Differentialgeometrie

von

Dr. phil. Karl Strubecker
o. Professor der Mathematik an der Universität Karlsruhe

II

Theorie der Flächenmetrik

Zweite, ergänzte Auflage

Mit 23 Figuren

Sammlung Göschen Band 1179/1179a

Walter de Gruyter & Co · Berlin 1969

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.

Die Gesamtdarstellung umfaßt folgende drei Bände:

I:	Kurventheorie der Ebene und des Raumes	(Band 1113/1113a)
II:	Theorie der Flächenmetrik	(Band 1179/1179a)
III:	Theorie der Flächenkrümmung	(Band 1180/1180a)

 — Archiv-Nr. 7712688.
Satz und Druck: Walter de Gruyter & Co., D 1, Berlin 30.
Printed in Germany

Inhalt

Seite

Literaturverzeichnis

Neben der in Band I dieser Differentialgeometrie angeführten deutschen Literatur befassen sich mit dem Gegenstande des vorliegenden Bandes II noch die folgenden deutsch geschriebenen Werke:

1. Heinrich Behnke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, 7. Aufl., Münster in Westfalen 1966.
2. Adalbert Duschek-August Hochrainer, Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung, I. Teil: Tensoralgebra, 4. Aufl., Wien 1960; II. Teil: Tensoranalysis, 2. Aufl. Wien 1962.
3. F. Fiala, Mathematische Kartographie, Berlin 1957.
4. Carl Friedrich Gauß, Disquisitiones generales circa superficies curvas, Comm. soc. sci. Gottingensis rec., class. math. 6, Göttingen 1828 = Gauß, Ges. Werke Band VIII; Deutsch von A. Wangerin, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 5, Leipzig 1889.
5. Wolfgang Haack, Elementare Differentialgeometrie, Basel und Stuttgart 1955.
6. Viktor und Karl Kommerell, Theorie der Raumkurven und krummen Flächen II (Kurven auf Flächen. Spezielle Flächen. Theorie der Strahlsysteme), 4. Aufl., Berlin und Leipzig 1931.
7. Tullio Levi-Civita, Der absolute Differentialkalkül, Deutsche Ausgabe von Adalbert Duschek, Berlin 1928.
8. Alfred Lotze, Vektor- und Affinor-Analysis, München 1950.
9. Georg Scheffers, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, Band II (Einführung in die Theorie der Flächen), 3. Aufl., Berlin und Leipzig 1922.
10. Georg Scheffers-Karl Strubecker, Wie findet und zeichnet man Gradnetze von Land- und Sternkarten? 2. Aufl., Stuttgart 1956.
11. Jan Arnoldus Schouten-Dirk Jan Struik, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, Band I (von Schouten) Algebra und Übertragungslehre, Groningen-Batavia 1935; Band II (von Struik) Geometrie, Groningen-Batavia 1938.
12. Karlheinz Wagner, Kartographische Netzentwürfe, 2. Aufl., Mannheim 1962.

Ferner sei auf die folgenden englisch, französisch und italienisch geschriebenen Werke verwiesen:

13. Luigi Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, 3. Aufl., Band I/1 und I/2 Bologna 1927; Band II/1 Pisa 1923, II/2 Bologna 1924.
14. Georges Bouligand, Les principes de l'analyse géométrique, Band I/II, Paris 1949.
15. Élie Cartan, Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Paris 1945.
16. Élie Cartan, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, 2. Aufl., Paris 1946.
17. Gaston Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, 4 Bände, 2. Aufl., Paris 1915.

18. L. Driencourt — J. Laborde, Traité des projections géographiques, Paris 1932.
19. Luther Pfahler Eisenhart, An introduction to differential geometry, with use of the tensor calculus, 2. Aufl., Princeton 1947.
20. Andrew Russell Forsyth, Lectures on the differential geometry of curves and surfaces, Cambridge 1912.
21. William C. Graustein, Elementary differential geometry, New York 1935.
22. Heinrich W. Guggenheimer, Differentialgeometry, New York-San Francisco-Toronto-London 1963.
23. Gaston Julia, Eléments de géométrie infinitesimale, Paris 1936.
24. Ernest Preston Lane, Metric differential geometry of curves and surfaces, Chicago 1940.
25. Jacqueline Lelong-Ferrand, Géométrie différentielle (Tenseurs, Formes différentielles) Paris 1963.
26. Barrett O'Neill, Elementary Differential Geometry, New York-London 1966.
27. Jan Arnoldus Schouten, Ricci-Calculus, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.
28. Dirk Jan Struik, Lectures on classical differential geometry, Cambridge (Massachusetts) 1950.
29. O. Veblen - J. H. C. Whitehead, The foundations of differential geometry, Cambridge Tracts Nr. 29, 2. Abdruck, 1953.
30. C. E. Weatherburn, Differential geometry of three dimensions I/II, Cambridge 1927/1930.
31. C. E. Weatherburn, An introduction to Riemannian geometry and the tensor calculus, Cambridge 1950.
32. T. J. Willmore, An introduction to differential geometry, Oxford 1959.

Formelverweise: Es gelten sinngemäß die schon in Band I erklärten und angewandten Verweise. Insbesondere bedeutet (III. 5) das Kapitel 5 des (vorliegenden) Abschnittes III.

Die Verweise auf Abschnitt I (Theorie der ebenen Kurven) und Abschnitt II (Theorie der Raumkurven) beziehen sich auf:

Karl Strubecker, Differentialgeometrie, Band I: Kurventheorie der Ebene und des Raumes, Sammlung Göschen Band 1113/1113a, 2. Aufl. Berlin 1964.

Das Werk wird abgeschlossen durch:

Karl Strubecker, Differentialgeometrie, Band III: Theorie der Flächenkrümmung, Sammlung Göschen Band 1180/1180a, 2. Aufl., Berlin 1968.

III. Theorie der Flächenmetrik

Einleitung

Die Flächentheorie zerfällt in zwei Teile. Die innere Geometrie der Flächen untersucht die bloß von ihrer Metrik abhängigen Eigenschaften, d. h. jene differentiellen Eigenschaften der Flächen, die nur von ihren inneren Maßverhältnissen abhängen, welche durch geodätische Messungen in der Flächenhaut feststellbar sind. Die äußere Geometrie der Flächen zieht auch noch den Umgebungsraum heran, in den die Flächenhaut in bestimmter Weise eingebettet ist, und untersucht die von der Art dieser Einbettung abhängigen Krümmungseigenschaften der Flächen.

In diesem ersten Teilband der Flächentheorie soll hauptsächlich die elementare metrische Geometrie der Flächen (einschließlich der Theorie der Abbildungen von Flächen aufeinander) dargestellt werden. Die Elemente der Krümmungstheorie bilden den Hauptgegenstand des anschließenden zweiten Teilbandes der Flächentheorie.

A. Flächenmetrik

1. Gaußsche Darstellung der Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum. Die Differentialgeometrie bedient sich zur analytischen Beschreibung zweidimensionaler Flächen (genauer: Flächenstücke Φ) im dreidimensionalen euklidischen Raume der von Carl Friedrich Gauß (1828) eingeführten Parameterdarstellung.

Wir haben in (I. 2) die Begriffe der Jordankurve und der glatten Kurve kennengelernt. Das zweidimensionale Gegenstück dazu ist der Begriff der Jordanfläche und der glatten Fläche.

Unter einem abgeschlossenen Jordanschen Flächenstück (oder einer Jordanfläche Φ) versteht man das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild eines abgeschlossenen ebenen Bereiches $\mathfrak{B}$, den wir stets als einfach zusammenhängend voraussetzen. Dieser Bereich $\mathfrak{B}$ kann z. B. das Rechteck $\mathfrak{R}$ $(a \leqq u \leqq b,\ c \leqq v \leqq d)$ der auf cartesische Koordinaten u, v bezogenen (u, v)-Ebene $\pi(u, v)$ sein, die wir als Parameterebene π bezeichnen. Die cartesischen Koordinaten x, y, z der Punkte $P(x, y, z)$ der (abgeschlossenen) Jordanfläche Φ sind dann in dem gemeinsamen Definitionsbereich $\mathfrak{R}$ der (u, v)-Ebene π erklärte, reelle, eindeutige und stetige Funktionen der beiden Parameter u, v

$$(1.1) \qquad x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),$$

welche die Eigenschaft besitzen, daß verschiedenen Parameterpaaren $(u, v) \neq (u', v')$ stets verschiedene Raumpunkte $P(x, y, z) \neq P'(x', y', z')$ entsprechen. Die Gleichungen (1) nennt man eine Gaußsche Parameterdarstellung der Jordanfläche Φ mit den Gaußschen Parametern u, v (Bild 1).

