150 Jahre
Wissen für die Zukunft
Oldenbourg Verlag

Managementwissen für Studium und Praxis

Herausgegeben von Professor Dr. Dietmar Dorn und Professor Dr. Rainer Fischbach

Lieferbare Titel:

Anderegg, Grundzüge der Geldtheorie und Geldpolitik
Arrenberg · Kiy · Knobloch · Lange, Vorkurs in Mathematik, 3. Auflage
Barth · Barth, Controlling, 2. Auflage
Behrens · Kirspel, Grundlagen der Volkswirtschaftslehre, 3. Auflage
Behrens · Hilligweg · Kirspel, Übungsbuch zur Volkswirtschaftslehre
Behrens, Makroökonomie – Wirtschaftspolitik, 2. Auflage
Blum, Grundzüge anwendungsorientierter Organisationslehre
Bontrup, Volkswirtschaftslehre, 2. Auflage
Bontrup, Lohn und Gewinn, 2. Auflage
Bontrup · Pulte, Handbuch Ausbildung
Bradtke, Mathematische Grundlagen für Ökonomen, 2. Auflage
Bradtke, Übungen und Klausuren in Mathematik für Ökonomen
Bradtke, Statistische Grundlagen für Ökonomen, 2. Auflage
Bradtke, Grundlagen im Operations Research für Ökonomen
Breitschuh, Versandhandelsmarketing
Busse, Betriebliche Finanzwirtschaft, 5. Auflage
Camphausen, Strategisches Management, 2. Auflage
Dinauer, Grundzüge des Finanzdienstleistungsmarkts, 2. Auflage
Dorn · Fischbach, Operations Research, 3. Auflage
Dorn · Fischbach, Volkswirtschaftslehre II, 4. Auflage
Dorsch, Abenteuer Wirtschaft ·75 Fallstudien mit Lösungen
Drees-Behrens · Kirspel · Schmidt · Schwanke, Aufgaben und Fälle zur Finanzmathematik, Investition und Finanzierung, 2. Auflage
Drees-Behrens · Schmidt, Aufgaben und Fälle zur Kostenrechnung, 2. Auflage
Fiedler, Einführung in das Controlling, 2. Auflage
Fischbach · Wollenberg, Volkswirtschaftslehre 1, 13. Auflage
Götze, Techniken des Business-Forecasting
Götze, Mathematik für Wirtschaftsinformatiker
Götze · Deutschmann · Link, Statistik
Gohout, Operations Research, 3. Auflage
Haas, Kosten, Investition, Finanzierung – Planung und Kontrolle, 3. Auflage
Haas, Access und Excel im Betrieb
Haas, Excel im Betrieb, Gesamtplan
Hans, Grundlagen der Kostenrechnung
Hardt, Kostenmanagement, 2. Auflage
Heine · Herr, Volkswirtschaftslehre, 3. Auflage
Hildebrand · Rebstock, Betriebswirtschaftliche Einführung in SAP® R/3®
Hoppen, Vertriebsmanagement
Koch, Marktforschung, 4. Auflage
Koch, Betriebswirtschaftliches Kosten- und Leistungscontrolling in Krankenhaus und Pflege, 2. Auflage
Laser, Basiswissen Volkswirtschaftslehre
Martens, Statistische Datenanalyse mit SPSS für Windows, 2. Auflage
Martin · Bär, Grundzüge des Risikomanagements nach KonTraG
Mensch, Finanz-Controlling. 2. Auflage
Peto, Grundlagen der Makroökonomik, 13. Auflage
Piontek, Controlling, 3. Auflage
Piontek, Beschaffungscontrolling, 3. Aufl.
Plümer, Logistik und Produktion
Posluschny, Controlling für das Handwerk
Posluschny, Kostenrechnung für die Gastronomie, 2. Auflage
Rau, Planung, Statistik und Entscheidung – Betriebswirtschaftliche Instrumente für die Kommunalverwaltung
Rothlauf, Total Quality Management in Theorie und Praxis, 2. Auflage
Rudolph, Tourismus-Betriebswirtschaftslehre, 2. Auflage
Rüth, Kostenrechnung, Band I, 2. Auflage
Sauerbier, Statistik für Wirtschaftswissenschaftler, 2. Auflage
Scharnbacher · Kiefer, Kundenzufriedenheit, 3. Auflage
Schuster, Kommunale Kosten- und Leistungsrechnung, 2. Auflage
Schuster, Doppelte Buchführung für Städte, Kreise und Gemeinden, 2. Auflage
Stahl, Internationaler Einsatz von Führungskräften
Stender-Monhemius, Marketing – Grundlagen mit Fallstudien
Strunz · Dorsch, Management
Strunz · Dorsch, Internationale Märkte
Weeber, Internationale Wirtschaft
Wilde, Plan- und Prozesskostenrechnung
Wilhelm, Prozessorganisation, 2. Auflage
Wörner, Handels- und Steuerbilanz nach neuem Recht, 8. Auflage
Zwerenz, Statistik, 3. Auflage
Zwerenz, Statistik verstehen mit Excel – Buch mit Excel-Downloads, 2. Auflage

