Física

per a la ciència i la tecnologia

Tipler | Mosca

Traducció de la 6a edició nord-americana

Volum 2

Electricitat i magnetisme
La llum
Física moderna

Projecte SCRIPTORIUM

EDITORIAL REVERTÉ

Prefixos de les potències de 10*

Múltiple	Prefix	Símbol
10^{24}	yotta	Y
10^{21}	zetta	Z
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
$\mathbf{10^{9}}$	giga	G
$\mathbf{10^{6}}$	mega	M
$\mathbf{10^{3}}$	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deka	da
10^{-1}	deci	d
$\mathbf{10^{-2}}$	centi	c
$\mathbf{10^{-3}}$	milli	m
$\mathbf{10^{-6}}$	micro	μ
$\mathbf{10^{-9}}$	nano	n
$\mathbf{10^{-12}}$	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a
10^{-21}	zepto	z
10^{-24}	yocto	y

* Els prefixos que s'utilitzen més sovint en aquest llibre són escrits en blau. Tots aquests prefixos es pronuncien amb l'accent en la primera síl·laba.

L'alfabet grec

alfa	A	α	ni	N	ν
beta	B	β	ksi	Ξ	ξ
gamma	Γ	γ	òmicron	O	o
delta	Δ	δ	pi	Π	π
èpsilon	E	ϵ, ε	ro	P	ρ
zeta	Z	ζ	sigma	Σ	σ
eta	H	η	tau	T	τ
theta	Θ	θ	ípsilon	Υ	υ
iota	I	ι	fi	Φ	ϕ
kappa	K	κ	khi	X	χ
lambda	Λ	λ	psi	Ψ	ψ
mi	M	μ	omega	Ω	ω

Dades terrestres i dades astronòmiques[a]

Acceleració de la gravetat a la superfície de la Terra	g	9,81 m/s^2 = 32,2 ft/s^2
Radi de la Terra R_T	R_T	6 371 km = 3 959 mi
Massa de la Terra	M_T	$5{,}97 \times 10^{24}$ kg
Massa del Sol		$1{,}99 \times 10^{30}$ kg
Massa de la Lluna		$7{,}35 \times 10^{22}$ kg
Velocitat d'escapament de la superfície de la Terra		11,2 km/s = 6,95 mi/s
Temperatura i pressió en condicions normals (STP)		0 °C = 273,15 K 1 atm = 101,3 kPa
Distància Terra-Lluna[b]		$3{,}84 \times 10^{8}$ m = $2{,}39 \times 10^{5}$ mi
Distància (mitjana) Terra-Sol[b]		$1{,}50 \times 10^{11}$ m = $9{,}30 \times 10^{7}$ mi
Velocitat del so en l'aire sec (en condicions normals)		331 m/s
Velocitat del so en l'aire sec (20 °C, 1 atm)		343 m/s
Densitat de l'aire (en condicions normals)		1,29 kg/m^3
Densitat de l'aire (20 °C, 1 atm)		1,20 kg/m^3
Densitat de l'aigua (4 °C, 1 atm)		1 000 kg/m^3
Calor de fusió de l'aigua (0 °C, 1 atm)	L_f	333,5 kJ/kg
Calor de vaporització de l'aigua (100 °C, 1 atm)	L_v	2,257 MJ/kg

a. Podeu trobar dades addicionals sobre el Sistema Solar en l'apèndix B i a l'adreça http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/planetfact.html.
b. De centre a centre.