Beispiel 1: Die Formeln

$$(1.2) \qquad x = a_{11}u + a_{12}v, \quad y = a_{21}u + a_{22}v, \quad z = 0$$

bilden für $A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ jeden Bereich $\mathfrak{B}$ der (u, v)-Ebene umkehrbar eindeutig und stetig auf einen dazu affinen Bereich Φ der Ebene $z = 0$ ab; sie sind daher eine Gaußsche Parameterdarstellung der (x, y)-Ebene. Durch die Formeln (2) werden für die Punkte $P(x, y)$ der (x, y)-Ebene lediglich affine (schiefwinkelige) Koordinaten (u, v) eingeführt. Die Funktionen (2) sind nämlich eindeutig und stetig; wegen $A \neq 0$ sind sie auch eindeutig nach den Gaußschen Parametern (affinen Koordinaten) u und v auflösbar mit dem Ergebnis:

$$(1.3) \qquad u = \frac{a_{22}}{A}x - \frac{a_{12}}{A}y, \quad v = -\frac{a_{21}}{A}x + \frac{a_{11}}{A}y.$$

Jeder (einfach zusammenhängende) Bereich Φ der Ebene $z = 0$ ist damit eine Jordanfläche.

Beispiel 2: Die Formeln

$$x = u, \; y = v, \; z = uv \tag{1.4}$$

bilden jeden Bereich $\mathfrak{B}$ der (u, v)-Ebene umkehrbar eindeutig und stetig auf einen Bereich Φ von Punkten $P(x, y, z)$ des hyperbolischen Paraboloids $z = xy$ ab, der eine Jordanfläche ist. Das Paraboloid als Ganzes ist, weil es nicht abgeschlossen, sondern offen ist, ebenso wie die unbegrenzte Ebene (2), eine offene Jordansche Fläche.

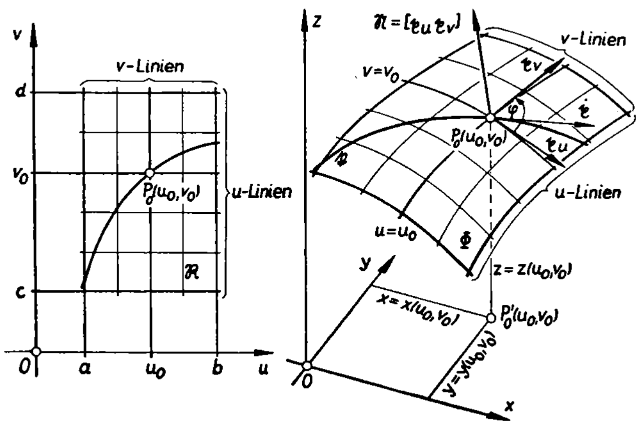

Bild 1. Fläche Φ mit u-Linien und v-Linien eines Gaußschen Parameternetzes mit ihrem Parameterbereich (Rechteck $\mathfrak{R}$) in der (u, v)-Ebene

Beispiel 3: Die Formeln (Bild 2)

$$x = r\cos u \cos v, \; y = r\sin u \cos v, \; z = r\sin v \tag{1.5}$$

bilden das halboffene Rechteck $\mathfrak{R}'$ $(0 \leq u < 2\pi, \; -\pi/2 < v < +\pi/2)$ der (u, v)-Ebene umkehrbar eindeutig und stetig auf die im Nord- und Südpol punktierte Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{1.6}$$

ab, jeden abgeschlossenen Teilbereich von $\mathfrak{R}'$ also auf einen Bereich der Kugel, der den Nord- und Südpol nicht enthält und den Nullmeridian $u = 0$ nirgends überschreitet. Jedes solche abgeschlossene Stück der Kugel ist daher ein Jordansches Flächenstück.

Die Gaußschen Parameter (u, v) in (5) sind die geographischen Koordinaten auf der Kugel; u ist die geographische Länge und v die geographische Breite des Kugelpunktes $P(x, y, z)$.

Die weggelassenen Randpunkte des Rechtecks $\mathfrak{R}'$ mit den Parametern ($u = 2\pi$, $v =$ beliebig) liefern dieselben Kugelpunkte $P(r\cos v, 0, r\sin v)$ wie die beibehaltenen Randpunkte ($u = 0$, $v =$ beliebig), nämlich die Punkte P des Nullmeridians. Dem Nordpol $N(0{,}0, +1)$ und Südpol $S(0{,}0, -1)$ entsprechen je unendlich viele Randpunkte des (halboffenen) Parameterrechtecks $\mathfrak{R}'$, nämlich die Punkte ($u =$ beliebig, $v = +\pi/2$) und ($u =$ beliebig, $v = -\pi/2$). Nord- und Südpol heißen daher singuläre Punkte des gewählten Gaußschen Parametersystems der geographischen Koordinaten. Die Kugelfläche als Ganzes ist trotzdem eine überall reguläre geschlossene Jordansche Fläche.

Allgemein heißt jede Fläche, die sich topologisch, d. h. stetig und umkehrbar eindeutig auf die Kugel abbilden läßt, eine geschlossene Jordanfläche vom topologischen Typus der Kugel.

Der Begriff der Jordanfläche muß für die Zwecke der Differentialgeometrie noch weiter eingeschränkt werden. Um die Methoden der Differentialgeometrie auf Jordanflächen anwenden zu können, muß man in dem Bereiche $\mathfrak{B}(u, v)$ stetige Differenzierbarkeit der Funktionen (1) voraussetzen, d. h. man muß die Existenz und Stetigkeit der folgenden sechs partiellen Ableitungen verlangen:

$$(1.\ 7) \qquad \left\| \begin{matrix} x_u(u, v), & y_u(u, v), & z_u(u, v) \\ x_v(u, v), & y_v(u, v), & z_v(u, v) \end{matrix} \right\|.$$

Selbst wenn die drei Parameterfunktionen (1) in $\mathfrak{B}(u, v)$ stetig differenzierbar sind, müssen sie nicht in allen Fällen ein Flächenstück darstellen. Unter gewissen Bedingungen, die den Rang der Funktionalmatrix (7) betreffen, können die Formeln (1) nämlich bloß einen festen Punkt oder nur eine glatte Kurve darstellen, wie wir in (III. 2) genauer lernen werden. Ist der *Rang* der Matrix (7) überall in $\mathfrak{B}(u, v)$ *gleich* 2, so stellen die Formeln (1), wie sich in (III. 2) zeigen wird, wirklich ein *Jordansches Flächenstück* Φ dar, das wegen der stetigen Differenzierbarkeit der Koordinatenfunktionen (1) dann genauer als ein einmal stetig differenzierbares oder als ein *glattes Flächenstück* (eine **glatte Fläche**) bezeichnet wird.

Die Ebene (2), das Paraboloid (4), die Kugel (5) sind Beispiele von solchen (offenen bzw. geschlossenen) glatten Flächen. Die Oberfläche eines Drehkegels ist überall glatt außer in seiner Spitze.

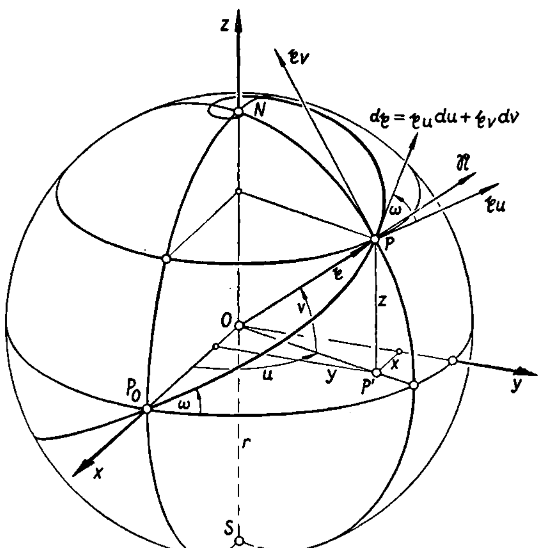

Bild 2. Kugel mit Parallelkreisen (u-Linien) und Meridianen (v-Linien) als Gaußschen Parameterlinien (geographische Koordinaten u, v). Loxodrome der Kugel

Bemerkung 1: Mehrfach differenzierbare und analytische Flächen. Neben den glatten Flächen, bei denen die drei Funktionen (1) nach u und v einmal stetig differenzierbar sind, hat man in der Differentialgeometrie auch zwei- oder mehrfach stetig ableitbare Flächen zu studieren; z. B. erfordert das Studium der Flächenkrümmung die Existenz und Stetigkeit der zweiten Ableitungen der Funktionen (1). Ein zweimal stetig differenzierbares Flächenstück wird daher auch als stetig gekrümmt bezeichnet.