Vorkurs in Mathematik

von

Prof. Dr. Jutta Arrenberg
Prof. Dr. Manfred Kiy
Prof. Dr. Ralf Knobloch
Prof. Winfried Lange

3., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage

Oldenbourg Verlag München

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
oldenbourg.de

Lektorat: Wirtschafts- und Sozialwissenschaften, wiso@oldenbourg.de
Herstellung: Anna Grosser
Coverentwurf: Kochan & Partner, München
Gedruckt auf säure- und chlorfreiem Papier
Druck: Grafik + Druck, München
Bindung: Thomas Buchbinderei GmbH, Augsburg

ISBN 978-3-486-58748-7

Vorwort zur dritten Auflage

Der in diesem Buch präsentierte Zugang zur Mathematik hat immer mehr Lernende und Lehrende begeistert. Das hat wiederum eine Neuauflage bewirkt. Nach der gründlichen Überarbeitung für die zweite Auflage haben wir der vorliegenden dritten Auflage ein neues Kapitel über Abzählmethoden der Kombinatorik hinzugefügt. Darin werden die elementaren Grundlagen für das Fach Statistik vermittelt. Bei unseren Leserinnen und Lesern bedanken wir uns ausdrücklich.

Vorwort

Das vorliegende Buch ist aus einem „Brückenkurs Mathematik“ entstanden, der seit mehreren Jahren den Studierenden der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften der Fachhochschule Köln zu Beginn des ersten Semesters angeboten wird.

Ein großer Teil der Studienanfängerinnen und Studienanfänger weist leider starke Defizite in den Grundlagen der Mathematik auf. Dies liegt einerseits daran, dass die Studierenden unterschiedliche schulische Vorbildungen aufweisen (Abitur, Fachhochschulreife in Verbindung mit einer abgeschlossenen Berufsausbildung u. a.). Mathematik war nicht unbedingt schulischer Schwerpunkt, oder der entsprechende Unterricht liegt schon lange Jahre zurück.

Ein weiterer Grund sind die noch nicht ausgeprägten Vorstellungen des Studiums der Wirtschaftswissenschaften. Vielen Studierenden ist zu Beginn nicht bewusst, dass die Wirtschaftsmathematik und die Wirtschaftstatistik wichtige Grundlagenfächer darstellen, die genauso beherrscht und in Prüfungen bestanden werden müssen wie Rechnungswesen, allgemeine BWL u. a.

Das vorliegende Buch hilft, die existierenden Lücken zwischen dem vorhandenen Schulwissen und den Anforderungen der Hochschule zu überbrücken. Es beruht auf den langjährigen Erfahrungen der Autoren und ist didaktisch so angelegt, dass es auch Studierende mit einem geringen Grundwissen erreicht.

Auch diejenigen, die Mathematik in der Schule nicht sehr gemocht haben, können durch entsprechenden Arbeitsaufwand ihre Wissenslücken füllen. Dazu ist es nötig, Disziplin und Ausdauer mitzubringen.

Wir danken Frau Sonja Dieckmann und Herrn Daniel Mahnke für ihre tatkräftigen Hilfeleistungen beim Erstellen der TEX-Manuskripte. Besonderer Dank geht an den Verein der Freunde und Förderer der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften für seine Unterstützung dieses Projekts, an Herrn Martin Weigert vom Oldenbourg-Verlag und an seinen Nachfolger Dr. Jürgen Schechler für die gute Zusammenarbeit.

