17 den Beitrag

$$L = L' + \tfrac{1}{2} u^2 \Theta + \tfrac{1}{2} a^2 M,$$

und ein entsprechender Ausdruck gilt auch für den Beitrag des zweiten Punkthaufens. Die beiden letzten Glieder auf der rechten Seite geben zusammen die lebendige Kraft eines starren Körpers an von derselben Masse und derselben Gestalt, die der erste Punkthaufen zur Zeit gerade besitzt, wenn er sich mit der Winkelgeschwindigkeit u und der Schwerpunktsgeschwindigkeit a gegen die dritte Aufstellung des Beobachters bewegt.

Diesem Ergebnisse kommt eine einfache Bedeutung zu. Die gesamte lebendige Kraft L des ersten Punkthaufens setzt sich jetzt aus zwei Teilen zusammen, von denen der erste, L', nur von den Vorgängen innerhalb dieses Punkthaufens selbst abhängt, während der andere Teil, der durch die Summe der beiden letzten Glieder gebildet wird, daher rührt, daß noch ein zweiter Punkthaufen besteht, mit dem er zu einer Einheit zusammengefaßt werden kann.

Stellen wir uns einmal vor, es wäre ein Eingriff möglich in der Art, daß die Bewegungen innerhalb des ersten Punkthaufens durch eine Herstellung starrer Verbindungen plötzlich gehemmt würden. Durch den unelastischen Stoß, der damit verbunden ist, würde die lebendige Kraft L' vernichtet und, wie wir annehmen wollen, in Wärme verwandelt. Das gilt zunächst für die erste Aufstellung; aber man erkennt leicht, daß sich auch für die dritte Aufstellung die lebendige Kraft um denselben Betrag vermindert. Der auf die dritte Aufstellung bezogene Drall des ersten Punkthaufens kann sich nämlich durch den Stoßvorgang innerhalb des ersten Punkthaufens nicht geändert haben; ebenso muß auch die Schwerpunktsgeschwindigkeit unverändert bleiben. Aus den schon in § 2 angestellten Überlegungen folgt aber, daß der Drall vor Herstellung der starren Verbindungen gleich war der geometrischen Summe aus dem Drall in bezug auf die erste Aufstellung und dem Drall eines starren Körpers, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit u und der Schwerpunktsgeschwindigkeit a gegen die dritte Aufstellung bewegte. Da nun die erste Aufstellung auf dem Hauptbezugssysteme für den ersten Punkthaufen genommen wurde, so ist der zugehörige Drall gleich Null und es bleibt nur das andere Glied übrig. Aus dieser Betrachtung folgt, daß sich der starre Körper, der durch die Herstellung der starren Verbindungen aus dem ersten Punkthaufen hervorgegangen ist, unmittelbar nachher mit derselben Winkelgeschwindigkeit u und derselben Schwerpunktsgeschwindigkeit a gegen die dritte Aufstellung bewegt, wie vor dem Stoße das Hauptbezugssystem des ersten Punkthaufens. Wenn wir also nach dem Stoße die lebendige Kraft für die dritte Aufstellung von neuem berechnen, so fällt aus dem Ausdrucke für L nur das Glied L' heraus, während die beiden anderen Glieder ihre Werte unverändert behalten.

Damit ist bewiesen, daß es für die Berechnung des Verlustes an lebendiger Kraft durch den Stoß gleichgültig ist, ob wir dabei die erste oder die dritte Aufstellung zugrunde legen. Es ist daher in beiden Fällen die Umwandlung von lebendiger Kraft in Wärme nach demselben festen Verhältnisse zu erwarten. Das ist aber als Vorbedingung dafür zu betrachten, daß man die in der einen oder anderen Weise berechnete lebendige Kraft in jedem Falle als eine Energiegröße ansehen kann.

Aus dem jetzt betrachteten Zusammenhange heraus läßt sich daher kein zwingender Grund für die Wahl der einen oder anderen Aufstellung ableiten.