Oft setzt man die Funktionen (1) sogar als analytisch voraus, indem man annimmt, sie seien in der Umgebung der Stelle (u_0, v_0) in Potenzreihen nach $u - u_0$ und $v - v_0$ mit gemeinsamem Konvergenzbereich $\mathfrak{B}$ entwickelbar. Die Fläche heißt dann analytisch. Analytische Flächenstücke sind in $\mathfrak{B}$ beliebig oft stetig ableitbar.

Bemerkung 2: Komplexe analytische Flächen. Werden in der Gaußschen Parameterdarstellung (1) einer Fläche Φ komplexe Variable u, v und komplexe analytische Funktionen $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ als Koordinaten zugelassen, so erhält man ein **komplexes analytisches Flächenstück** (auf dem dann, bei Zählung reeller Parameter, ∞^4 komplexe Punkte liegen).

Sind die drei Funktionen (1) reell analytisch, so kann man sie nach den Prinzipien der Funktionentheorie analytisch ins Komplexe fortsetzen. Man erhält dann eine komplexe analytische Fläche, welche einen (für reelle Werte u, v entstehenden) reellen analytischen Flächenzug enthält, den wir kurz als eine **reelle analytische Fläche** bezeichnen. Das trifft z. B. bei reellen algebraischen Flächen zu, wie bei der Ebene (2) oder der Kugel (5).

Wir fassen die cartesischen Koordinaten (x, y, z) in (1) zu dem Ortsvektor $\mathfrak{x}$ des Flächenpunktes $P(x, y, z)$ zusammen, der dann ebenfalls von den Parametern u und v abhängt, und schreiben die Fläche vektoriell in der Gestalt

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v) = x(u, v)\mathfrak{e}_1 + y(u, v)\mathfrak{e}_2 + z(u, v)\mathfrak{e}_3, \tag{1.8}$$

wobei $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ die Einheitsvektoren der Koordinatenachsen des (rechtshändigen) cartesischen Koordinatensystems sind.

Bemerkung 3: Es ist oft zweckmäßig, die Koordinaten (x, y, z) mit (x_1, x_2, x_3) zu bezeichnen; die Gaußsche Flächendarstellung (8) lautet dann

$$(1.9) \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v) = \sum_{i=1}^{3} x_i(u, v)\mathfrak{e}_i.$$

Erteilt man (Bild 1) dem Parameter v einen festen Wert $v = v_0 =$ fest, so stellt (8) bei variablem u eine auf der Fläche Φ liegende Raumkurve (eine **u-Linie** der Fläche) dar, vorausgesetzt, daß der entstehende Vektor $\mathfrak{x}\ (u, v_0)$ nicht konstant ist. Ebenso entsteht für $u = u_0 =$ fest, aber $v =$ variabel eine **v-Linie** auf der Fläche, vorausgesetzt, daß $\mathfrak{x}(u_0, v)$ nicht konstant ist. Diese beiden **Parameterlinien** kreuzen sich in einem bestimmten Punkte P_0 des Flächenstückes Φ, der eindeutig durch die beiden festen Parameterwerte u_0, v_0 bestimmt wird, und dessen Ortsvektor $\mathfrak{x}(u_0, v_0)$ ist. Wir bezeichnen dann (u_0, v_0) als die beiden **Gaußschen Parameter** oder **Gaußschen Koordinaten** des Flächenpunktes P_0.

Ähnlich wie das Rechteck $\mathfrak{R}$ der (u, v)-Ebene π netzförmig von den Geraden $u = u_0 =$ const (v-Linien) und $v = v_0 =$ const (u-Linien) überdeckt wird, so wird auch im Raume das Flächenstück Φ von den (i. a. krummen) Linien $u = u_0 =$ const (v-Linien) und $v = v_0 =$ const (u-Linien) netzförmig überzogen. Die Gaußschen Parameterlinien $u =$ const, $v =$ const überdecken also das Flächenstück mit einem i. a. krummlinigen Koordinatennetz. Die Parameter (u, v) heißen daher auch krummlinige Koordinaten auf der Fläche.

2. Zulässige Parameter. Reguläre Parameternetze. Drei den Ortsvektor

$$(2.1) \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v) \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

bestimmende, in einem Bereich $\mathfrak{B}(u, v)$ um die Stelle (u, v) eindeutige und stetig ableitbare Koordinatenfunktionen, $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, von denen wir in Zukunft annehmen wollen, daß sie an allen Stellen (u, v) des Parameterbereiches nach u und v einmal stetig differenzierbar seien, liefern nicht immer eine (glatte) Fläche; es kann u. U. auch bloß eine (glatte) Raumkurve oder ein Punkt entstehen. Entscheidend dafür ist der Rang r der Funktionalmatrix

$$(2.2) \quad \mathfrak{M} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{matrix} \right\|$$

in der Umgebung $\mathfrak{B}(u, v)$ der Stelle (u, v).

Drei Fälle sind möglich:

1. **Rang $r = 0$.** Dann sind in $\mathfrak{M}$ alle sechs Matrizenelemente Null, d. h. x, y, z sind Konstanten und (1) stellt einen festen **Punkt** $P(x, y, z)$ dar.
2. **Rang $r = 1$.** Dann verschwinden zwar nicht alle Glieder, aber alle zweireihigen Unterdeterminanten der Matrix $\mathfrak{M}$, d. h. es verschwinden für alle (u,v) die drei Funktionaldeterminanten

$$(2.3) \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \equiv 0, \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \equiv 0, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \equiv 0.$$

Nach den Lehren der Analysis bestehen dann zwischen den drei Funktionen (1) Beziehungen der Gestalt

$$(2.4) \quad f_1(y, z) = 0, \; f_2(z, x) = 0, \; f_3(x, y) = 0,$$

wobei wenigstens zwei der drei Gleichungen (4) nicht identisch erfüllt sind. Daher ist das von (1) dargestellte Raumgebilde der Schnitt von wenigstens zwei der drei achsenparallelen Zylinder (4), also eine bestimmte (glatte) **Raumkurve.**

3. **Rang $r = 2$.** Dann ist wenigstens eine der drei Funktionaldeterminanten in (3) nicht Null, z. B. $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$. Nach dem Fundamentalsatz über implizite Funktionen ist dann das System der beiden ersten Gleichungen in (1) in einer gewissen Umgebung $\mathfrak{B}$ (u, v) der Stelle (u, v) nach u und v eindeutig auflösbar, also

$$(2.5) \qquad u = u(x, y)\,, \quad v = v(x, y)\,,$$

und die Funktionen (5) sind stetig nach x und y ableitbar. Nach der dritten Gleichung von (1) ist dann z eine in dieser Umgebung $\mathfrak{B}(u, v)$ eindeutige und einmal stetig ableitbare Funktion von x und y:

$$z = z(u, v) = z[u(x, y), v(x, y)] = f(x, y)\,, \tag{2.6}$$

d. h. die Darstellung (1) oder (1. 1) liefert in diesem Falle in $\mathfrak{B}\,(u, v)$ eine (glatte) **Fläche** Φ.

Daraus folgt

Satz 1: *Notwendig und hinreichend dafür, daß die in dem Bereiche* $\mathfrak{B}(u, v)$ *stetig ableitbaren Funktionen* (1) *die Gaußsche Parameterdarstellung einer glatten Fläche liefern, ist, daß die Funktionalmatrix* (2) *in* $\mathfrak{B}(u, v)$ *den Rang* $r = 2$ *hat.*

Man schreibt dann:

$$\mathfrak{M} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} = \left\| \begin{matrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{matrix} \right\| \neq \mathfrak{O}. \tag{2. 7}$$

Bemerkung 1: Man nennt (6) eine explizite Darstellung der Fläche Φ. Auf diese Darstellungsart haben Euler und die Mathematiker vor Gauß die analytische Beschreibung und Differentialgeometrie der Flächen gegründet.

