SAMMLUNG GÖSCHEN BAND 1181

TOPOLOGIE

von

DR. WOLFGANG FRANZ
o. Professor der Mathematik an der Universität Frankfurt

I

ALLGEMEINE TOPOLOGIE

Mit 9 Figuren

2., verbesserte Auflage

WALTER DE GRUYTER & CO.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag,
Verlagsbuchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.

BERLIN 1965

Die Darstellung umfaßt folgende Bände:

Band I: Allgemeine Topologie (Band 1181)

Band II: Algebraische Topologie (Band 1182)

 — Archiv-Nr. 7712641. — Satz und Druck: Walter de Gruyter & Co., Berlin 30. — Printed in Germany.

Inhaltsverzeichnis

III. Teil
Metrische Räume

IV. Teil
Anfänge der Dimensionstheorie

Literaturverzeichnis

Es werden nur die wichtigsten Werke genannt, die zur Vertiefung oder Ergänzung des in diesem Bändchen behandelten Stoffes dienen können.

1. F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914.
2. F. Hausdorff, Mengenlehre, 3. Ausg., Berlin 1935.
3. P. Alexandroff und H. Hopf, Topologie I, Berlin 1935.
4. W. Hurewicz und H. Wallman, Dimension Theory, Princeton 1941.
5. П. С. Александров, комбинаторная топология. (P. S. Alexandroff, Kombinatorische Topologie), Moskau und Leningrad 1947. Englische Übersetzung: P. S. Alexandrov, Combinatorial Topology I, II, III, Rochester 1956, 57, 60.
6. C. Kuratowski, Topologie I, II, Warschau 1948, 1950.
7. N. Bourbaki, Eléments de Mathématique, Livre III: Topologie générale.
   Chap. I: Structures topologiques, Paris 1951,
   Chap. II: Structures uniformes, Paris 1951,
   Chap. IX: Utilisation des nombres réels en topologie générale, Paris 1948.
8. Л. С. Понтрягин, основы комбинаторной топологий Englische Übersetzung: L. S. Pontrjagin, Foundations of Combinatorial Topology, Rochester 1952.
9. G. Nöbeling, Grundlagen der Analytischen Topologie, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1954.
10. D. W. Hall und G. L. Spencer, Elementary Topology, New York—London 1955.
11. J. L. Kelley, General Topology, Toronto—New York—London 1955.
12. E. Kamke, Mengenlehre. Slg. Göschen 999/999a. Berlin 1955.
13. В. Г. Болтянский, гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей. Trudy Mat. Inst. Steklow, No. 47 (1955). Englische Übersetzung: V. B. Boltyanski, Homotopy Theory of continuous mappings and of vector fields. Amer. Math. Soc. Translations, Ser. 2, Vol. 7.
14. П. С. Александров, введение в общую теорню множеств и функций. Moskau 1948. Deutsche Übersetzung: P. S. Alexandroff, Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen, Berlin 1956.

Einleitung

Das Wort Topologie leitet sich von dem griechischen Wort τόπος ab, welches Stelle, Ort oder Raum bedeutet. Die Topologie ist demgemäß Wissenschaft vom Raum, sie analysiert den Raumbegriff und untersucht die Eigenschaften allgemeiner Räume. Sie ist also ein Teilgebiet der Geometrie. Dem steht nicht entgegen, daß sie zu den anderen großen Teilgebieten der Mathematik, der Analysis und der Algebra, in enger und fruchtbarer Beziehung steht. Sie liefert der Analysis die geometrischen Grundlagen; sie empfängt andererseits von der Analysis wesentliche Impulse (Algebraische Funktionen, Algebraische Geometrie) und entwickelt sich in gewissen Gebieten gemeinsam mit der Analysis weiter (Funktionalanalysis). Der Algebra als der fundamentalen Grund- und Hilfsdisziplin der Mathematik entnimmt sie wesentliche Hilfsmittel (Lineare Algebra, Gruppen- und Modultheorie) und führt ihr ihrerseits wichtige neue Ergebnisse zu (Homologische Algebra). Das eigentliche Ziel der Topologie ist jedoch stets die Gewinnung geometrischer Erkenntnisse.