Símbols matemàtics

$=$	és igual a
$\equiv$	és definit per
$\neq$	no és igual a
$\approx$	és aproximadament igual a
$\sim$	és de l'ordre de
$\propto$	és proporcional a
$>$	és més gran que
$\geq$	és més gran o igual a
$>>$	és molt més gran que
$<$	és més petit que
$\leq$	és més petit o igual a
$<<$	és molt més petit que
Δx	variació o increment de x
dx	variació diferencial en x
$\lvert x \rvert$	valor absolut de x
$\lvert \vec{v} \rvert$	valor absolut de $\vec{v}$
$n!$	$n(n-1)(n-2)\ldots 1$
Σ	sumatori
lim	límit
$\Delta t \to 0$	Δt tendeix a zero
$\dfrac{dx}{dt}$	derivada de x en funció de t
$\dfrac{\partial x}{\partial t}$	derivada parcial de x en funció de t
$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$	integral definida $= F(x)\Big\vert_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$

Símbols d'unitats físiques

a	any (en anglès, y)	Gy	gray	N	newton
A	ampere	h	hora	nm	nanòmetre (10^{-9} m)
Å	àngstrom (10^{-10} m)	H	henry	pt	pinta
atm	atmosfera	Hz	hertz	qt	quart de galó
Bq	becquerel	in	polzada	rev	revolució
Btu	unitat tèrmica britànica	J	joule	R	roentgen/röntgen
C	coulomb	K	kelvin	s	segon
°C	grau Celsius	keV	kiloelectró-volt	Sv	sievert
cal	caloria	kg	kilogram	T	tesla
Ci	curie	km	kilòmetre	u	unitat de massa atòmica unificada
cm	centímetre	L	litre	V	volt
dyn	dina	lb	lliura	W	watt
eV	electró-volt	m	metre	Wb	weber
°F	grau Fahrenheit	MeV	megaelectró-volt	yd	iarda
fm	femtòmetre, fermi (10^{-15} m)	mi	milla	μC	microcoulomb
ft	peu	min	minut	μm	micròmetre (10^{-6} m)
g	gram	mm	mil·límetre	μs	microsegon
G	gauss	Mm	megàmetre (10^{6} m)	Ω	ohm
Gm	gigàmetre (10^{9} m)	ms	mil·lisegon		

Factors de conversió

Longitud

1 m = 39,37 in = 3,281 ft = 1,094 yd

1 m = 10^{15} fm = 10^{10} Å = 10^{9} nm

1 km = 0,621 4 mi

1 mi = 5 280 ft = 1,609 km

1 any llum = 1 $c \cdot$ a = $9{,}461 \times 10^{15}$ m

1 in = 2,540 cm

Volum

1 L = 10^{3} cm^{3} = 10^{-3} m^{3} = 1,057 qt

Temps

1 h = 3 600 s = 3,6 ks

1 a = 365,24 d = $3{,}156 \times 10^{7}$ s

Velocitat

1 km/h = 0,278 m/s = 0,621 4 mi/h

1 ft/s = 0,304 8 m/s = 0,681 8 mi/h

Angle i velocitat angular

1 rev = 2π rad = 360°

1 rad = 57,30°

1 rev/min = 0,104 7 rad/s

Força-pressió

1 N = 10^{5} dyn = 0,224 8 lb

1 lb = 4,448 N

1 atm = 101,3 kPa = 1,013 bar = 76,00 cmHg = 14,70 lb/in^{2}

Massa

1 u = $[(10^{-3}\ \mathrm{mol}^{-1})/N_A]$ kg = $1{,}661 \times 10^{-27}$ kg

1 tona = 10^{3} kg = 1 Mg

1 slug = 14,59 kg

1 kg ≈ 2,205 lb

Energia-potència

1 J = 10^{7} erg = 0,737 6 ft · lb = $9{,}869 \times 10^{-3}$ L · atm

1 kW · h = 3,6 MJ

1 cal = 4,184 J = $4{,}129 \times 10^{-2}$ L · atm

1 L · atm = 101,325 J = 24,22 cal

1 eV = $1{,}602 \times 10^{-19}$ J

1 Btu = 778 ft · lb = 252 cal = 1 054 J

1 hp (cavall de vapor) = 550 ft · lb/s = 746 W

Conductivitat tèrmica

1 W/(m · K) = 6,938 Btu · in/(h · ft^{2} · °F)

Camp magnètic

1 T = 10^{4} G

Viscositat

1 Pa · s = 10 P (poise)

El Projecte Scriptorium és una iniciativa conjunta de

Institvt d'Estvdis Catalans

Fundació Alsina i Bofill

Fundació Congrés de Cultura Catalana

FUNDACIÓ TORRENS-IBERN
tècnica i ciència en català

La publicació d'aquesta obra ha estat possible gràcies a

Obra Social
Fundació "la Caixa"