Daneben gibt es noch die implizite Darstellung

$$F(x, y, z) = 0 \tag{2. 8}$$

der Fläche Φ, die man aus der Gaußschen Darstellung in (1. 1) erhält, indem man aus den drei Gleichungen von (1. 1) die beiden Parameter u und v eliminiert.

Bemerkung 2: Man kann auch umgekehrt aus der Eulerschen expliziten Darstellung $z = z(x, y)$ einer glatten Fläche Φ eine Gaußsche Parameterdarstellung gewinnen, indem man

$$x = u, \quad y = v, \quad z = z(u, v) \tag{2. 9}$$

setzt. Tatsächlich hat dann die Funktionalmatrix

$$\mathfrak{M} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v)} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & z_u \\ 0 & 1 & z_v \end{matrix} \right\| \tag{2. 10}$$

stets den Rang 2.

Durch den Punkt $P(u, v)$ der Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ mit den Gaußschen Parametern u, v geht eine u-Linie (u = variabel, v = fest) und eine v-Linie (u = fest, v = variabel). *Die Tangentenvektoren* $\mathfrak{x}_u$ *und* $\mathfrak{x}_v$ *dieser Parameterlinien im Punkte* $P(u, v)$ *der Fläche* (1) *erhält man nach*

(II. 2. 2) *durch Ableiten des Ortsvektors* $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ *nach dem Kurvenparameter* u *bzw.* v, *d. h. es ist*

$$(2.11)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{x}_u &= x_u(u, v)\mathfrak{e}_1 + y_u(u, v)\mathfrak{e}_2 + z_u(u, v)\mathfrak{e}_3, \\ \mathfrak{x}_v &= x_v(u, v)\mathfrak{e}_1 + y_v(u, v)\mathfrak{e}_2 + z_v(u, v)\mathfrak{e}_3. \end{aligned}$$

Diese beiden Tangentenvektoren sind genau die Zeilenvektoren der Funktionalmatrix $\mathfrak{M}$ in (2). Ihr Außenprodukt ist der Vektor

$$(2.12)\qquad [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v] = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\mathfrak{e}_1 + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\mathfrak{e}_2 + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\mathfrak{e}_3,$$

dessen Koordinaten die drei Unterdeterminanten zweiter Ordnung der Matrix $\mathfrak{M}$ sind.

Die Voraussetzung (7) besagt dann, daß in keinem Punkte $P(u, v)$ des Flächenstücks Φ das Außenprodukt (12) der beiden Tangentenvektoren $\mathfrak{x}_u(u, v)$ und $\mathfrak{x}_v(u, v)$ verschwinden darf:

$$(2.13)\qquad [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v] \neq \mathfrak{o}.$$

Dann ist gewiß auch $\mathfrak{x}_u \neq \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{x}_v \neq \mathfrak{o}$, d. h. u und v sind dann auf den Parameterlinien der Fläche im Sinne von (II. 2) zulässige Parameter; darüber hinaus sind aber die Tangentenvektoren $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ der Parameterlinien wegen (13) auch nicht proportional, d. h. die beiden Parameterlinien berühren sich nicht, sondern schneiden sich in jedem Flächenpunkte $P(u, v)$ unter einem Winkel φ, der weder 0 noch π ist.

Wir nennen Gaußsche Parameter u, v, die auf der Fläche Φ der Bedingung (7) oder (13) genügen, **zulässige Parameter**. Die u-Linien und die v-Linien bilden dann auf dem glatten Flächenstück Φ ein **reguläres Parameternetz,** dessen viereckige (i. a. krummlinige) Maschen keine verschwindenden oder gestreckten Winkel aufweisen (dessen Seiten sich nicht berühren).

Zusammenfassend gilt also (Bild 1):

Satz 2: *Ein Flächenstück Φ der Gaußschen Darstellung $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ ist glatt, wenn es durch zulässige, d.h. solche Gaußsche Parameter (u, v) beschrieben werden kann, in deren Definitionsbereich $\mathfrak{B}(u, v)$ überall $\mathfrak{x}(u, v)$ nach u und v stetig ableitbar und*

$$[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v] \neq \mathfrak{o} \tag{2.14}$$

ist. Durch jeden Punkt $P_0(u_0, v_0)$ von Φ läuft dann genau eine u-Linie $(v = v_0)$ und genau eine v-Linie $(u = u_0)$. Diese Parameterlinien überziehen das Flächenstück Φ mit einem regulären Parameternetz, dessen Netzmaschen vier weder verschwindende noch gestreckte Winkel aufweisen. Die Punkte $P(u,v)$ eines durch zulässige Parameter darstellbaren glatten Flächenstücks Φ heißen reguläre Flächenpunkte.

3. Einführung neuer zulässiger Gaußscher Koordinaten. Eine glatte Fläche Φ (gemeint ist damit stets ein glattes Flächenstück Φ) mit abgeschlossenem Parameterbereich $\mathfrak{B}(u, v)$ vom Ortsvektor

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v) \tag{3.1}$$

mit

$$[\mathfrak{x}_u(u, v),\ \mathfrak{x}_v(u, v)] \neq \mathfrak{o} \tag{3.2}$$

sei auf die zulässigen (alten) Gaußschen Parameter (u, v) bezogen. Neue zulässige Gaußsche Parameter $(\bar{u}, \bar{v})$ hängen dann mit den alten (u, v) durch stetig ableitbare Gleichungen

$$\bar{u} = \bar{u}(u, v), \quad \bar{v} = \bar{v}(u, v) \tag{3.3}$$

zusammen, die (wegen der eindeutigen Beschreibung der Flächenpunkte P sowohl durch die alten als auch die neuen Parameter) eindeutig nach (u, v) auflösbar sein sollen. Nach dem Fundamentalsatz über implizite Funktionensysteme ist dafür notwendig und hinreichend das Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante

$$(3.4)\qquad \bar{D} = \frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \bar{u}_u & \bar{u}_v \\ \bar{v}_u & \bar{v}_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Die (im Kleinen eindeutige und stetig ableitbare) Auflösung (Umkehrung) von (3) lautet dann:

$$(3.5)\qquad u = u(\bar{u},\bar{v}), \quad v = v(\bar{u},\bar{v}),$$

wobei ebenfalls die Funktionaldeterminante

$$(3.6)\qquad D = \frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})} = \frac{1}{\dfrac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)}} = \frac{1}{\bar{D}} \neq 0$$

ist. Die Gaußsche Darstellung der Fläche Φ lautet dann in den neuen Parametern $(\bar{u},\bar{v})$ nach (1) und (5)

$$(3.7)\qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u,v) = \mathfrak{x}[u(\bar{u},\bar{v}),\ v(\bar{u},\bar{v})] = \mathfrak{x}(\bar{u},\bar{v}).$$

Die neuen Parameterlinien, nämlich die $\bar{u}$-Linien ($\bar{u}$ = variabel, $\bar{v}$ = fest) und die $\bar{v}$-Linien ($\bar{u}$ = fest, $\bar{v}$ = variabel), bilden dabei auf der Fläche Φ wegen der Voraussetzung (4) wieder ein reguläres Parameternetz. Die Tangentenvektoren $\mathfrak{x}_{\bar{u}}(\bar{u},\bar{v})$ und $\mathfrak{x}_{\bar{v}}(\bar{u},\bar{v})$ der neuen Parameterlinien sind nämlich

$$(3.8)\qquad \mathfrak{x}_{\bar{u}} = \mathfrak{x}_u \cdot u_{\bar{u}} + \mathfrak{x}_v \cdot v_{\bar{u}}, \quad \mathfrak{x}_{\bar{v}} = \mathfrak{x}_u \cdot u_{\bar{v}} + \mathfrak{x}_v \cdot v_{\bar{v}},$$

und ihr Außenprodukt ist dabei wegen (2) und (6)

$$(3.9)\qquad [\mathfrak{x}_{\bar{u}}, \mathfrak{x}_{\bar{v}}] = \frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})} \cdot [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v] \neq 0.$$

Bemerkung 1: Je nachdem dabei die (in u und v stetige) Funktionaldeterminante

$$(3.10)\qquad \frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})} > 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})} < 0$$

ist, haben die Vektorenpaare $(\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v)$ und $(\mathfrak{x}_{\bar{u}}, \mathfrak{x}_{\bar{v}})$ auf der Fläche Φ denselben oder verschiedenen Sinn; entsprechend sind die Gaußschen Koordinatensysteme (u,v) und $(\bar{u},\bar{v})$ dann auf der Fläche Φ gleich oder entgegengesetzt orientiert.