Der Raumbegriff wird in der Topologie so allgemein wie möglich gefaßt, er soll möglichst alles umfassen, was im weitesten Sinne des Wortes den Namen Raum verdient. Dazu gehören außer dem fundamentalen Grundmodell, dem gewöhnlichen euklidischen 3-dimensionalen Raum R^3 und dem n-dimensionalen R^n mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ und allen Teilmengen des R^n auch der unendlich-dimensionale Hilbertsche Raum H, die nichteuklidischen Räume und die Räume der Riemannschen Geometrie, aber auch allgemeinere Bildungen, wie z. B. die 4-dimensionale Menge der Geraden im R^3, die Menge der Ellipsoide im R^n, die Phasenräume der Physik, Matrizen- und Funktionenräume und noch sehr viel allgemeinere hier nicht zu beschreibende Räume. Natürlich handelt es sich nicht um die besonderen Eigenschaften des einen oder des anderen dieser Beispiele, sondern um die allen diesen Räumen gemeinsamen charakteristischen

Eigenschaften. Indem die Topologie so eine möglichst tief eindringende Analyse des Raumbegriffes erstrebt, hat sie nicht nur mathematischen, sondern, besonders in den grundlegenden Teilen, auch philosophisch-erkenntnistheoretischen Charakter. Während eine viel diskutierte klassische philosophische Lehre (I. Kant, 1724—1804) behauptet, daß die Euklidische Geometrie des R^3 die denknotwendige Form menschlicher Raumanschauung sei, zeigen die ersten Kapitel der folgenden Darstellung, wie weit die neuere Forschung sich von diesem Standpunkt entfernt.

Der Ausgangspunkt und die Methoden der Topologie ebenso wie ihre Beziehungen zu ihren Nachbardisziplinen lassen sich an einem besonders wichtigen Beispiel erläutern, nämlich dem Bereich der reellen Zahlen, der ja auch für viele andere Teile der Mathematik von grundsätzlicher Bedeutung ist. Reelle Zahlen lassen sich addieren und multiplizieren, und die Gesetze, denen Addition und Multiplikation gehorchen, lassen sich aus wenigen Grundgesetzen, den sogenannten Körpergesetzen, ableiten. Die Algebra untersucht diese Grundgesetze und ihre Konsequenzen. Sie betrachtet allgemeinere axiomatisch definierte Bereiche, in denen ähnliche Verknüpfungsoperationen wie Addition und Multiplikation mit denselben oder ähnlichen Grundgesetzen als Axiomen vorliegen und gelangt so zu den Begriffen Körper, Ring, Gruppe und anderen und zur Theorie dieser algebraischen Strukturen. An den Verknüpfungsoperationen der reellen Zahlen und ihren Verallgemeinerungen ist die Topologie nicht oder jedenfalls zunächst nicht interessiert. Sie richtet vielmehr ihr Augenmerk auf solche Eigenschaften, die den reellen Zahlen als eindimensionalem Raum oder als Zahlgeraden zukommen, etwa auf die Tatsache, daß die Zahlenfolge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ den Grenzwert Null hat. Sie hat es mit den Begriffen Umgebung, Nachbarschaft, Offenheit oder Abgeschlossenheit von Mengen reeller Zahlen, Stetigkeit reeller Funktionen und mit ähnlichen Begriffen zu tun. Unter diesen Begriffen wählt sie möglichst einfache und möglichst wenige als axiomatische Grundbegriffe und unter den Eigenschaften dieser Grundbegriffe möglichst einfache und wenige als Axiome aus und gelangt so, ganz analog zu dem oben beschriebenen Verfahren der Algebra, zu dem grundlegenden Begriff des *allgemeinen topologischen Raumes*. Man vergleiche etwa die späteren Definitionen 2.1 oder 4.1. Das eigentliche Gebäude der Topologie besteht in den aus diesen Axiomen abzuleitenden Eigenschaften dieser topologischen Räume und solcher Klassen spezieller Räume, die sich aus ihnen durch weitere einschränkende Axiome ableiten lassen. — Von diesem Standpunkt aus stellt sich im übrigen die Rolle der Analysis, der Theorie der Funktionen auf der reellen Geraden, wie folgt dar: Sie ist eine zusammengesetzte Struktur, die teils auf algebraischen, teils auf topologischen Axiomen beruht und infolgedessen ein komplizierteres Gepräge zeigt als Algebra und Topologie. Genau genommen spielt noch eine weitere, eine Anordnungsstruktur, dabei eine Rolle, auf die hier nicht eingegangen wird.