FÍSICA PER A LA CIÈNCIA I LA TECNOLOGIA

Traducció de la sisena edició nord-americana

VOLUM 2

Electricitat i magnetisme / La llum / Física moderna: Mecànica quàntica, relativitat i estructura de la matèria

Paul A. Tipler

Gene Mosca

Obra coordinada per

David Jou i Mirabent
Catedràtic de Física de la Matèria Condensada, UAB
Membre de la Secció de Ciències i Tecnologia, IEC
i
Josep Enric Llebot Rabagliati
Catedràtic de Física de la Matèria Condensada, UAB
Membre de la Secció de Ciències i Tecnologia, IEC
President de la Societat Catalana de Física

EDITORIAL REVERTÉ
Barcelona • Bogotà • Buenos Aires • Caracas • Mèxic

Projecte SCRIPTORIUM

Títol de l'obra original:
Physics for Scientists and Engineers, Sixth Edition

Sisena edició original en llengua anglesa publicada per / First published in the United States:
W. H. FREEMAN AND COMPANY, New York and Basingstoke
41 Madison Avenue, Nova York (NY), USA

Edició en català:
© Editorial Reverté, SA, 2010, 2016, 2019
Reimpressió digital 2019

Edició en paper:
© Editorial Reverté, SA, 2010, 2016, 2019
ISBN: 978-84-291-4433-8

Edició e-book (PDF):
© Editorial Reverté, SA, 2020
ISBN: 978-84-291-9371-8

Amb el suport de

Generalitat
de Catalunya

Establiment de la versió catalana:
Coral Barrachina
Mariona Barrera
Gemma Cirac
Rosa M. Grau
Josep M. Jovells
Jordi Mur
Marta Vilaró
Patricia L. Vitri

Revisió lingüística i correcció tipogràfica:
Josep M. Mestres
Laia Campamà
Marta Griera
Mariona Barrera
Olga Vidal
Servei de Correcció Lingüística de l'Institut d'Estudis Catalans

Amb la col·laboració de:
Ester Llópez
Sara Bellver
Marta Finazzi
Eira Melé
Elisabet Prim
Judit Terrats

Maquetació:
Reverté-Aguilar, SL

Propietat de:
EDITORIAL REVERTÉ, SA
C. de Loreto, 13-15, local B
08029 Barcelona
Tel.: (34) 934 193 33
A/e: *reverte@reverte.com*; a/I: *www.reverte.com*

El logotip del Projecte Scriptorium ha estat dissenyat per Mercè Berlanga i recrea esquemàticament la imatge d'un astrolabi del segle x *utilitzat a la Marca Hispànica. A l'*scriptorium *de Ripoll es féu el primer tractat llatí de l'astrolabi, cosa que permeté que aquest instrument astronòmic es pogués difondre a l'Europa cristiana al mateix temps que la ciència àrab. Posar a l'abast dels estudiants els coneixements científics i afavorir-ne la difusió en llengua catalana són els principals objectius del Projecte Scriptorium.*

PT: Per a la Claudia

GM: Per a la Vivian

Sumari de l'obra completa

Thinkstock/Alamy.