Zu einem etwas anderen Ergebnisse gelangt man dagegen, wenn man den Flächensatz heranzieht. Für die dritte Aufstellung bleibt ihrer Definition nach der Drall für die Gesamtheit beider Punkthaufen dauernd gleich Null. Der Drall für den ersten Punkthaufen allein wird dagegen in bezug auf die dritte Aufstellung in allgemeinen von Null verschieden sein. Zeigt es sich nun, daß sich dieser Drall im Laufe der Zeit weder der Größe noch der Richtung nach ändert, so sind wir auch bei der dritten Aufstellung, obschon sie von vornherein das Zusammenwirken beider Punkthaufen ins Auge faßt, nicht veranlaßt, das Bestehen von Kräften zwischen beiden Punkthaufen anzunehmen. Wir können vielmehr auch dann noch alle Bewegungen innerhalb jedes Punkthaufens ausschließlich auf innere Kräfte zurückführen. Die Zusatzkräfte, die beim Übergange von der ersten zur dritten Aufstellung beizufügen sind, lassen sich also dann ebenfalls durch innere Kräfte innerhalb des ersten Punkthaufens erklären.

Im anderen Falle muß man dagegen, sobald man sich nur überhaupt einmal für die dritte Aufstellung entschieden hat, auch „physikalisch existierende“ Kräfte (in dem früher besprochenen Sinne) zwischen beiden Punkthaufen annehmen. Unter diesen Umständen wird man viel mehr geneigt sein, den partikularistischen Standpunkt aufzugeben und sich für den unitarischen zu entscheiden.

Immerhin muß aber betont werden, daß dieser Grund keineswegs zwingend ist. Entscheidend wird es immer bleiben, bei welcher Auffassung man zur einfachsten, dabei aber immer ausreichend genau mit den Beobachtungen innerhalb jedes einzelnen Punkthaufens übereinstimmenden Erklärung der Erscheinungen gelangt, d. h. unter welchen Umständen die besonderen Kraftgesetze, die man nach dem Vorbilde der in unserer Physik aufgestellten Liste zur Ableitung der Bewegungserscheinungen anzunehmen hat, am einfachsten ausfallen. Nur die Vermutung kann ausgesprochen werden, daß der unitarische Standpunkt in dem zuletzt besprochenen Falle die besseren Aussichten bietet;

aber erst die Einzeluntersuchung kann lehren, ob dies auch zutrifft. Dabei kann hinzugefügt werden, daß die Erfahrung in unserer Welt allerdings bereits in diesem Sinne entschieden hat, insofern als man mit einfacheren Kraftgesetzen auskommt, wenn man nicht die Erde für sich als isolierten Punkthaufen betrachtet, sondern sie mit der ganzen übrigen Welt zu einer einzigen Einheit zusammenfaßt. Und zwar, wie wohl zu beachten ist, auch dann, wenn man sich auf die Untersuchung irdischer Bewegungsvorgänge allein zu beschränken beabsichtigt.

Es bedarf kaum der Bemerkung, daß das, was hier für zwei Punkthaufen besprochen wurde, auch auf das Zusammensein von drei oder mehr Punkthaufen sinngemäß übertragen werden kann.

§ 7. Ein Punkthaufen und ein einzelner materieller Punkt.

Die Überlegungen des vorigen Paragraphen sollen jetzt auf den damit schon umfaßten besonderen Fall angewendet werden, daß der zweite Punkthaufen, von dem die Rede war, durch einen einzigen materiellen Punkt ersetzt wird. Die vorher als „zweite" bezeichnete Aufstellung des Beobachters verliert in diesem Falle ihre Bedeutung; dagegen sollen die beiden anderen in demselben Sinne wie vorher immer noch als die „erste" und „dritte" bezeichnet werden.