Da im folgenden ein axiomatischer Aufbau der Topologie gegeben wird, sind zum Verständnis Vorkenntnisse aus anderen Gebieten grundsätzlich nicht erforderlich. Es wird aber nichtsdestoweniger erwartet, daß der Leser mit den Grundtatsachen der reellen Analysis, der Algebra und der elementaren Geometrie einigermaßen vertraut ist, und zwar aus den folgenden beiden Gründen: Zunächst trägt es wesentlich zum Verständnis und zur richtigen Würdigung der Gedankenführung eines axiomatischen Gebäudes bei, wenn man bereits eine ungefähre Vorstellung wenigstens von den rohesten Umrissen des zu Erwartenden hat und wenn man die Tragweite und die Gültigkeit oder Nichtgültigkeit allgemeiner Sätze an Hand eines bereits bekannten speziellen Modells vergleichend beurteilen kann. Zum anderen müssen wir von Anfang an bei den Beispielen zur allgemeinen Theorie gewisse Grundtatsachen aus den genannten Gebieten als bekannt voraussetzen und benutzen. — Für den in der Lektüre mathematischer Literatur weniger Erfahrenen sei noch folgendes bemerkt: Die Ausführungen und insbesondere die Beweise sind im allgemeinen knapp gehalten, sie erfordern ein genaues Durchdenken aller Einzelheiten, auch solcher, die nicht bis ins letzte ausgeführt sind. Dies geschieht am besten, indem man die Schlüsse selbständig im einzelnen nachvollzieht (mit Papier und Bleistift!) und insbesondere reichlich Figuren und Lageskizzen anfertigt, die hier aus Platzmangel nur in wenigen Fällen beigefügt werden konnten.

I. Teil

Theorie der allgemeinen topologischen Räume

Kap. 1. Axiomatische Grundlegung

§ 1. Vorbereitung: Metrische Räume

In diesem Paragraphen behandeln wir noch nicht allgemeine topologische Räume, sondern als Vorstufe eine etwas einfachere, zugleich aber besonders wichtige spezielle Klasse von Räumen, die sogenannten metrischen Räume. Diese Einführung dient zunächst dazu, Beispiele bereitzustellen und auf die später aufzustellenden Axiome der topologischen Räume hinzuführen, so daß sie dem Leser vollständig plausibel erscheinen. Erst in Kapitel 6 werden wir die Theorie der metrischen Räume um ihrer selbst willen eingehender entwickeln.

1.1 Definition: *Eine Metrische Struktur, kurz eine Metrik, über einer Menge R ist gegeben, wenn jedem Paar x, y von Elementen von R eine reelle Zahl $d(x, y) \geqq 0$ zugeordnet ist mit den Axiomen*

[M 1] $d(x, y) = 0$ *dann und nur dann, wenn* $x = y$.
[M 2] $d(y, x) = d(x, y)$.
[M 3] *Dreiecksaxiom*: $d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$.

1.2 Definition: *Eine Menge R zusammen mit einer Metrik über R heißt ein metrischer Raum. Man sagt, die Metrik sei der Menge R aufgeprägt. Die Menge R heißt die dem metrischen Raum zugrunde liegende Menge. Die Elemente von R heißen Punkte, $d(x, y)$ heißt der Abstand oder die Entfernung der Punkte x und y.*

Über einer Menge R können sehr wohl verschiedene Metriken durch verschiedene Abstandsfunktionen $d(x, y)$ und $d'(x, y)$ gegeben sein, wie es die später folgenden Beispiele zeigen.

Die Abstandsfunktion $d(x, y)$ befolgt zwei weitere, der Dreiecksungleichung ähnliche Regeln:

$$|\, d(x, z) - d(z, y)\, | \leqq d(x, y) \qquad \text{(2. Dreiecksungleichung)}$$

$$|\, d(x, y) - d(x', y')\, | \leqq d(x, x') + d(y, y') \qquad \text{(Vierecksungleichung).}$$

Hier bedeuten die senkrechten Striche den absoluten Betrag der betreffenden reellen Zahlen. — Die 2. Dreiecksungleichung ergibt sich aus der 1.: Es ist $d(x, z) - d(z, y) \leqq d(x, y)$; durch Vertauschung von x und y und Zusammenfassung der beiden Ungleichungen folgt die 2. Dreiecksungleichung. — Die Vierecksungleichung ergibt sich aus $d(x, y) \leqq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y)$, also $d(x, y) - d(x', y') \leqq d(x, x') + d(y, y')$; durch Vertauschung von x mit x' und von y mit y' und Zusammenfassung der beiden Ungleichungen folgt die Vierecksungleichung.

1.3 Definition: *Ist p ein Punkt von R und $\varepsilon > 0$, so heißt die Menge*

$$\mathfrak{U}_\varepsilon(p) = \{x \mid d(x, p) < \varepsilon\}$$

aller Punkte x mit $d(x, p) < \varepsilon$ die Kugelumgebung von p mit dem Radius ε, kurz die ε-Umgebung von p.