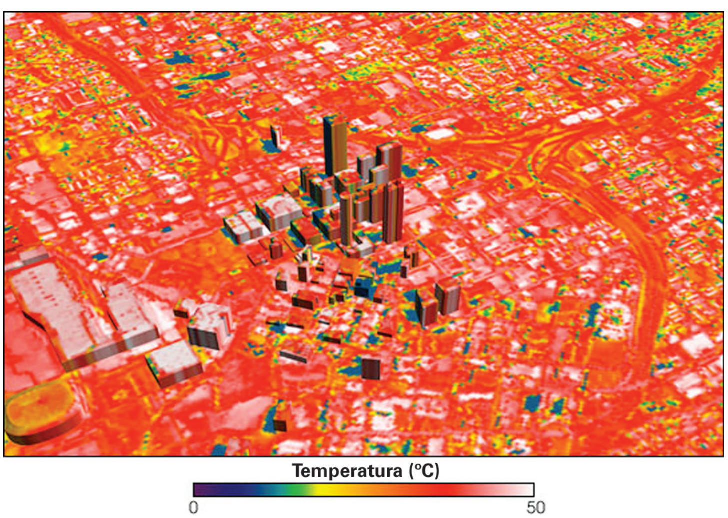
PART IV ELECTRICITAT I MAGNETISME

PART V LA LLUM

PART VI FÍSICA MODERNA: MECÀNICA QUÀNTICA, RELATIVITAT I ESTRUCTURA DE LA MATÈRIA

Contingut

Volum 2



NASA / Goddard Space Flight Center Scientific Visualization Studio.

Atlas Photo Bank / Photo Researchers, Inc.

Capítol 29
CIRCUITS DE CORRENT ALTERN / 995

Capítol 30
LES EQUACIONS DE MAXWELL I LES ONES ELECTROMAGNÈTIQUES / 1029

PART V LA LLUM

Capítol 31
LES PROPIETATS DE LA LLUM / 1055

Capítol 32
IMATGES ÒPTIQUES / 1097

Capítol 33
INTERFERÈNCIA I DIFRACCIÓ / 1141

PART VI FÍSICA MODERNA: MECÀNICA QUÀNTICA, RELATIVITAT I ESTRUCTURA DE LA MATÈRIA

Capítol 34
DUALITAT ONA-PARTÍCULA I FÍSICA QUÀNTICA / 1173

Capítol 35
APLICACIONS DE L'EQUACIÓ DE SCHRÖDINGER / 1203

Capítol 36
ELS ÀTOMS / 1227

Capítol 37
LES MOLÈCULES / 1261

Capítol 38
ELS SÒLIDS / 1281

Capítol 39
LA RELATIVITAT / 1319

NASA.

Pròleg a la segona edició catalana

L'obra que teniu a les mans, FÍSICA PER A LA CIÈNCIA I LA TECNOLOGIA, és la versió en català de la sisena edició nord-americana del tractat *Physics for Scientists and Engineers*, de Paul A. Tipler i Gene Mosca. Per a presentar aquesta edició emprem, en bona part, les paraules utilitzades en la presentació de la traducció de la tercera edició nord-americana, publicada per aquesta editorial el 1994, dins la col·lecció «Scriptorium», i sota els auspicis, llavors, de la Comissió per a l'Estímul de la Cultura Científica del Departament de Cultura de la Generalitat, i ara de l'Institut d'Estudis Catalans, en col·laboració amb la Fundació Alsina i Bofill, la Fundació Joaquim Torrens Ibern i la Fundació Congrés de Cultura Catalana.

FÍSICA PER A LA CIÈNCIA I LA TECNOLOGIA és la cinquena obra de la segona època del Projecte Scriptorium, l'objectiu del qual és difondre en català textos bàsics de prestigi internacional per a les carreres científiques i tècniques que fins ara s'havien de consultar en anglès o en espanyol. Generalment, les obres triades per a fer-ne la traducció al català es poden considerar universals, ja que n'hi ha edicions en diferents idiomes, es fan servir en moltes universitats d'arreu del món i els autors solen ser especialistes de vàlua reconeguda internacionalment, amb un gran domini de la matèria i que transmeten els seus coneixements d'una manera rigorosa i comprensible. En alguns casos, fins i tot, els llibres són més coneguts pel nom de l'autor principal que pel títol. Aquest és el cas d'altres obres que han precedit FÍSICA PER A LA CIÈNCIA I LA TECNOLOGIA en la segona època del Projecte Scriptorium, com ara «el Harris» (*Anàlisi química quantitativa*), publicat el 2006, i «l'Stryer» (*Bioquímica*), publicat el 2007. I també és el cas del manual que teniu a les mans, conegut com «el Tipler» pels estudiants i els professors.