Bemerkung 2: Aus den vorstehenden Überlegungen folgt, daß die zulässigen Parameteränderungen (3) der Eigenschaft (4) eine Gruppe bilden. Bei der Zusammensetzung zweier (regulärer) Parameteränderungen $(u, v) \parallel (\bar{u}, \bar{v})$ und $(\bar{u}, \bar{v}) \parallel (\bar{\bar{u}}, \bar{\bar{v}})$ multiplizieren sich ihre Funktionaldeterminanten:

$$(3.11) \qquad \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(\bar{\bar{u}}, \bar{\bar{v}})}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} = \frac{\partial(\bar{\bar{u}}, \bar{\bar{v}})}{\partial(u, v)}\,.$$

Bemerkung 3: Der Sonderfall einer neuen Bezifferung der Parameterskalen entsteht, wenn in den Formeln (3) der Parameter $\bar{u}$ nur von u und der Parameter $\bar{v}$ nur von v abhängt, also

$$(3.12) \qquad \bar{u} = \bar{u}(u), \quad \bar{v} = \bar{v}(v),$$

gilt, und dabei

$$(3.13) \qquad \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = \frac{d\bar{u}(u)}{du} \cdot \frac{d\bar{v}\,(v)}{dv} \neq 0$$

ist. Das Netz der Parameterlinien bleibt dann als Ganzes ungeändert, nur die Bezifferungen der Parameterlinien (die Parameterskalen) ändern sich. Die alten Skalenwerte u und v werden dabei durch die neuen Werte $\bar{u}$ und $\bar{v}$ ersetzt.

4. Flächenkurven. Flächentangenten. Tangentenebene. Wählt man auf der glatten Fläche Φ mit dem Ortsvektor

$$(4.1) \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v) = x(u, v)\,\mathfrak{e}_1 + y(u, v)\,\mathfrak{e}_2 + z(u, v)\,\mathfrak{e}_3$$

die Parameter u und v als stetig ableitbare Funktionen eines Parameters t, indem man setzt

$$(4.2) \qquad u = u(t), \quad v = v(t),$$

so bilden die entstehenden Punkte $P(u(t), v(t))$ eine Flächenkurve k mit dem Ortsvektor

$$(4.3) \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u(t), v(t)) = \mathfrak{x}(t).$$

Als Tangentenvektor dieser Flächenkurve k erhält man nach (II. 2. 2) durch Ableiten von $\mathfrak{x}(t)$ nach dem Parameter t den Vektor

$$(4.4) \qquad \frac{d\mathfrak{x}(t)}{dt} = \mathfrak{x}_u \frac{du(t)}{dt} + \mathfrak{x}_v \frac{dv(t)}{dt}$$

oder

$$(4.5) \qquad \dot{\mathfrak{x}}(t) = \mathfrak{x}_u \cdot \dot{u}(t) + \mathfrak{x}_v \cdot \dot{v}(t).$$

Wegen (2.13) ist $\dot{\mathfrak{x}}(t)$ kein Nullvektor und daher t ein zulässiger Kurvenparameter auf der Flächenkurve k, wenn (und nur wenn)

$$(4.6) \qquad (\dot{u}(t), \dot{v}(t)) \neq (0, 0)$$

ist. Die Kurve (3) ist dann eine **glatte Flächenkurve.**

Wegen der in (I. 4. Bem. 1) erwähnten Invarianz des ersten Differentials gegen Parameteränderungen schreibt man die Formel (4) gern statt in Ableitungen in Differentialen, indem man mit $dt \neq 0$ multipliziert; der Tangentenvektor von k nimmt dann die Gestalt

$$(4.7) \qquad d\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_u\, du + \mathfrak{x}_v\, dv$$

an. Zur Festlegung der Tangentenrichtung genügt es sogar, die Differentiale du und dv nur als Verhältnisgrößen $(du{:}dv)$ zu erklären, die wegen (6) nicht gleichzeitig verschwinden dürfen:

$$(4.8) \qquad (du{:}dv) \neq (0{:}0).$$

Jedes homogene Wertepaar (du, dv) oder jedes Werteverhältnis $(du{:}dv) \neq (0{:}0)$ kennzeichnet eine eindeutig bestimmte Tangentenrichtung (7) der Fläche im Punkte $P(u, v)$. Insbesondere liefern die Verhältnisse

$$(4.9) \qquad (du{:}dv) = (1{:}0) \text{ bzw. } (du{:}dv) = (0{:}1)$$

die Tangentenrichtungen $\mathfrak{x}_u(u, v)du$ an die u-Linie bzw. $\mathfrak{x}_v(u,v)dv$ an die v-Linie im Punkte $P(u, v)$. Die Längen dieser Tangentenvektoren $d\mathfrak{x}$ hängen dabei natürlich von der (willkürlichen) Wahl der homogenen Größen du und dv selbst ab.

Aus den Darstellungen (4), (5), (7) folgt, daß der Tangentenvektor $\dot{\mathfrak{x}}(t) = \frac{d\mathfrak{x}(t)}{dt}$ oder $d\mathfrak{x} = \dot{\mathfrak{x}}dt$ der durch den Punkt $P(u, v)$ der glatten Fläche (1) gehenden Flächenkurve $\mathfrak{x}(t)$ eine (nichttriviale) lineare Kombination der Tangentenvektoren $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ der Parameterlinien ist und daher mit ihnen in einer Ebene liegt, die wir als die **Tangentenebene** τ der Fläche Φ im Punkte $P(u, v)$ bezeichnen.

Bemerkung 1: Ist dann $\mathfrak{X} = (X, Y, Z)$ der Ortsvektor eines laufenden Punktes (X, Y, Z) der Tangentenebene τ, so sind die drei Tangentenvektoren $\mathfrak{X} - \mathfrak{x}(u, v)$, $\mathfrak{x}_u(u, v)$ und $\mathfrak{x}_v(u, v)$ komplanar, und man erhält als Gleichung der Tangentenebene τ der Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ im Punkte $P(u, v)$

(4. 10) $$[\mathfrak{X} - \mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v] = 0 \text{ oder } (\mathfrak{X} - \mathfrak{x}) \cdot [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v] = 0,$$

d. h. ausführlich

(4. 11) $$\begin{vmatrix} X - x(u, v) & x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ Y - y(u, v) & y_u(u, v) & y_v(u, v) \\ Z - z(u, v) & z_u(u, v) & z_v(u, v) \end{vmatrix} = 0.$$

Bemerkung 2: Eine Gleichung der Gestalt

(4. 12) $$f(u, v) = c = \text{konst.}$$

zwischen den Gaußschen Parametern u und v liefert im Parameterbereich $\mathfrak{B}(u, v)$ der (u, v)-Ebene eine Kurve. Wegen der umkehrbar eindeutigen Abbildung, die zwischen der Parameterebene $\pi(u, v)$ und der Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ besteht, beschreibt die Gleichung (12) zwischen den Parametern (u, v) auch auf der Fläche eine Kurve, die stetig ableitbar, d. h. mit stetiger Tangente versehen ist, wenn die Funktion $f(u, v)$ stetige Ableitungen $f_u(u, v)$ und $f_v(u, v)$ hat. Jene Stellen (u, v) von (12), an denen f_u und f_v gleichzeitig verschwinden, heißen singuläre Punkte der Kurve (12) und sollen aus der Betrachtung ausgeschlossen werden.

Da längs der Flächenkurve (12) neben $f(u, v) = c$ auch

(4. 13) $$df(u, v) = f_u(u, v)\, du + f_v(u, v)\, dv = 0$$

ist, gilt für die Tangentenrichtung dieser Flächenkurve

(4. 14) $$du : dv = f_v(u, v) : -f_u(u, v).$$

5. Normalenvektor der Fläche. Die metrischen Fundamentalgrößen *E, F, G* und *W*. Punkte mit isotropen Flächennormalen und isotropen Tangentenebenen. Nach (4. 10) steht der wegen (2. 13) nicht verschwindende Vektor

(5. 1) $$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(u, v) = [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v] \neq 0$$

auf der Tangentenebene τ und damit auf allen Flächentangenten $\mathfrak{X} - \mathfrak{x} = \alpha \mathfrak{x}_u + \beta \mathfrak{x}_v$ des regulären Flächenpunktes $P(u, v)$ normal. $\mathfrak{N}$ ist daher ein Normalenvektor der Fläche Φ im Punkte $P(u, v)$.