Die Kugelumgebungen tragen ihren Namen nach den Kugeln im dreidimensionalen euklidischen Raum R^3 als Spezialfall eines metrischen Raumes. In beliebigen metrischen Räumen sind sie natürlich keine wirklichen Kugeln, sie haben nur wenige Eigenschaften mit Kugeln gemein, wie man sich an den folgenden Beispielen klar machen möge.

Beispiele für metrische Räume:

(a) *Der euklidische R^n.* Seine Punkte sind gegeben in der Form $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ mit beliebigen reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$. Die übliche Entfernungsdefinition ist

$$d(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}.$$

Die Gültigkeit der Axiome [M 1] und [M 2] liegt auf der Hand. Zum Beweise von [M 3] muß gezeigt werden, daß für beliebige reelle x_i, y_i, z_i gilt (summiert über $i = 1, \ldots, n$):

$$\sqrt{\sum (z_i - x_i)^2} \leqq \sqrt{\sum (y_i - x_i)^2} + \sqrt{\sum (z_i - y_i)^2}.$$

Wir setzen $y_i - x_i = a_i$, $z_i - y_i = b_i$. Dann ergibt sich diese Ungleichung rückwärts aus

$$\sum (a_i + b_i)^2 \leqq \left(\sqrt{\sum a_i^2} + \sqrt{\sum b_i^2}\right)^2 = \sum a_i^2 + \sum b_i^2 + 2\sqrt{\sum a_i^2 \sum b_i^2},$$

$$2 \sum a_i b_i \leqq 2\sqrt{\sum a_i^2 \sum b_i^2},$$

$$\left(\sum a_i b_i\right)^2 \leqq \sum a_i^2 \cdot \sum b_i^2.$$

Dies ist die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, die wir als bekannt voraussetzen dürfen. — Die Kugelumgebungen $\mathfrak{U}_\varepsilon(p)$ sind im Falle $n = 3$ gewöhnliche Vollkugeln ausschließlich der Randsphäre.

(a′) Wir legen denselben R^n zugrunde, wählen aber eine andere Metrik:

$$d'(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \operatorname{Max} | y_i - x_i |, \text{ wenn } i = 1, \ldots, n.$$

Wieder ist die Gültigkeit von [M 1] und [M 2] klar. [M 3] ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} d'(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) &= \operatorname{Max} | z_i - x_i | = | z_{i_0} - x_{i_0} | \\ &= | (y_{i_0} - x_{i_0}) + (z_{i_0} - y_{i_0}) | \leqq | y_{i_0} - x_{i_0} | + | z_{i_0} - y_{i_0} | \\ &\leqq \operatorname{Max} | y_i - x_i | + \operatorname{Max} | z_i - y_i | = d'(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + d'(\mathfrak{y}, \mathfrak{z}). \end{aligned}$$

Hierbei ist i_0 ein solcher unter den Indexen $i = 1, \ldots, n$, für den $| z_i - x_i |$ maximal ist. Die Kugelumgebungen $\mathfrak{U}_\varepsilon(p)$ sind hier achsenparallele *Würfel* von der Kantenlänge 2ε um p als Mittelpunkt.

(a″) Wir prägen dem R^n noch eine andere Metrik auf:

$$d''(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i=1}^{n} | y_i - x_i |.$$

Die Gültigkeit der Axiome beweist man ähnlich wie bei (a′). Die Kugelumgebungen sind im Falle des R^3 *Oktaeder* um p als Mittelpunkt, im Falle des R^n die entsprechenden verallgemeinerten Polytope.

(b) *Der Hilbertsche Raum H* aller Folgen $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ reeller Zahlen mit konvergenter Quadratsumme Σx_i^2, summiert über $i = 1, 2, \ldots$. Der Abstand wird analog definiert wie im Beispiel (a):

$$d(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sqrt{\sum (y_i - x_i)^2}.$$

Hier muß aber die Konvergenz der unendlichen Reihe unter der Wurzel nachgewiesen werden. In der Tat ist

$$\sum_{i=1}^{N} (y_i - x_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i^2 + \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{N} x_i y_i.$$

Bei wachsendem N bleiben die ersten beiden Summen nach Voraussetzung beschränkt, während der letzte Summand nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\left(\sum^{N} x_i y_i\right)^2 \leqq \sum^{N} x_i^2 \cdot \sum^{N} y_i^2$$

beschränkt bleibt. Daher ist die Reihe konvergent und der Abstand wohldefiniert. Die Gültigkeit der Axiome [M 1] und [M 2] liegt auf der Hand. [M 3] folgt durch Grenzübergang aus der entsprechenden Formel unter (a).