Köln

Jutta Arrenberg
Manfred Kiy
Ralf Knobloch
Winfried Lange

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Lern- und Arbeitsanleitung

Das Buch richtet sich an Studierende der Wirtschaftswissenschaften und anderer wirtschaftsbezogener Studiengänge. Die Mathematik ist in diesen Studiengängen ein unverzichtbares Instrument, das es ermöglicht, ökonomische Entscheidungsprobleme zu formulieren und zu lösen. Darüber hinaus fördert die Beschäftigung mit der Mathematik das analytische Denken, das Abstraktionsvermögen und das logische Denken. Sie führt zu selbstständigem Lernen und planvollem Arbeiten. Mathematische Anwendungen gibt es in nahezu allen Gebieten der Wirtschaftswissenschaften, insbesondere im Rechnungswesen, im Marketing, in der Finanzwirtschaft, in der Unternehmensplanung und der Datenverarbeitung.

Ziel des Buches ist es, den Einstieg ins Studium zu erleichtern. Im Wesentlichen besteht das Buch aus Schulwissen, das aufgefrischt werden muss, um den Vorlesungen in Wirtschaftsmathematik folgen zu können. Deshalb haben wir diejenigen mathematischen Inhalte ausgewählt, die für ein wirtschaftswissenschaftliches Studium unverzichtbares Basiswissen darstellen.

Das Buch ist in **zwölf Kapitel** aufgeteilt, die inhaltlich verschiedene Fachgebiete darstellen. Im Anschluss an die Lern- und Arbeitsanleitung wird im zweiten Kapitel das Rechnen mit reellen Zahlen behandelt. Danach beschäftigen wir uns mit dem grundlegenden Wissen aus der Aussagenlogik. Anschließend erläutern wir das Arbeiten mit Mengen. Im Kapitel fünf werden mit den Abzählmethoden die Grundlagen der Kombinatorik erläutert. In den Kapiteln sechs bis acht wird das Rechnen mit Potenzen, Wurzeln und Logarithmen vorgestellt und geübt. Die Kapitel über Terme, Gleichungen und Ungleichungen schulen den Umgang mit allgemeinen mathematischen Ausdrücken. In diesen Ausdrücken kommen neben Zahlen auch Platzhalter - so genannte Variablen - vor. Im elften Kapitel wird der Begriff der Funktion eingeführt. Den Abschluss bildet ein umfassender Nachtest im Kapitel zwölf. Wenn man sein mathematisches Grundwissen vollständig aufarbeiten will, sollte diese Reihenfolge der Kapitel beim Lesen eingehalten werden. Darüber hinaus bietet das Buch auch die Möglichkeit, einzelne Kapitel zu überspringen und nur spezielle mathematische Themen durchzuarbeiten. Diese

Vorgehensweise empfiehlt sich jedoch nur für Leser und Leserinnen, die über mathematische Grundkenntnisse verfügen.

Zu jedem Kapitel gibt es Beispiele, Übungen und Aufgaben. Sinn der **Beispiele** ist es, neue Sachverhalte nachvollziehbar zu machen. Deshalb sind sämtliche Beispiele mit Lösungen versehen. Erst nach dem Durcharbeiten von Beispielen sollte das Lesen fortgesetzt werden. Dabei bedeutet Durcharbeiten, zunächst die Fragestellung zu verstehen und danach jeden Rechenschritt gedanklich nachzuvollziehen. Das Lösen der **Übungen** eines Kapitels soll vom Leser bzw. von der Leserin ohne Nachschlagen des angegebenen Lösungswegs selbstständig bearbeitet werden. Hier soll also das Wissen unmittelbar vor dem Weiterlesen reflektiert und vertieft werden. So erhält man eine Selbstkontrolle. Die Lösungen bzw. Lösungswege zu den Übungen sind am Ende der jeweiligen Kapitel angegeben. Die **Aufgaben** im letzten Kapitel zwölf des Buches sind als umfassende Überprüfung des Lernerfolges gedacht. Jetzt ist nämlich alles gesagt und der Leser bzw. die Leserin sollte sich vergewissern, ob der Sachverhalt auch wirklich verstanden wurde. Die angegebenen Lösungen zu den Aufgaben dienen lediglich als Kontrolle.