Der Normalenvektor $\mathfrak{N} = [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]$ der Fläche bildet in reellen Flächenpunkten P zusammen mit den beiden reellen Parameterrichtungen $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ ein positives Dreibein; denn wegen (1) hat das Spatprodukt $[\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \mathfrak{N}]$ einen positiven Wert:

(5. 2) $$[\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \mathfrak{N}] = [\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v] \cdot [\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v] = [\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v]^2 = \mathfrak{N}^2 > 0.$$

Nach der Identität von Lagrange (II. 1. 22) erhält man für das Längenquadrat $\mathfrak{N}^2$ des Normalenvektors (1) ausführlicher

(5. 3) $$\mathfrak{N}^2 = [\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v]^2 = \mathfrak{x}_u^2 \mathfrak{x}_v^2 - (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v)^2 = EG - F^2 = W^2.$$

Dabei haben wir mit Gauß (1828) gesetzt:

(5. 4) $$\boxed{\begin{aligned} E &= E(u,v) = \mathfrak{x}_u^2(u, v) &&= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ F &= F(u,v) = \mathfrak{x}_u(u,v) \cdot \mathfrak{x}_v(u,v) &&= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G &= G(u,v) = \mathfrak{x}_v^2(u,v) &&= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{aligned}}$$

und

(5. 5) $$\boxed{W^2 = EG - F^2, \text{ d. h. } W = W(u,v) = \sqrt{EG - F^2}.}$$

Die nur vom Flächenpunkte $P(u, v)$ abhängigen Größen $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$ heißen die **Gaußschen Fundamentalgrößen 1. Art** der Flächentheorie. Sie beherrschen, wie sich zeigen wird, die **Metrik** der Fläche und heißen daher auch die **metrischen Fundamentalgrößen** der Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$.

Die Größen

(5. 6) $$E = \mathfrak{x}_u^2 = |\mathfrak{x}_u|^2 \text{ und } G = \mathfrak{x}_v^2 = |\mathfrak{x}_v|^2$$

sind identisch mit den Längenquadraten der Tangentenvektoren $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ der Parameterlinien. Daher ist für reelle Flächen und reelle reguläre Parameternetze stets

(5.7) $E(u, v) > 0$ und $G(u, v) > 0$.

Bemerkung 1: Auf komplexen analytischen Flächen kann jedoch auch

(5.8) $E(u, v) = \mathfrak{x}_u^2(u, v) = 0$ bzw. $G(u, v) = \mathfrak{x}_v^2(u, v) = 0$

sein. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn im Punkte $P(u, v)$ die Parameterrichtungen $\mathfrak{x}_u$ bzw. $\mathfrak{x}_v$ isotrop sind. Ist überall auf der Fläche

(5.9) $E(u, v) \equiv 0$ bzw. $G(u, v) \equiv 0$,

so sind alle Parameterlinien der Fläche isotrop. Die Fläche ist dann auf isotrope Parameter (u, v) bezogen.

Schließen die (nichtisotropen) Parameterrichtungen $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$ miteinander den Winkel φ ein, so ist nach (II. 1. 19) und (6)

(5.10) $F = (\mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_v) = |\mathfrak{x}_u| \cdot |\mathfrak{x}_v| \cdot \cos\varphi = \sqrt{EG}\cos\varphi$.

Folglich ist im Punkte $P(u, v)$ dann und nur dann

(5.11) $F = F(u, v) = 0$, wenn $\cos\varphi = 0$, d. h. $\varphi = \pm\pi/2$

ist; insbesondere kennzeichnet

(5.12) $F(u, v) = (\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v) \equiv 0 \quad \{u, v\}$

die orthogonalen Parameternetze der Fläche.

Für reelle Flächen und reelle reguläre Parameternetze gilt ferner nach (2) und (3)

(5.13) $W^2 = EG - F^2 = [\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v]^2 = \mathfrak{N}^2 > 0$.

Für reelle analytische Flächen, die auf konjugiert-komplexe Parameter (u, v) bezogen sind, kann auch $W^2 = \mathfrak{N}^2 < 0$ sein.

Für komplexe analytische Flächen und komplexe Parameternetze kann jedoch, trotz $\mathfrak{N} = [\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v] \neq \mathfrak{o}$, in einzelnen Punkten $P(u, v)$ oder überall auf der Fläche Φ

$$(5.14)\qquad W^2 = EG - F^2 = \mathfrak{N}^2 = 0 \text{ bzw.} \equiv 0$$

sein. Der Normalenvektor $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{o}$ der Fläche ist dann in diesen besonderen Punkten $P(u, v)$ oder überall auf der Fläche isotrop und weist nach einem Punkte des Ponceletschen absoluten Kegelschnitts (II. 1). In solchen Punkten $P(u, v)$ liegt dann der Normalenvektor $\mathfrak{N} = [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]$ wegen

$$\mathfrak{N}^2 = [\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v]^2 = [[\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v], \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v] = [\mathfrak{N}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v] = 0$$

in der Tangentenebene (4. 10) der Fläche; die Tangentenebene τ in P ist dann selbst isotrop, d. h. sie berührt den Ponceletschen absoluten Kegelschnitt.

Zusammenfassend gilt also

Satz 1: *In dem regulären Punkte $P(u, v)$ einer analytischen Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ ist dann und nur dann*

$$(5.15)\qquad W^2 = EG - F^2 = [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]^2 = 0\,,$$

wenn sein Normalenvektor $\mathfrak{N} = [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v] \neq \mathfrak{o}$ isotrop ist. In einem solchen (komplexen) Flächenpunkte $P(u, v)$ ist auch die Tangentenebene τ der Fläche isotrop (und umgekehrt) und die Flächennormale $\mathfrak{N}$ liegt in der Tangentenebene τ.

Wir schließen nunmehr Punkte mit isotropen Flächennormalen und isotropen Tangentenebenen (die ohnehin nur auf komplexen Flächen auftreten können) aus und betrachten also zunächst nur reguläre Flächenpunkte $P(u, v)$ mit

$$(5.16)\qquad \boxed{\mathfrak{N}^2 = [\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v]^2 = EG - F^2 = W^2 \neq 0.}$$

Unter der Annahme (16) kann man die Länge des Normalenvektors zu 1 normieren, indem man den Vektor $\mathfrak{N}$ durch den Vektor

$$(5.17)\qquad \boxed{\mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{N}}{|\mathfrak{N}|} = \frac{[\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v]}{W} = \frac{[\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v]}{\sqrt{EG - F^2}} \quad \text{mit } |\mathfrak{n}| = 1}$$

ersetzt. Wir werden fortan immer diesen normierten Normalenvektor $\mathfrak{n}$ benützen und kurz als den **Normalenvektor** $\mathfrak{n}$ der Fläche bezeichnen. Die Orientierung von $\mathfrak{n}$ hängt nach (17) von der Wahl des Vorzeichens der Wurzel W ab.

Bemerkung 2: Aus

$$(5.18) \qquad \mathfrak{n}^2 = 1$$

und (2) folgt nach (16)

$$(5.19) \quad [\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{n}] = [\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v]\mathfrak{n} = \mathfrak{N} \cdot \mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{N}}{W} = \frac{W^2}{W} = W \neq 0.$$

Beispiel 1: Dreht man, in der Flächennormalen $\mathfrak{n}$ des Punktes $P = (u, v)$ der Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ stehend, die Tangentenvektoren $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ der Parameterlinien im positiven Sinne (linksum) um einen rechten Winkel, so erhält man die neuen zu $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ senkrechten Tangentenvektoren $|\,\mathfrak{x}_u$ und $|\,\mathfrak{x}_v$, die wir als die zu $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ gehörenden Seitenvektoren bezeichnen. Für sie gelten nach dieser Erklärung die Formeln

$$(5.20) \qquad |\,\mathfrak{x}_u = [\mathfrak{n}\,\mathfrak{x}_u]\,, \quad |\,\mathfrak{x}_v = [\mathfrak{n}\,\mathfrak{x}_v]\,.$$

Die Vektortripel $(\mathfrak{x}_u, |\,\mathfrak{x}_u, \mathfrak{n})$ und $(\mathfrak{x}_v, |\,\mathfrak{x}_v, \mathfrak{n})$ sind dabei Rechtstripel.