Eine besonders wichtige Teilmenge des Hilbertschen Raumes H ist der Hilbert-Quader Q, gegeben durch die Punkte $\mathfrak{x}$ mit

$$0 \leqq x_n \leqq \frac{1}{2^n} \quad \text{für } n = 1, 2, \ldots .$$

Da $\sum \left(\frac{1}{2^n}\right)^2$ konvergiert, gehören diese Punkte $\mathfrak{x}$ tatsächlich zu H.

(c) R sei die Menge der stetigen reellen Funktion $f(x)$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ und

$$d(f, g) = \sqrt{\int_0^1 (g(x) - f(x))^2 \, dx}.$$

Beim Beweise von [M 1] beachte man, daß das Integral über eine für $0 \leqq x \leqq 1$ stetige Funktion $h^2(x)$ nur dann Null ist, wenn $h(x) = 0$ für alle x. [M 3] ergibt sich aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für Integrale

$$\left(\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx\right)^2 \leqq \int_0^1 f^2(x)\, dx \cdot \int_0^1 g^2(x)\, dx$$

in analoger Weise wie im Beispiel (a).

(c′) Auch in der Menge des vorigen Beispieles kann man andere Metriken einführen, z. B. durch die Definition

$$d'(f, g) = \mathrm{Max}\,|\,g(x) - f(x)\,|\ \text{für}\ 0 \leqq x \leqq 1.$$

Man beachte, daß eine reelle stetige Funktion im abgeschlossenen Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ ihr Maximum an einer Stelle wirklich annimmt. Der Gültigkeitsnachweis für die Axiome ist leicht: [M 1] und [M 2] liegen auf der Hand. Der Beweis von [M 3] vollzieht sich analog wie in Beispiel (a'):

$$d'(f, h) = \mathrm{Max}\,|\,h(x) - f(x)\,| = |\,h(x_0) - f(x_0)\,|,$$

wenn x_0 eine Stelle im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ bezeichnet, an der $|\,h(x) - f(x)\,|$ maximal ist. Es folgt weiter

$$\begin{aligned} d'(f, h) &= |\,(g(x_0) - f(x_0)) + (h(x_0) - g(x_0))\,| \\ &\leqq |\,g(x_0) - f(x_0)\,| + |\,h(x_0) - g(x_0)\,| \\ &\leqq \mathrm{Max}\,|\,g(x) - f(x)\,| + \mathrm{Max}\,|\,h(x) - g(x)\,| = d'(f, g) + d'(g, h). \end{aligned}$$

(d) Endlich geben wir noch ein der geometrischen Anschauung wesentlich ferner liegendes Beispiel. R sei die Menge der ganzen Zahlen und p sei eine feste Primzahl. Dann versteht man unter dem p-adischen Betrag oder kurz dem p-Betrag $|\,a\,|_p$ einer ganzen Zahl $a \neq 0$ aus R die reelle Zahl $|\,a\,|_p = 2^{-e}$, wenn $a = a_0 p^e$ mit zu p primem, ganzzahligem a_0, während man $|\,0\,|_p = 0$ setzt. Dann gelten die p-adischen Betragsgesetze: (1) $|\,a\,|_p \geqq 0$, $|\,a\,|_p = 0$ dann und nur dann, wenn $a = 0$; (2) $|\,ab\,|_p = |a|_p \cdot |\,b\,|_p$; (3) $|\,a + b\,|_p \leqq |\,a\,|_p + |\,b\,|_p$. Nur (3) bedarf eines besonderen Beweises: Ist $b = b_0 p^f$ mit zu p primem, ganzzahligem b_0, also $|\,b\,|_p = 2^{-f}$, und ist etwa $e \leqq f$, so ist $a + b = cp^e$ mit ganzzahligem, möglicherweise noch durch p teilbarem c. Daher ist in der Tat $|\,a + b\,|_p \leqq 2^{-e} \leqq |\,a\,|_p + |\,b\,|_p$. — R wird zum metrischen Raum durch folgende analog zu Beispiel (a') gebildete Metrik $d(a, b) = |\,b - a\,|_p$. [M 1] und [M 2] liegen auf der Hand. [M 3] folgt aus (3):

$$\begin{aligned} d(a, c) &= |\,c - a\,|_p = |\,(b - a) + (c - b)\,|_p \\ &\leqq |\,b - a\,|_p + |\,c - b\,|_p = d(a, b) + d(b, c). \end{aligned}$$