Wenn der neu hinzutretende Einzelpunkt gegen das Hauptbezugssystem des ersten Punkthaufens eine geradlinige gleichförmige Bewegung beschreibt, liegt der Fall vor, von dem wir vorher zuerst sprachen, nämlich der Fall, in dem man zunächst geneigt sein wird, an der vor der Entdeckung des Einzelpunktes aufgestellten Theorie festzuhalten, also den Punkthaufen und den Einzelpunkt so zu behandeln, als wenn sie sich gar nichts angingen. Das ist jedenfalls zulässig; ob es aber zweckmäßig ist, kann sich erst durch den Versuch herausstellen, ob man durch die Hereinziehung des Einzelpunktes zu einer entweder einfacheren oder noch genauer mit der Beobachtung übereinstimmenden „Kraftliste" gelangt.

Sieht man den Einzelpunkt als gleichberechtigten Bestandteil des Ganzen an, so muß man von der ersten zur dritten Aufstellung des Beobachters übergehen. Das dritte Koordinatensystem führt gegen das erste außer einer gleichförmigen geradlinigen Translationsbewegung auch noch eine Drehung aus. Die

Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung ist aber sowohl der Richtung als der Größe nach veränderlich. Für irgend einen bestimmten Augenblick kann die Winkelgeschwindigkeit aus den als bekannt anzusehenden Stellungen und Geschwindigkeiten gegen das erste Bezugssystem nach den bekannten Lehren des vierten Bandes berechnet werden. Nachdem dies geschehen ist folgen dann auch nach dem Satze von Coriolis die an jedem Punkte des Haufens anzubringenden Ergänzungskräfte, die zu den vorher relativ zum ersten Bezugssysteme ermittelten Kräften hinzutreten. Da weiterhin die Bewegungen gegen das dritte Bezugssystem als die absoluten zu bezeichnen sind, müssen dann auch die auf die angegebene Art berechneten Ergänzungskräfte nachträglich als „physikalisch existierende" betrachtet werden. Diese hängen aber von der Geschwindigkeit des neu hinzugetretenen Einzelpunktes gegen das erste und somit auch gegen das dritte Bezugssystem ab.

Diese Überlegungen reichen aus, um die Vermutung zu begründen, daß man zu einer logisch besser als die uns geläufige befriedigenden Darstellung der Bewegungen im Weltraume gelangen könnte, indem man Kräfte zwischen den Weltkörpern einführte, die von den Geschwindigkeiten abhängen und die ich aus diesem Grunde bei einer früheren Gelegenheit, als ich mich zum erstenmal mit diesen Dingen beschäftigte, als „Geschwindigkeitskräfte" bezeichnete. Ich wurde dadurch auch veranlaßt, einen Versuch anzustellen, ob sich solche Kräfte etwa unmittelbar nachweisen ließen. Dazu verwendete ich ein schnell rotierendes Schwungrad, das luftdicht eingekapselt war und in dessen Nähe ich ein Pendel oder eine Torsionswaage aufhängte. Ich dachte, daß es vielleicht möglich sein würde, an einem Ausschlage des Pendels oder der Torsionswaage eine auf die Rotation des Schwungrads zurückzuführende Kraft nachzuweisen. Dieser Versuch ist mißlungen. Als entscheidend kann dieser Mißerfolg aber schon deshalb nicht angesehen werden, weil es ja sehr wohl möglich wäre, daß die Kraft bei meiner Versuchsanordnung nur zu klein gewesen wäre, um sie beobachten zu können.

Ich habe ausdrücklich nur von einer „Vermutung" gesprochen, die uns veranlassen könnte, nach Geschwindigkeitskräften zu suchen. Welche Darstellung unter allen, die an sich als möglich erkannt sind, tatsächlich den Vorzug für unsere wirkliche Welt verdient, kann dagegen nur die Erfahrung lehren.