En paraules d'aquella presentació, que continua sent actual, podem dir que aquest text ha tingut un èxit amplíssim, tant en la versió original en anglès, com en les nombroses traduccions a altres llengües. Les raons d'aquest èxit són diverses: el text és clar i rigorós; el contingut és ampli; l'exposició de problemes és rica i està ben graduada; les il·lustracions són aclaridores i atractives, i, juntament amb el text principal, trobem textos sobre temes actuals, redactats per especialistes diversos. L'èxit de les edicions successives ha permès d'anar enriquint cada vegada més tots aquests aspectes, i ha convertit aquesta obra en un llibre ben valorat per estudiants i professors. L'interès d'aquesta obra no queda exhaurit en el primer curs de la carrera, sinó que es manté com a obra de referència per a qui, ja avançat en els estudis corresponents, vulgui retrobar una introducció planera, un problema simple però il·lustratiu, un argument assequible o una visió de conjunt ràpida d'alguns dels diversos aspectes de la física. Així, tot i que el llibre excedeix, atesa l'extensió, el que és possible d'estudiar al llarg d'un curs, moltes parts són introduccions o recordatoris excel·lents que poden ajudar l'estudiant a progressar vers nivells més elevats i especialitzats.

L'amplitud de l'èxit d'aquest llibre és deguda, també, al fet que té una utilitat no tan sols per a l'estudiant de física o d'enginyeria, sinó també per a estudiants d'altres especialitats que vulguin disposar d'un text de referència general sobre física. Per atreure públics diversos, el llibre ha inclòs textos complementaris i problemes relacionats amb aplicacions molt variades, que enriqueixen la percepció dels lectors sobre l'abast i la bellesa de la física. D'altra banda, aquest èxit comporta també un problema per a mantenir la traducció al dia, atès el ritme viu amb què se succeeixen les edicions nord-americanes, estimulades pel gran nombre d'estudiants en llengua anglesa; ritme que, si s'hagués de seguir, faria inviable les edicions en català, adquirides per un públic incomparablement més reduït.

Per bé que els articles de recerca i la bibliografia avançada són publicats, en una proporció molt vasta, en anglès, no tota la ciència és recerca pura i especialitzada. La ciència ha anat impregnant una part tan considerable de la cultura moderna que seria inconcebible que cap llengua es permetés de prescindir d'un ús fluent, dúctil, flexible i depurat del llenguatge científic. Aquest llenguatge ha de ser apte per a la descripció, la discussió i l'ensenyament de les novetats fascinants que la ciència d'avui, amb tanta intensitat, ens va proporcionant del món. La fruïció de les novetats científiques és un dels privilegis menys dubtosos del nostre temps.

És obvi que el llenguatge científic no es pot limitar al nivell de l'ensenyament mitjà, ans ha d'arribar al nivell universitari, en el qual es produeixen els descobriments i les novetats de la recerca. Per això, la disponibilitat de llibres de text d'àmbit universitari en llengua catalana ha estat considerada durant molts anys una fita essencial perquè contribueix a fer que el català sigui una llengua indefinidament apta per a l'expressió dels diversos matisos del pensament del nostre temps, i per a començar a disposar, en el primer cicle, d'una oferta no negligible de textos de referència. Pel que fa als textos universitaris de segon cicle, més especialitzats, amb pocs usuaris i amb una vida útil relativament breu, tenen una necessitat bastant més discutible. Convé, doncs, deixar-los a l'albir de la iniciativa i la creativitat dels diversos especialistes, que poden trobar en l'ús de la llengua pròpia un estímul per a la redacció de textos originals, avançats i innovadors.