Als Arbeitsmittel brauchen Sie genügend **Papier**, **Schreibzeug** und einen **Taschenrechner**. Der Taschenrechner sollte außer den vier Grundrechenarten $\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{\cdot}$ bzw. $\boxed{\times}$, $\boxed{:}$ bzw. $\boxed{/}$ auch die Berechnung von Wurzeln $\boxed{\sqrt{}}$, Logarithmen $\boxed{\ln}$ bzw. $\boxed{\log}$, Fakultäten $\boxed{x!}$, Binomialkoeffizienten $\boxed{\text{nCr}}$, der Eulerschen Zahl $\boxed{e}$ und von Ausdrücken der Form $\boxed{y^x}$ bzw. $\boxed{x^y}$ erlauben.

Auch wenn es altväterlich klingen mag, so führt doch erst vieles Üben zur Fähigkeit, sicher mit dem vorgestellten Stoff umgehen zu können. Misserfolge sollten Sie nicht entmutigen. Es ist nicht wichtig, dass Sie keine Fehler machen, sondern dass Sie lernen, Fehler schnell zu verbessern.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg.

Kapitel 2

Rechnen mit reellen Zahlen

Ziel dieses Kapitels ist es, das Grundlagenwissen für den Umgang mit dem in den Wirtschaftswissenschaften gebräuchlichen Zahlensystem, den reellen Zahlen, aufzuarbeiten. Dazu gehören das Grundverständnis zum Aufbau und zu den Anwendungsmöglichkeiten des Zahlensystems, die elementaren Kenntnisse der Bruchrechnung, das Distributivgesetz sowie der Umgang mit dem Summen- und Produktzeichen, dem Fakultätsbegriff und dem Binomialkoeffizienten.

2.1 Aufbau des Zahlensystems

Das einfachste Zahlensystem, das im täglichen Leben genutzt wird, sind die **natürlichen** Zahlen:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Bereits dieser Zahlenmenge gehören unendlich viele Elemente an. Sie dient grundlegenden Anwendungen wie der Durchnummerierung von Objekten und der Bestimmung von Anzahlen. Uneingeschränkt sind in den natürlichen Zahlen die Rechenoperationen „Addition“ und „Multiplikation“ möglich, d. h. die Summe und das Produkt zweier natürlicher Zahlen ist immer eine natürliche Zahl.

Erweitert man die natürlichen Zahlen durch die Zahl Null und die negativen Zahlen, erhält man das System der **ganzen** Zahlen:

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Innerhalb dieses Zahlensystems sind die Rechenoperationen „Addition“, „Subtraktion“ und „Multiplikation“ uneingeschränkt anwendbar. Die Notwendigkeit der Existenz von ganzen Zahlen in den Wirtschaftswissenschaften ist offensichtlich; man denke beispielsweise an die Darstellung von Gewinnen, die positiv, negativ oder null sein können.

Das Zahlensystem, in dem alle vier Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) durchgeführt werden können, sind die **rationalen** Zahlen. Eine rationale Zahl x kann dargestellt werden als Quotient $\frac{m}{n}$, wobei m eine ganze Zahl und n eine natürliche Zahl ist.

Anmerkungen

a) Die rationalen Zahlen enthalten die natürlichen und die ganzen Zahlen; beispielsweise gilt:

- Die Zahl 2 kann dargestellt werden als $\frac{2}{1}$ oder $\frac{4}{2}$ usw.
- Die Zahl -3 kann dargestellt werden als $\frac{-3}{1}$ oder $\frac{-6}{2}$ usw.

Dabei haben die Ausdrücke 2, $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{2}$ bzw. -3, $\frac{-3}{1}$, $\frac{-6}{2}$ zwar unterschiedliche Darstellungsweisen, repräsentieren aber jeweils den gleichen Zahlenwert.

b) Jede rationale Zahl kann dargestellt werden als Dezimalzahl mit endlich oder unendlich vielen Nachkommastellen, die einem Bildungsgesetz gehorchen, z. B.