Die Kugelumgebungen sind nur ein spezieller Fall der allgemeinen Umgebungen eines Punktes, die wie folgt definiert werden:

1.4 Definition: *Eine Teilmenge U von R heißt Umgebung des Punktes p, wenn sie eine Kugelumgebung von p enthält.*

Zum Beispiel ist im R^2 ein Vollkreis einschließlich seines Randes eine Umgebung seines Mittelpunktes. In der älteren Literatur wurden nur sogenannte offene Mengen als Umgebungen zugelassen, während wir die etwas zweckmäßigere obige Definition benutzen. — Für Umgebungen gelten die folgenden vier bedeutsamen Tatsachen:

(U 1) *p gehört zu jeder Umgebung U von p.* Dies ist nach der Definition der Umgebungen klar.

(U 2) *Ist U eine Umgebung von p, so ist auch jede Obermenge $V \supset U$ eine Umgebung von p.* Dies folgt ebenfalls unmittelbar aus der Definition.

(U 3) *Sind U_1 und U_2 Umgebungen von p, so auch der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$.* Die kleinere der beiden in U_1 bzw. in U_2 enthaltenen Kugelumgebungen ist nämlich in $U_1 \cap U_2$ enthalten und zeigt, daß $U_1 \cap U_2$ Umgebung von p ist. Entsprechendes gilt für endlich viele Umgebungen von p: Sind $U_i (i = 1, \ldots, r)$ Umgebungen von p, so ist auch $\bigcap U_i$ eine Umgebung von p. *Auch R selbst ist eine Umgebung von p.* — Diese Behauptung kann man übrigens als den Grenzfall $r = 0$ in der vorhergehenden Aussage ansehen (vgl. Index unter „Durchschnitt"); aus diesem Grunde führen wir R als Umgebung von p an dieser Stelle (unter (U 3)) auf.

(U 4) *Eine Umgebung U von p ist auch Umgebung aller Punkte x einer geeigneten Umgebung V von p.* Ist nämlich $\mathfrak{U}_\varepsilon(p)$ eine der definitionsgemäß in U enthaltenen Kugelumgebungen und x ein Punkt daraus, so gibt es offenbar eine in $\mathfrak{U}_\varepsilon(p)$ enthaltene Kugelumgebung $\mathfrak{U}_\eta(x)$; sie ist in U enthalten und erweist dadurch U als Umgebung von x.

Man beachte, daß bei unserer Definition der Umgebung keineswegs eine Umgebung U von p auch Umgebung a l l e r Punkte von U ist.

An dieser Stelle unterbrechen wir unsere Entwicklung und führen sie im nächsten Paragraphen auf einer allgemeineren Grundlage weiter. Wir wollen nämlich unsere weiteren Untersuchungen nur von den Eigenschaften (U 1)—(U 4) abhängig machen und werden daher diese Eigenschaften als Axiome für eine neue, wesentlich allgemeinere Theorie, die der allgemeinen topologischen Räume, zugrunde legen.

§ 2. Topologische Räume

Die metrischen Räume sind für manche Zwecke noch nicht allgemein genug. Es gibt geometrische Gebilde, denen man Raumcharakter zusprechen möchte, ohne daß es möglich wäre, je zweien ihrer Elemente eine reelle Zahl als Abstand zuzuordnen. Außerdem ist das Axiomensystem der metrischen Räume insofern noch nicht vollständig befriedigend, als in ihm die reellen Zahlen auftreten, die ihrerseits eine ausgedehnte und vom logischen Standpunkt aus nicht ganz einfache Theorie voraussetzen. Wir definieren daher folgendermaßen:

2.1 Definition: *Eine Topologische Struktur, kurz eine Topologie* $\mathfrak{T}$, *über einer Menge* R *ist dadurch definiert, daß jedem Element* p *von* R *ein System* $\mathfrak{U}(p)$ *von Teilmengen von* R, *sogenannter Umgebungen* U *von* p, *zugeordnet ist mit den Axiomen*

[U 1] $p \in U$ *für jede Umgebung* $U \in \mathfrak{U}(p)$.
[U 2] *Wenn* $U \in \mathfrak{U}(p)$ *und* $V \supset U$, *so* $V \in \mathfrak{U}(p)$.
[U 3] *Wenn* $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}(p)$, *so* $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{U}(p)$; $R \in \mathfrak{U}(p)$.
[U 4] *Zu* $U \in \mathfrak{U}(p)$ *gibt es ein* $V \in \mathfrak{U}(p)$ *so, daß* $U \in \mathfrak{U}(y)$ *für alle* $y \in V$.