Nach dem Graßmannschen Entwicklungssatz kann man diese Seitenvektoren $|\,\mathfrak{x}_u$ und $|\,\mathfrak{x}_v$ von $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ in folgender Weise linear durch $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ darstellen:

$$(5.21) \quad \left\{ \begin{aligned} |\,\mathfrak{x}_u &= [\mathfrak{n}\,\mathfrak{x}_u] = \frac{[[\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v]\mathfrak{x}_u]}{W} = \\ &= \frac{(\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_u)\mathfrak{x}_v - (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v)\mathfrak{x}_u}{W} = \frac{E\mathfrak{x}_v - F\mathfrak{x}_u}{W}, \\ |\,\mathfrak{x}_v &= [\mathfrak{n}\,\mathfrak{x}_v] = \frac{[[\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v]\mathfrak{x}_v]}{W} = \\ &= \frac{(\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v)\mathfrak{x}_v - (\mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_v)\mathfrak{x}_u}{W} = \frac{F\mathfrak{x}_v - G\mathfrak{x}_u}{W}. \end{aligned} \right.$$

Es gelten dann die Formeln

$$(5.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} (|\,\mathfrak{x}_u)^2 = \mathfrak{x}_u^2 = E,\ (|\,\mathfrak{x}_u \cdot |\,\mathfrak{x}_v) = (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v) = F,\ (|\,\mathfrak{x}_v)^2 = \mathfrak{x}_v^2 = G, \\ (\mathfrak{x}_u \,|\, \mathfrak{x}_u) = (\mathfrak{x}_v \,|\, \mathfrak{x}_v) = 0,\ (\mathfrak{x}_u \,|\, \mathfrak{x}_v) = -(\mathfrak{x}_v \,|\, \mathfrak{x}_u) = W^2, \end{array} \right.$$

ferner

$$(5.23)\quad \begin{cases} [\mathfrak{x}_u, |\,\mathfrak{x}_u, \mathfrak{n}] = E > 0\,, \ [\mathfrak{x}_v, |\,\mathfrak{x}_v, \mathfrak{n}] = G > 0 \\ [\mathfrak{x}_u, |\,\mathfrak{x}_v, \mathfrak{n}] = [\mathfrak{x}_v, |\,\mathfrak{x}_u, \mathfrak{n}] = F\,. \end{cases}$$

Allgemein gehört zu dem beliebigen Tangentenvektor

$$(5.24)\qquad \mathfrak{t} = \alpha\mathfrak{x}_u + \beta\mathfrak{x}_v$$

der Fläche nach derselben Konstruktion der neue, dazu normale Tangentenvektor

$$(5.25)\quad \begin{cases} \mathfrak{s} = |\,\mathfrak{t} = [\mathfrak{n}\mathfrak{t}] = [\mathfrak{n}, \alpha\mathfrak{x}_u + \beta\mathfrak{x}_v] = \alpha[\mathfrak{n}\mathfrak{x}_u] + \beta[\mathfrak{n}\mathfrak{x}_v] = \\ = \alpha\,|\,\mathfrak{x}_u + \beta\,|\,\mathfrak{x}_v = -\dfrac{\alpha F + \beta G}{W}\mathfrak{x}_u + \dfrac{\alpha E + \beta F}{W}\mathfrak{x}_v\,, \end{cases}$$

den wir wieder als den zum Flächenvektor $\mathfrak{t}$ gehörigen Seitenvektor $\mathfrak{s} = |\,\mathfrak{t}$ bezeichnen.

Nach der Konstruktion stehen die Vektoren $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s} = |\,\mathfrak{t}$ aufeinander normal

$$(5.26)\qquad (\mathfrak{t}\mathfrak{s}) = (\mathfrak{t}\,|\,\mathfrak{t}) = 0$$

und beide haben dieselbe Länge

$$(5.27)\qquad |\,\mathfrak{t}\,|^2 = |\,\mathfrak{s}\,|^2 = E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2\,.$$

6. Linienelement und Metrik einer Fläche. Isotrope Flächenkurven. Auf der glatten Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ sei wieder durch die stetig nach t ableitbaren Funktionen

$$(6.1)\qquad u = u(t), \quad v = v(t)$$

eine glatte Flächenkurve k gegeben, deren Ortsvektor dann

$$(6.2)\qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u(t), v(t)) = \mathfrak{x}(t)$$

ist, und deren in t stetiger Tangentenvektor lautet

$$(6.3)\qquad \frac{d\mathfrak{x}(t)}{dt} = \mathfrak{x}_u\frac{du(t)}{dt} + \mathfrak{x}_v\frac{dv(t)}{dt} = \mathfrak{x}_u\dot{u}(t) + \mathfrak{x}_v\dot{v}(t) = \dot{\mathfrak{x}}(t)$$

oder, differentiell geschrieben,

$$(6.4)\qquad d\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_u du + \mathfrak{x}_v dv.$$

Als Längenquadrat dieses Tangentenvektors $\dot{\mathfrak{x}}(t)$ bzw. $d\mathfrak{x}(t)$ erhält man nach (5. 4)

$$(6.5)\quad \dot{\mathfrak{x}}^2(t) = (\mathfrak{x}_u\dot{u} + \mathfrak{x}_v\dot{v})^2 = \mathfrak{x}_u^2\dot{u}^2 + 2(\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v)\,\dot{u}\dot{v} + \mathfrak{x}_v^2\dot{v}^2$$
$$= E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2$$

bzw.

$$(6.6)\quad (d\mathfrak{x})^2 = (\mathfrak{x}_u du + \mathfrak{x}_v dv)^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2.$$

Für die **Bogenlänge** s **der Kurve** $\mathfrak{x}(t)$ zwischen den Punkten P_0 und P mit den Parametern t_0 und t ergibt die Formel (II. 2. 3) das Integral

$$(6.7)\quad s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{\mathfrak{x}}^2(t)}\, dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\, dt = s(t).$$

Wegen $d\mathfrak{x} = \dot{\mathfrak{x}}(t)\,dt$ sowie $du = \dot{u}(t)\,dt$ und $dv = \dot{v}(t)\,dt$ kann man dafür schreiben

$$(6.8)\quad s = \int_{P_0}^{P} \sqrt{d\mathfrak{x}^2} = \int_{P_0}^{P} \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du dv + G\,dv^2}\,.$$

Differenziert man das Integral (7) nach der oberen Grenze t, so erhält man

$$(6.9)\qquad \frac{ds}{dt} = \sqrt{E\,\dot{u}^2 + 2F\,\dot{u}\dot{v} + G\,\dot{v}^2}.$$

Daraus folgt weiter für das **Quadrat des Bogenelementes** ds (das Linienelementquadrat) der Flächenkurve $\mathfrak{x}(t)$ die Formel

$$(6.10)\quad ds^2 = E(u, v)\,du^2 + 2F(u, v)\,du dv + G(u, v)\,dv^2 = d\mathfrak{x}^2.$$

Dieses Bogenelementquadrat ist nach (6) identisch mit dem Längenquadrat des Tangentendifferentials $d\mathfrak{x}$ und eindeutig festgelegt durch den Flächenpunkt $P(u, v)$ und durch die Tangentenrichtung (du, dv).

In jedem festen Flächenpunkt $P(u, v)$ ist das Linienelementquadrat (10) der Fläche eine quadratische Differentialform, die nach (5. 7) und (5. 13) für reelle Flächen $\mathfrak{x}(u, v)$ und reelle Parameter (u, v) wegen $E > 0$, $G > 0$ und $EG - F^2 = W^2 > 0$ positiv definit ist.