- $\dfrac{1}{2} = 0{,}5$
- $\dfrac{1}{8} = 0{,}125$
- $\dfrac{1}{3} = 0{,}333333\ldots = 0{,}\overline{3}$
- $\dfrac{1}{6} = 0{,}166666\ldots = 0{,}1\overline{6}$
- $\dfrac{16}{99} = 0{,}161616\ldots = 0{,}\overline{16}$

Das Umrechnen von Brüchen in Dezimalzahlen ist mit jedem Taschenrechner problemlos möglich.

c) Das Umrechnen von Dezimalzahlen in Brüche ist häufig für die Vereinfachung von Rechengängen nützlich. Bei Dezimalzahlen mit endlich vielen Nachkommastellen werden die Ziffern hinter dem Komma in den Zähler geschrieben; im Nenner steht eine Zehnerpotenz (vgl. auch Kapitel 6) mit so vielen Nullen wie die Anzahl der Nachkommastellen, z. B.

$$0{,}125 = \frac{125}{1\,000} = \frac{1}{8}$$

d) Beispiele für das Umrechnen von Dezimalzahlen mit unendlich vielen Nachkommastellen sind:

- $0{,}\overline{3} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$
- $0{,}\overline{8} = \dfrac{8}{9}$

- $0{,}\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$ (!)
- $0{,}\overline{15} = \frac{15}{99}$
- $0{,}\overline{367} = \frac{367}{999}$

In der betriebswirtschaftlichen Anwendung ist es wichtig, periodische Dezimalzahlen der obigen Form in Brüche umwandeln zu können.

e) Will man komplizierter aufgebaute Dezimalzahlen mit unendlich vielen Nachkommastellen in Brüche umformen, kann man nach folgendem Schema vorgehen:

- $0{,}\mathsf{a}\overline{\mathsf{b}} = \frac{9 \cdot \mathsf{a} + \mathsf{b}}{90}$

  z. B.: $0{,}1\overline{6} = \frac{9 \cdot 1 + 6}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

- $0{,}\mathsf{ab}\overline{\mathsf{c}} = \frac{9 \cdot (\mathsf{ab}) + \mathsf{c}}{900}$

  z. B.: $0{,}22\overline{6} = \frac{9 \cdot 22 + 6}{900} = \frac{204}{900} = \frac{51}{225}$

  Dabei ist zu beachten, dass hier mit ab nicht das Produkt $\mathsf{a} \cdot \mathsf{b}$, sondern die zweistellige Zahl mit den Ziffern a und b gemeint ist.

- $0{,}\mathsf{ab}\overline{\mathsf{cd}} = \frac{99 \cdot (\mathsf{ab}) + \mathsf{cd}}{9900}$

  z. B.: $0{,}21\overline{34} = \frac{99 \cdot 21 + 34}{9900} = \frac{2113}{9900}$

Die Probe kann jeweils mit dem Taschenrechner erfolgen.

Das System der rationalen Zahlen erlaubt zwar die uneingeschränkte Anwendung der vier Grundrechenarten, für die Anwendung in der (wirtschaftswissenschaftlichen) Praxis reicht dies allerdings nicht aus. Dies sollen die drei folgenden Beispiele verdeutlichen.

Beispiele

a) Will man den Umfang oder die Fläche eines Kreises bestimmen, erfolgt dies unter Vorgabe des Radius r mit den Formeln $2 \cdot \pi \cdot r$ (Umfang) und $\pi \cdot r^2$ (Fläche). Die Zahl π hat den Wert

$$\pi = 3{,}141592654\ldots$$

Hinter dem Komma stehen unendlich viele Ziffern, die allerdings keinem Bildungsgesetz folgen, d. h. π kann nicht als Bruch geschrieben werden und ist somit keine rationale, sondern eine **irrationale** Zahl.

b) Zur Beschreibung von Wachstumsprozessen wird häufig die sogenannte Exponentialfunktion verwendet. Wesentlicher Bestandteil solcher Funktionen ist die **Eulersche Zahl**

$$e = 2{,}718281828\ldots$$

Diese hat wiederum unendlich viele, keinem Bildungsgesetz folgende, Nachkommastellen und ist deshalb wie die Zahl π eine irrationale Zahl.

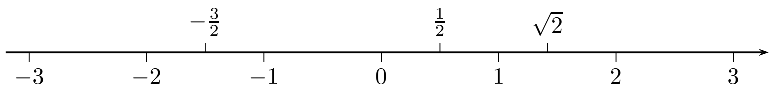
c) Ökonomische Sachverhalte werden häufig durch Gleichungen beschrieben. Selbst eine einfache quadratische Gleichung wie

$$x^2 = 2$$

hat keine Lösung in den rationalen Zahlen; vielmehr ist die Lösung $x = \sqrt{2}$ (vgl. auch Kapitel 7) wiederum eine irrationale Zahl.