Immerhin glaube ich, daß die hier entwickelte Anschauung einige Beachtung verdient, da es mir keineswegs ausgeschlossen erscheint, daß sie noch zu fruchtbaren Folgerungen führen könnte. Ich verzichte jedoch darauf, die vorher angedeutete Rechnung über die Ergänzungskräfte hier anzuschreiben, da sie mich bisher wenigstens nur zu langen Formeln geführt hat, aus denen es mir nicht gelungen ist, ein einfaches Ergebnis abzuleiten. Der schönste Erfolg würde natürlich darin bestehen, wenn es etwa gelingen sollte, die Newtonsche Gravitationskraft durch Geschwindigkeitskräfte zu ersetzen oder, was auf dasselbe hinauskommt, sie aus solchen herzuleiten. Für unmöglich halte ich dies nicht und auch nicht einmal für unwahrscheinlich. Die Zukunft allein wird lehren können, ob ich damit recht habe.

Zum mindesten aber hoffe ich, daß es mir gelungen sein möge, den Leser, der sich die Mühe genommen hat, über alle vorhergehenden Ausführungen ernstlich nachzudenken, von den Zweifeln und logischen Schwierigkeiten zu befreien, zu denen der Begriff der absoluten Bewegung so leicht zu führen vermag.

Hierauf verlasse ich diesen Gegenstand und wende mich zu mehr praktischen Dingen.

Anmerkung. Die letzten beiden Paragraphen sind aus der ersten Auflage dieses Bandes ohne die geringste Änderung des Wortlautes wieder übernommen worden. Die Folgerungen, zu denen sie gelangten, insbesondere die, daß als möglich hingestellt wurde, die Newtonsche Gravitationskraft mit Relativitätsbetrachtungen in Zusammenhang bringen zu können, dürften zur damaligen Zeit neu gewesen sein. Inzwischen hat sich herausgestellt, daß die einseitige Beschränkung auf die bloß räumliche Relativität freilich nicht genügt, um das aufgesteckte Ziel tatsächlich zu erreichen, daß dies aber gelingt, sobald auch die zeitliche Relativität mit hinzugenommen wird.

In der allgemeinen Relativitätstheorie ist gelungen, was ich damals zwar angestrebt hatte, aber nicht durchzufühen vermochte. Immerhin dürfte manchem Leser lehrreich und beachtenswert erscheinen, daß man schon auf Grund der rein geometrischen Relativitäts-Betrachtungen zu Schlußfolgerungen geführt wird, die wenigstens in der gleichen Richtung gehen wie die Relativitätstheorie. Aus diesem Grunde halte ich mich für berechtigt, die beiden letzten Paragraphen unverändert wieder beizubehalten, wenn sie auch durch die inzwischen erfolgte Entwicklung der Wissenschaft überholt und dadurch in den Schatten gestellt sind.

§ 8. Relativbewegungen im gleichförmig rotierenden Raum.

Bei den praktischen Anwendungen der Lehre von der Relativbewegung handelt es sich meistens um Bewegungen gegen ein Fahrzeug (ein Gefäß u. dgl.), das eine Drehbewegung um eine feststehende Achse mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit beschreibt. Bezogen ist diese Fahrzeugbewegung zunächst auf den „absoluten" Raum im Sinne der vorhergehenden Darlegungen. Wenn das Fahrzeug sehr schnell umläuft im Verhältnisse zur Winkelgeschwindigkeit der Erde, die sich in jedem Sterntage nur einmal gegen den Fixsternhimmel dreht, macht es aber praktisch keinen Unterschied, wenn man von der Bewegung der Erde ganz absieht und die Bewegung des Fahrzeugs gegen die Erde so behandelt, als wenn sie eine absolute Bewegung wäre. Das soll hier geschehen.