Zusammenfassend gilt somit

Satz 1: *Die* ***Längenmetrik*** *einer Fläche* $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ *wird von der quadratischen Differentialform ihres Bogenelementquadrates beherrscht, die man als die* ***erste*** *oder* ***metrische Grundform*** *der Fläche bezeichnet und in der Form*

$$\boxed{I = ds^2 = E(u,v)\,du^2 + 2F(u,v)\,du\,dv + G(u,v)\,dv^2} \tag{6.11}$$

schreibt. Dabei hängen die metrischen Fundamentalgrößen E, F, G *nur vom Flächenpunkte* $P(u, v)$ *ab, während die Richtung des Linienelementes* ds *durch das Verhältnis der Differentiale* $(du : dv)$ *festgelegt ist. Ist die Fläche reell und auf reelle Parameter* (u, v) *bezogen, so ist die metrische Grundform* (11) *positiv-definit.*

Bemerkung 1: Als Sonderfall von (11) erhält man für das Linienelement ds_1 der u-Linien ($v =$ const, $dv = 0$) bzw. für das Linienelement ds_2 der v-Linien ($u =$ const, $du = 0$)

$$ds_1 = \sqrt{E(u, v)}\, du \quad \text{und} \quad ds_2 = \sqrt{G(u, v)}\, dv. \tag{6.12}$$

Sind im Flächenpunkte $P(u, v)$ durch die beiden Verhältnisse $(du_1 : dv_1)$ und $(du_2 : dv_2)$ zwei Tangentenrichtungen

$$d\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_u\, du_1 + \mathfrak{x}_v\, dv_1 \quad \text{und} \quad d\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_u\, du_2 + \mathfrak{x}_v\, dv_2 \tag{6.13}$$

mit den Bogenelementen $ds_1 = |\, d\mathfrak{x}_1 \,|$ und $ds_2 = |\, d\mathfrak{x}_2 \,|$ gegeben, so schließen sie miteinander einen **Winkel** ψ ein, für dessen Kosinus man aus (II. 1. 19) die folgende Formel erhält

$$\cos\psi = \frac{(d\mathfrak{x}_1 \cdot d\mathfrak{x}_2)}{|\, d\mathfrak{x}_1 \,| \cdot |\, d\mathfrak{x}_2 \,|} = \frac{(\mathfrak{x}_u\, du_1 + \mathfrak{x}_v\, dv_1)\,(\mathfrak{x}_u\, du_2 + \mathfrak{x}_v\, dv_2)}{ds_1 \cdot ds_2}$$
$$= \frac{\mathfrak{x}_u^2\, du_1\, du_2 + (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v)\,(du_1\, dv_2 + du_2\, dv_1) + \mathfrak{x}_v^2\, dv_1\, dv_2}{ds_1 \cdot ds_2}$$

oder, mit den Bezeichnungen (5. 4),

$$\cos\psi = \tag{6.14}$$
$$= \frac{E\, du_1\, du_2 + F(du_1\, dv_2 + du_2\, dv_1) + G\, dv_1 dv_2}{\sqrt{E\, du_1^2 + 2F\, du_1\, dv_1 + G\, dv_1^2} \cdot \sqrt{E\, du_2^2 + 2F\, du_2\, dv_2 + G\, dv_2^2}}.$$

Im Zähler von (14) steht die sogenannte Polarform der quadratischen Differentialform (10) des Bogenelementquadrates.

Es folgt, daß auch die **Winkelmetrik** der Fläche von den drei metrischen Fundamentalgrößen E, F, G, beherrscht wird.

Bemerkung 2: Die beiden Flächenrichtungen $(du:dv)$ und $(du_n:dv_n)$ sind dann und nur dann zueinander normal, wenn

$$(6.15)\qquad E\,du\,du_n + F(du\,dv_n + dv\,du_n) + G\,dv\,dv_n = 0$$

ist. Zur Flächenrichtung $du:dv$ gehört daher die normale Flächenrichtung

$$(6.16)\qquad du_n:dv_n = -(F\,du + G\,dv):(E\,du + F\,dv).$$

Sind ds und $ds_n = dn$ die Bogenelemente dieser Richtungen $(du:dv)$ und $(du_n:dv_n)$, so bestehen genauer zwischen den Koordinaten der orthogonalen Tangentenvektoren

$$(6.17)\qquad \frac{d\mathfrak{x}}{ds} = \mathfrak{x}_u\frac{du}{ds} + \mathfrak{x}_v\frac{dv}{ds} \quad \text{und} \quad \frac{d\mathfrak{x}}{dn} = \mathfrak{x}_u\frac{du_n}{dn} + \mathfrak{x}_v\frac{dv_n}{dn}$$

der Fläche die Beziehungen

$$(6.18)\qquad \begin{array}{l|l} \dfrac{du_n}{dn} = -\dfrac{1}{W}\left(F\dfrac{du}{ds} + G\dfrac{dv}{ds}\right) & \dfrac{du}{ds} = +\dfrac{1}{W}\left(F\dfrac{du_n}{dn} + G\dfrac{dv_n}{dn}\right), \\ \dfrac{dv_n}{dn} = +\dfrac{1}{W}\left(E\dfrac{du}{ds} + F\dfrac{dv}{ds}\right) & \dfrac{dv}{ds} = -\dfrac{1}{W}\left(E\dfrac{du_n}{dn} + F\dfrac{dv_n}{dn}\right). \end{array}$$

Diese beiden Tangentenvektoren $\mathfrak{t} = d\mathfrak{x}/ds$ und $\mathfrak{s} = |\,\mathfrak{t} = d\mathfrak{x}/dn$ bilden dabei zusammen mit dem Normalenvektor $\mathfrak{n} = \dfrac{[\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v]}{W}$ der Fläche ein positives Tripel orthogonaler Einheitsvektoren, d. h. für einen in $\mathfrak{n}$ stehenden Beobachter entsteht $d\mathfrak{x}/dn$ aus $d\mathfrak{x}/ds$ durch eine rechtwinkelige Linksschwenkung.

Bemerkung 3: Insbesondere ergibt sich aus (14) für den Winkel φ der beiden Parameterrichtungen $(du_1:dv_1) = (1:0)$ und $(du_2:dv_2) = (0:1)$ die schon aus (5.10) bekannte Formel

$$(6.19)\qquad \cos\varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Bemerkung 4: Für orthogonale Parameterlinien ($\varphi = \pm\,\pi/2$) ist notwendig und hinreichend

$$F(u, v) \equiv 0 \quad \{u, v\}\,, \tag{6.20}$$

wie schon aus (5.12) bekannt ist.

Um schließlich auch den **Flächeninhalt** O des Flächenstückes $\mathfrak{B}$ der Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ auszumessen, zerlegt man $\mathfrak{B}$ durch die Parameterlinien, welche zu den Werten $u, u + du$, $v, v + dv$ gehören, in viereckige Parametermaschen, deren Ecken die folgenden Ortsvektoren haben:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}(u, v) &= \mathfrak{x}(u, v) \\ \mathfrak{x}(u + du, v) &= \mathfrak{x}(u, v) + \mathfrak{x}_u(u, v)\,du + \cdots, \\ \mathfrak{x}(u, v + dv) &= \mathfrak{x}(u, v) + \mathfrak{x}_v(u, v)\,dv + \cdots, \\ \mathfrak{x}(u + du, v + dv) &= \mathfrak{x}(u, v) + \mathfrak{x}_u(u, v)\,du + \mathfrak{x}_v(u, v)\,dv + \cdots \end{aligned} \tag{6.21}$$

Beschränkt man sich wegen des folgenden Grenzübergangs $du \to 0$, $dv \to 0$ zum Riemannschen Integral der Oberfläche in (21) auf Differentiale erster Ordnung, so kann man diese Parametermaschen als Parallelogramme auffassen, deren beide Gegenseitenpaare die Richtung der Vektoren

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}(u + du, v) - \mathfrak{x}(u, v) &= \mathfrak{x}(u + du, v + dv) - \mathfrak{x}(u, v + dv) \\ &= \mathfrak{x}_u(u, v)\,du \\ \mathfrak{x}(u, v + dv) - \mathfrak{x}(u, v) &= \mathfrak{x}(u + du, v + dv) - \mathfrak{x}(u + du, v) \\ &= \mathfrak{x}_v(u, v)\,dv \end{aligned}$$

haben und deren Inhalt dO (wenn $du \cdot dv > 0$ ist) die Größe

$$dO = |[\mathfrak{x}_u du, \mathfrak{x}_v dv]| = |\mathfrak{N}(u, v)|\,du\,dv = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv \tag{6.22}$$

hat.

Man nennt dO das **Oberflächenelement** unserer Fläche. Es bedeutet geometrisch den Flächeninhalt jenes Parallelogramms, das in der Tangentenebene τ des Punktes $P(u, v)$ von den Tangentenvektoren $\mathfrak{x}_u(u, v)\,du$ und $\mathfrak{x}_v(u, v)\,dv$ der Parameterlinien aufgespannt wird.