Die rationalen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die **reellen** Zahlen. Dabei sollte man sich über die Anzahl der irrationalen Zahlen im Klaren sein. Mit π ist auch jedes Produkt von π mit einer rationalen Zahl (z. B. 2π, -7π, $\frac{1}{9}\pi$ usw.) eine irrationale Zahl. Somit haben wir allein durch diese Verknüpfung unendlich viele irrationale Zahlen. Entsprechendes gilt natürlich auch für e, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ usw.

Dadurch sind die reellen Zahlen eine so dichte Zahlenmenge, dass man sie problemlos, ohne jegliche Lücken, auf dem Zahlenstrahl darstellen kann:



Zwischen zwei beliebigen Zahlen gibt es unendlich viele weitere Zahlen. Diese Eigenschaft der reellen Zahlen ist für ökonomische Anwendungen in der Analysis äußerst hilfreich.

Für zwei reelle Zahlen a und b kann man stets die Beziehungen größer, kleiner oder gleich unterscheiden. In der Mathematik werden dafür folgende Bezeichnungen verwendet:

- $a < b$ (a ist kleiner als b)
- $a > b$ (a ist größer als b)
- $a \leq b$ (a ist kleiner oder gleich b)
- $a \geq b$ (a ist größer oder gleich b)
- $a = b$ (a ist gleich b)
- $a \neq b$ (a ist ungleich b)

Übung 2.1

Schreiben Sie als Bruch bzw. als Dezimalzahl:

a) $3\frac{1}{8}$	b) $2\frac{1}{3}$	c) $4\frac{1}{6}$	d) $7\frac{1}{16}$	e) $0{,}1374$
f) $0{,}625$	g) $0{,}4\overline{3}$	h) $0{,}\overline{57}$	i) $0{,}94\overline{37}$	j) $0{,}23\overline{423}$

2.2 Regeln für das Rechnen mit reellen Zahlen

Für die Multiplikation und Addition von reellen Zahlen gelten gewisse Grundregeln (Axiome), die gleichzeitig auch die Subtraktion und Division innerhalb dieses Zahlensystems einschließen. Die Regeln erscheinen normalerweise so klar und einfach, dass sie häufig nur kurz überflogen werden. Dabei wird oft außer Acht gelassen, dass sie wichtige Hinweise auf den Umgang mit reellen Zahlen enthalten.

Regel 1

a) Zu zwei reellen Zahlen a und b existiert genau eine reelle Zahl s mit:

$$a + b = s \quad \text{(Summe)}$$

b) Zu zwei reellen Zahlen a und b existiert genau eine reelle Zahl p mit:

$$a \cdot b = p \quad \text{(Produkt)}$$

Anmerkung
Obwohl diese Regel offensichtlich erscheint, sollte man sich trotzdem Folgendes verdeutlichen: Es gibt immer ein Ergebnis bei der Addition und Multiplikation von reellen Zahlen und es gibt immer nur ein Ergebnis.

Regel 2 (Assoziativgesetze)
Für drei beliebige reelle Zahlen a, b und c gilt:

a) $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$

b) $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Anmerkung
Die Assoziativgesetze der Addition und Multiplikation ermöglichen häufig die Durchführung von längeren Rechenoperationen durch geschicktes Zusammenfassen. Zudem lassen sich viele Rechnungen dadurch ohne größeren Aufwand im Kopf durchführen, z. B.

a) $137 \cdot 25 \cdot 4 = 137 \cdot (25 \cdot 4) = 137 \cdot 100 = 13\,700$

b) $0{,}97 + 1{,}85 + 0{,}15 = 0{,}97 + (1{,}85 + 0{,}15) = 0{,}97 + 2{,}00 = 2{,}97$

Regel 3 (Kommutativgesetze)
Für beliebige reelle Zahlen a und b gilt:

a) $a + b = b + a$

b) $a \cdot b = b \cdot a$

Anmerkung
In Verbindung mit dem Assoziativgesetz bietet das Kommutativgesetz eine Vielzahl von Möglichkeiten, Rechenwege zu vereinfachen, z. B.

a) $37 + 168 + 13 + 32 = (37 + 13) + (168 + 32) = 50 + 200 = 250$

b) $8 \cdot 37 \cdot 5 \cdot 25 = (8 \cdot 25) \cdot 5 \cdot 37 = (200 \cdot 5) \cdot 37 = 1\,000 \cdot 37 = 37\,000$

Natürlich kann man die obigen Rechenbeispiele auch mit dem Taschenrechner bewältigen. Allerdings sollte man die Gültigkeit der Ergebnisse abschätzen können, da immer die Gefahr von Eingabefehlern besteht.