2.2 Definition: *Eine Menge* R *zusammen mit einer Topologie* $\mathfrak{T}$ *über* R *heißt ein topologischer Raum.* $\mathfrak{T}$ *heißt der Menge* R *aufgeprägt; die Menge* R *heißt die dem topologischen Raum zugrunde liegende Menge. Die Elemente von* R *heißen Punkte des topologischen Raumes.*

Die Axiome [U 1]—[U 4] sind bis auf geringfügige Änderungen die *Hausdorffschen Umgebungsaxiome*, die von F. Hausdorff in seinem klassischen Werk über Mengenlehre (Lit.-Verz. Nr. 1) der Topologie zugrunde gelegt worden sind. — Man beachte, daß für jeden Punkt $p \in R$ das System $\mathfrak{U}(p)$ nicht leer ist, denn es ist jedenfalls $R \in \mathfrak{U}(p)$. Die leere Menge $\emptyset$ gehört wegen [U 1] sicher zu keinem System $\mathfrak{U}(p)$. Die Umgebung V in [U 4] ist Teilmenge von U, denn jeder Punkt $y \in V$ hat U zur Umgebung, ist also nach [U 1] in U enthalten.

Jeder metrische Raum wird zu einem topologischen Raum, wenn man Umgebungen so definiert, wie es am Schluß von § 1 geschehen ist; dort haben wir gerade nachgewiesen, daß die Umgebungen der Punkte eines metrischen Raumes die Axiome [U 1]—[U 4] erfüllen. Man sagt kurz, jeder metrische Raum sei auch ein topologischer Raum, eine metrische Struktur über einer Menge R induziere eine topologische Struktur. Die im folgenden entwickelte Theorie der topologischen Räume liefert also zugleich Sätze über metrische Räume; unsere Beispiele für metrische Räume sind zugleich Beispiele für topologische Räume.

Entsteht so aus jeder metrischen eine topologische Struktur, so kann man keineswegs sagen, daß auch umgekehrt jede topologische Struktur aus einer geeigneten metrischen Struktur hervorgeht. Wir definieren in diesem Sinne:

2.3 Definition: *Eine gegebene topologische Struktur $\mathfrak{T}$ über R bzw. ein topologischer Raum R heißt metrisierbar, wenn es eine metrische Struktur über R gibt, die diese topologische Struktur $\mathfrak{T}$ induziert. Zwei metrische Strukturen über derselben Menge R heißen topologisch äquivalent, wenn sie dieselbe topologische Struktur induzieren.*

Mit dem Problem der Metrisierbarkeit eines topologischen Raumes werden wir uns im Kapitel 8 beschäftigen.

Als ein Beispiel einer trivialen Topologie, die über jeder Menge R eingeführt werden kann, nennen wir die *diskrete Topologie*, die jedem Punkt p von R jede p enthaltende Menge als Umgebung zuordnet. Man verifiziert sofort, daß bei dieser Festsetzung die Axiome [U 1]—[U 4] erfüllt sind. Diese Topologie ist metrisierbar, nämlich durch die *diskrete Metrik*, die durch $d(x, y) = 1$ für $x \neq y$ definiert ist. In der Tat ist bei dieser Metrik jeder Punkt Umgebung seiner selbst und daher jede Menge Umgebung aller ihrer Punkte.

Wir geben noch ein weniger triviales Beispiel eines topologischen Raumes R, und zwar eines solchen, der nicht metrisierbar ist. Der

Beweis für die Nichtmetrisierbarkeit ist nicht schwer; wir lassen ihn aber bis zur grundsätzlichen Behandlung solcher Fragen im Kapitel 8 beiseite.

Die Menge R bestehe aus allen reellen, nicht notwendig stetigen Funktionen f über der reellen Geraden R^1. Als Umgebungen eines Punktes f von R sollen zunächst die folgenden Mengen von Funktionen h von R gelten:

$$U = U(\varepsilon; x_1, \ldots, x_n) = \{h \mid |h(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon \text{ für } i = 1, \ldots, n\}.$$