Die allgemeine Aussage des Satzes von Coriolis vereinfacht sich in diesem Falle erheblich, insofern als sich für die Beschleunigung der Fahrzeugbewegung ein sehr einfacher Ausdruck angeben läßt. In Band IV wurde dieser Satz durch Gl. (215) der 6. Aufl.

$$\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} = \frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} + \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} + 2\left[\frac{d\,\mathfrak{r}}{dt}\,\mathfrak{u}\right] \tag{10}$$

ausgesprochen. Darin bedeutete $\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}$ die absolute, $\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$ die relative Beschleunigung eines bewegten materiellen Punktes, $\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2}$ die absolute Beschleunigung des Fahrzeugpunktes, mit dem der bewegte materielle Punkt zur Zeit t zusammenfällt, und $\mathfrak{u}$ die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich das Fahrzeug dreht. In unserem besonderen Falle ist zunächst $\mathfrak{u}$ konstant und die Fahrzeugbeschleunigung $\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2}$ besteht in einer einfachen Zentripetalbeschleunigung, von der schon in Band 1, § 14 der 10. Aufl. gezeigt wurde, daß sie in die Richtung der von dem Punkte auf die Drehachse gezogenen Senkrechten fällt und gleich $u^2 R$ gesetzt werden kann, wenn unter R die Länge dieser Senkrechten oder der Halbmeser des von dem Fahrzeugpunkte beschriebenen Kreises und unter u der Absolutbetrag der Winkelgeschwindigkeit verstanden wird.

Multipliziert man Gl. (10) mit der Masse m des materiellen Punktes, so folgt

$$m\,\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = m\,\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} - m\,\frac{d^2\mathfrak{p}}{dt^2} - 2m\left[\frac{d\,r}{dt}\,\mathfrak{u}\right]$$

oder, wenn wir mit $\mathfrak{P}$ die physikalisch bestehende, d. h. also die auf den absoluten Raum bezogene, an dem materiellen Punkte angreifende Kraft und mit $\mathfrak{C}$ die Zentrifugalkraft bezeichnen, von der wir bereits wissen, wie sie in einfacher Weise angegeben werden kann,

$$m \frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{P} + \mathfrak{C} - 2m \left[\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\, \mathfrak{u} \right]. \tag{11}$$

Alle Sätze der Dynamik bleiben daher auf die Relativbewegung des materiellen Punktes anwendbar, wenn wir an diesem Punkte eine Kraft annehmen, die sich in der auf der rechten Seite der Gleichung angegebenen Weise aus drei Gliedern zusammensetzt. Das erste Glied $\mathfrak{P}$ ist aus der „Kraftliste" der Physik zu entnehmen und daher durch die näheren Umstände des einzelnen Falles bestimmt und hiermit als bekannt zu betrachten. Die beiden anderen Glieder liefern die Ergänzungskräfte der Relativbewegung, die in der weiteren Behandlung dieselbe Rolle spielen, als wenn sie ebenfalls physikalisch bestehende Kräfte wären, die als Fernkräfte an dem materiellen Punkte angriffen.

Die Kraft $\mathfrak{P}$ bedarf noch einer näheren Besprechung. Zunächst war die Anweisung gegeben, sie aus den im absoluten Raume festgestellten Verhältnissen zu entnehmen. Wir müssen aber darnach trachten, uns von dieser Beziehung auf den absoluten Raum so weit als möglich frei zu machen. Gehört die Kraft $\mathfrak{P}$ zu einem im absoluten Raume feststehenden zeitlich unveränderlichen Kraftfelde, so ist das Kraftfeld relativ zum Fahrzeuge im allgemeinen nicht mehr unveränderlich, sondern nur dann, wenn das Kraftfeld im absoluten Raume um die Drehachse des Fahrzeugs herum symmetrisch war. Rotiert also das Fahrzeug z. B. um eine lotrechte Achse, so darf man gewöhnlich genau genug annehmen, daß das Schwerefeld der Erde um die Achse herum symmetrisch und überdies gleich gerichtet und gleich stark ist, und dann kann jener Anteil von $\mathfrak{P}$, der von dem Gewichte des materiellen Punktes herrührt, auch relativ zum Fahrzeuge als der Größe und Richtung nach konstant betrachtet werden. Bei der Rotation um eine anders gerichtete Achse würde dagegen das Gewicht als eine der Richtung relativ zum Fahrzeuge nach veränderliche Kraft einzuführen sein.

Außer dem Gewichte tragen zu $\mathfrak{P}$ bei den gewöhnlichen An-