En definitiva, atès que la ciència forma i ha format sempre part de la cultura, de la indagació, de la inquietud humana, no és gens estrany que el transvasament de llengües hagi enriquit en molts casos la ciència. Exemple llunyà en el temps, però extraordinàriament evocador per la fecunditat que implica, en foren els escriptoris dels monestirs medievals, on la ciència àrab, impregnada dels sabers de Grècia i de l'Índia, penetrà en el món occidental. En record de l'esforç d'aquells antics traductors, el projecte en què s'inscriu aquesta traducció, el Projecte Scriptorium, ha pres com a logotip la imatge d'un astrolabi, instrument la difusió del qual a l'Europa cristiana està vinculada al monestir de Ripoll, on es féu el primer tractat llatí sobre l'ús i els fonaments d'aquest aparell. Tal com ho féu fa tants anys la Comissió per a l'Estímul de la Cultura Científica, convidem els lectors actuals a cercar en aquest text el coneixement i l'estímul que tants d'altres lectors hi han trobat al llarg de molt anys.

David Jou
Catedràtic de Física de la Matèria Condensada de la Universitat Autònoma de Barcelona
Membre de la Secció de Ciències i Tecnologia de l'Institut d'Estudis Catalans
i
Josep Enric Llebot
Catedràtic de Física de la Matèria Condensada de la Universitat Autònoma de Barcelona
Membre de la Secció de Ciències i Tecnologia de l'Institut d'Estudis Catalans
President de la Societat Catalana de Física

Prefaci

La sisena edició de FÍSICA PER A LA CIÈNCIA I LA TECNOLOGIA ofereix un text i eines multimèdia completament integrades que ajudaran els estudiants a aprendre d'una manera més eficaç i permetran als professors adaptar les classes per a ensenyar d'una manera més eficient.

El text inclou un nou enfocament estratègic de resolució de problemes, una guia de matemàtiques integrada i noves eines per a millorar la comprensió conceptual. Les aplicacions actuals de la física destaquen temes innovadors que ajuden els estudiants a relacionar el que aprenen amb les tecnologies del món real.

CARACTERÍSTIQUES DESTACADES

NOU!

ESTRATÈGIA DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

La sisena edició presenta una nova estratègia de resolució de problemes en què els exemples segueixen un format sistemàtic d'**anàlisi**, **resolució** i **comprovació**. Aquest format condueix l'estudiant en els passos que cal seguir per a analitzar el problema, resoldre'l i comprovar-ne les respostes. Sovint, els exemples inclouen seccions d'**ampliació** molt útils en què es presenten maneres alternatives de resoldre els problemes, fets interessants o informació addicional relacionada amb els conceptes presentats. Quan es considera necessari, els exemples van seguits d'**exercicis** perquè els estudiants puguin avaluar el domini que tenen dels conceptes.

En aquesta edició, novament, les etapes de resolució de problemes van acompanyades de les equacions necessàries, de manera que els estudiants puguin seguir d'una manera més fàcil el raonament.

Després de l'enunciat de cada problema, es demana als estudiants que en facin una **anàlisi**. Es tracta d'analitzar el problema tant conceptualment com visualment.

En la secció de **resolució**, cada pas es presenta com un enunciat escrit en la columna de l'esquerra, amb les equacions matemàtiques corresponents en la columna de la dreta.

La **comprovació** recorda als estudiants que han de verificar que els resultats obtinguts són precisos i raonables.

L'**ampliació** suggereix una manera diferent d'enfocar el problema, o en dóna informació addicional rellevant.

Sovint, després de la solució hi ha un **exercici** que permet als estudiants comprovar el grau de comprensió que han assolit. Al final del capítol, s'hi inclouen les respostes per tal de facilitar-ne la comprovació immediata.