Regel 4 (Neutrale Elemente)

a) Es gibt genau eine reelle Zahl 0 (Null) mit

$$a + 0 = 0 + a = a$$

b) Es gibt genau eine reelle Zahl 1 (Eins) mit

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Anmerkung
Neutrale Elemente sind u. a. hilfreich, umfassende Rechenausdrücke durch geschicktes Erweitern und Zusammenfassen zu lösen (vgl. auch Abschnitt 2.3).

Regel 5 (Inverse Elemente)

a) Zu jeder reellen Zahl a gibt es genau eine reelle Zahl $-a$ (inverses Element der Addition) mit

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

b) Zu jeder reellen Zahl a (ungleich Null) gibt es genau eine reelle Zahl a^{-1} (inverses Element der Multiplikation) mit

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

Anmerkungen

a) Die Subtraktion einer reellen Zahl ist somit gleichbedeutend mit der Addition des entsprechenden inversen Elementes, also

$$a - b = a + (-b)$$

b) Die Zahl a^{-1} kann auch als $\frac{1}{a}$ geschrieben werden (vgl. Kapitel 6).

c) Die Division durch eine reelle Zahl (ungleich Null) ist somit gleichbedeutend mit der Multiplikation des entsprechenden inversen Elementes, also

$$a : b = a \cdot b^{-1} = a \cdot \frac{1}{b}$$

d) Es gilt für jede reelle Zahl a:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

(d. h. ist in einem Produkt ein Faktor null, so ist auch das Produkt null).

e) Zu der Zahl 0 existiert kein inverses Element der Multiplikation; somit darf durch die Zahl 0 nicht dividiert werden.

Übung 2.2
Berechnen Sie im Kopf und anschließend mit dem Taschenrechner:

a) $59 + 87 + 413$ b) $1{,}67 + 1{,}96 + 0{,}04$

c) $198 \cdot 5 \cdot 20$ d) $68 \cdot 25 \cdot 4$

e) $84 + 127 + 16 - 90$ f) $20 \cdot 47 \cdot 5$

Übung 2.3
Formen Sie geschickt um und berechnen Sie im Kopf:

a) $1{,}67 + 4{,}96$ b) $25 \cdot 24$

c) $35 \cdot 14$ d) $2{,}43 - 1{,}88$

e) $16{,}37 + 2{,}19 - 0{,}37 + 0{,}81$

Übung 2.4
Richtig oder falsch?

a) $3 \cdot 9 + 2 \cdot 4 = 27 + 8 = 35$ b) $3 \cdot 9 + 2 \cdot 4 = 3 \cdot 11 \cdot 4 = 132$

c) $\dfrac{0}{0} = 0 \cdot 0^{-1} = 1$ d) $\dfrac{0}{0} = 0 \cdot 0^{-1} = 0$

2.3 Rechnen mit Brüchen

Bruchrechnen ist eine der elementaren Grundlagen der Mathematik. Leider stellt man in den ersten Mathematikvorlesungen und -übungen häufig fest, dass viele Studierende diese Grundkenntnisse nicht umfassend beherrschen. Ein Indiz dafür ist die beim Rechnen häufig beobachtbare Vorgehensweise, Brüche zunächst mit dem Taschenrechner in Dezimalzahlen umzuwandeln und dann weiterzurechnen. Bei Brüchen wie $\frac{1}{2} = 0{,}5$ und $\frac{1}{5} = 0{,}2$ mag dies noch ohne Probleme möglich sein, bei $\frac{3}{7} = 0{,}4285714\ldots$ wird die weitere Rechnung mühsamer, es sei denn, man rundet aus Bequemlichkeit, was aber die Genauigkeit der Ergebnisse maßgeblich beeinträchtigen kann. Dies bedeutet: <u>Bruchrechnen muss beherrscht werden</u>. Deshalb werden in diesem Abschnitt die elementaren Regeln des Bruchrechnens wiederholt und einige Übungen zur Selbstüberprüfung angeboten. Wer hier noch erhebliche Defizite aufweist, sollte diese anhand von Schulbüchern und durch vieles Üben ausgleichen.

Für das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren von Brüchen ist die Methode des Erweiterns und Kürzens von Brüchen hilfreich.