Ferner sollen alle Obermengen solcher Umgebungen $U(\varepsilon; x_1, \ldots, x_n)$ Umgebungen von f sein. Man sieht leicht, daß bei dieser Festsetzung die Umgebungsaxiome erfüllt sind. [U 1] und [U 2] liegen auf der Hand. Der Durchschnitt von $U(\varepsilon; x_1, \ldots, x_n)$ und $U(\varepsilon'; x'_1, \ldots, x'_m)$ enthält ersichtlich eine Umgebung $U(\eta; x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_m)$ mit einem $\eta \leqq \varepsilon, \varepsilon'$, woraus man [$U$ 3] erschließen kann. Auch [U 4] ist unschwer (nach dem Muster der Überlegung bei (U 4) am Schluß von § 1) zu beweisen. — Wir vermerken noch folgende Eigenschaft von R: Sind $f \in R$, $g \in R$, $f \neq g$, so gibt es eine Umgebung U von f und eine Umgebung V von g mit $U \cap V = \emptyset$; gilt nämlich für die reelle Zahl x_0 die Ungleichung $f(x_0) \neq g(x_0)$, so kann man mit jedem ε der Eigenschaft $\varepsilon < \frac{1}{2} |f(x_0) - g(x_0)|$ offenbar U als Umgebung $U(\varepsilon; x_0)$ von f und V als Umgebung $U(\varepsilon; x_0)$ von g nehmen. — Wir werden diesen Raum noch verschiedentlich als Beispiel heranziehen.

2.4 Definition: *A sei eine Teilmenge des topologischen Raumes R.*

(1) *Ein Punkt $p \in R$ heißt innerer Punkt von A, wenn es eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(p)$ gibt, die ganz zu A gehört. Die Menge aller inneren Punkte heißt das Innere oder der Kern von A, bezeichnet als $\underline{A}$.*

(2) *Ein Punkt $p \in R$ heißt äußerer Punkt in bezug auf A, kurz zu A, wenn es eine Umgebung $U \in \mathfrak{U}(p)$ gibt, die ganz zum Komplement $\complement A$ gehört. Die Menge der äußeren Punkte von A heißt das Äußere von A.*

(3) *Ein Punkt $p \in R$ heißt Randpunkt von A, besser in bezug auf A, wenn in jeder Umgebung von p Punkte von A und Punkte von $\complement A$ vorkommen. Die Menge aller Randpunkte heißt der Rand von A, bezeichnet als ϱA.*

Für einen Punkt $p \in R$ trifft genau eine der drei Möglichkeiten in Definition 2.4 zu: Wenn (1) eintritt, kann nicht auch (2) eintreten, da sonst der Durchschnitt der beiden dort genannten Umgebungen eine Umgebung von p wäre, die zugleich zu A und $\complement A$ gehörte; auch (3) kann dann natürlich nicht eintreten. Ebenso schließt der Fall (2) die Möglichkeiten (1) und (3) aus, und trivialerweise schließt (3) die Fälle (1) und (2) aus. — Umgekehrt muß für jeden Punkt $p \in R$ einer der drei Fälle eintreten: Wenn (1) und (2) nicht eintreten, folgt das Eintreten von (3). — Das Äußere von A stimmt mit dem Inneren von $\complement A$ überein. Die Randpunkte von A zerfallen in die zu A gehörigen und die nicht zu A gehörigen.

2.5 Definition: *Ein Punkt $p \in R$ heißt Berührungspunkt von A, wenn in jeder Umgebung von p Punkte von A vorkommen. Die Menge aller Berührungspunkte heißt die Hülle von A, bezeichnet als $\overline{A}$.*

Die Hülle $\overline{A}$ ist hiernach die Vereinigungsmenge von A und ϱA. Wir vermerken als einfache Folgerungen die nachstehenden wichtigen Gleichungen und Ungleichungen, deren jede man sorgfältig an Hand der beiden letzten Definitionen nachprüfe:

$$\underline{A} < A < \overline{A}, \qquad \underline{\emptyset} = \emptyset = \overline{\emptyset}, \qquad \underline{R} = R = \overline{R},$$

$$\complement\,\underline{A} = \overline{\complement A}, \qquad \complement\,\overline{A} = \underline{\complement A}, \qquad \varrho(\complement A) = \varrho A,$$

$$\text{Wenn } A < B, \text{ so } \underline{A} < B,\ \overline{A} < \overline{B}.$$

Ferner ergeben sich aus den Definitionen 2.4 und 2.5 und der oben festgestellten Disjunktion zwischen den Möglichkeiten (1)—(3) in der Definition 2.4 die folgenden *Aufteilungen von R nach A* (in disjunkte Summanden; vgl. Index unter „Aufteilung"), die überdies in der nebenstehenden Figur erläutert sind:

$$\begin{aligned} R &= \underline{A} + \varrho A + \underline{\complement A} \\ &= \underline{A} + \overline{\complement A} = \overline{A} + \underline{\complement A} \\ \varrho A &= \overline{A} - \underline{A} = \overline{A} \cap \overline{\complement A} = \complement(\underline{A} \cup \underline{\complement A}). \end{aligned}$$