Exemple 3.4 **Fer un revolt**

Un cotxe es desplaça cap a l'est a 60 km/h. Fa un revolt i 5,0 s més tard viatja cap al nord a 60 km/h. Determineu l'acceleració mitjana del cotxe.

ANÀLISI Calculem l'acceleració mitjana a partir de la seva definició, $\vec{a}_{av} = \Delta\vec{v}/\Delta t$. Primerament calculem $\Delta\vec{v}$, que és el vector que, sumat a $\vec{v}_i$, dóna $\vec{v}_f$.

RESOLUCIÓ

1r. L'acceleració mitjana és el quocient entre la variació de la velocitat i l'interval de temps: $\vec{a}_{av} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

2n. Per a calcular $\Delta\vec{v}$, cal especificar en primer lloc $\vec{v}_i$ i $\vec{v}_f$. Dibuixem $\vec{v}_i$ i $\vec{v}_f$ (figura 3.7*a*) i tracem el diagrama de suma vectorial (figura 3.7*b*) corresponent a $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \Delta\vec{v}$:

3r. El canvi de velocitat és determinat per les velocitats inicial i final: $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \Delta\vec{v}$

4t. Substituïm els resultats anteriors i determinem l'acceleració mitjana: $\vec{a}_{av} = \dfrac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t} = \dfrac{60\ \text{km/h}\ \hat{j} - 60\ \text{km/h}\ \hat{i}}{5{,}0\ \text{s}}$

5è. Convertim 60 km/h a metres per segon: $60\ \cancel{\text{km}}/\cancel{\text{h}} \times \dfrac{1\ \cancel{\text{h}}}{3\,600\ \text{s}} \times \dfrac{1\,000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} = 16{,}7\ \text{m/s}$

6è. Expressem l'acceleració en metres per segon al quadrat: $\vec{a}_{av} = \dfrac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t} = \dfrac{16{,}7\ \text{m/s}\ \hat{j} - 16{,}7\ \text{m/s}\ \hat{i}}{5{,}0\ \text{s}} = \boxed{-3{,}4\ \text{m/s}^2\ \hat{i} + 3{,}4\ \text{m/s}^2\ \hat{j}}$

COMPROVACIÓ El component de la velocitat en direcció est disminueix de 60 km/h a zero, de manera que cal esperar que el component x de l'acceleració sigui negatiu. Tanmateix, el component de la velocitat en direcció nord augmenta de zero a 60 km/h, amb la qual cosa cal esperar que el component y de l'acceleració sigui positiu. El resultat del sisè pas concorda amb aquestes expectatives.

AMPLIACIÓ Observeu que el cotxe continua accelerant encara que el mòdul de la velocitat es mantingui constant.

EXERCICI 3.1 Determineu el mòdul i la direcció del vector d'acceleració mitjana.

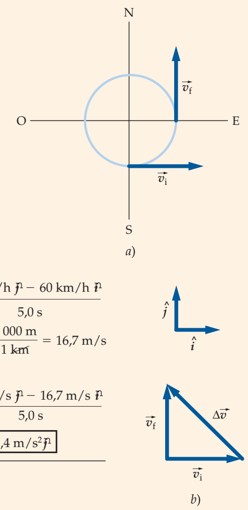


FIGURA 3.7

En gairebé tots els capítols hi ha un requadre d'**estratègia de resolució de problemes** per a reforçar el format **anàlisi**, **resolució** i **comprovació** de manera que es puguin resoldre els problemes satisfactòriament.

ESTRATÈGIA DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

Velocitat relativa

ANÀLISI El primer pas per a la resolució de problemes de velocitat relativa és identificar i marcar els sistemes de referència rellevants. Aquí els anomenarem *sistema de referència A* i *sistema de referència B*.

RESOLUCIÓ

1r. Utilitzant $\vec{v}_{pB} = \vec{v}_{pA} + \vec{v}_{AB}$ (equació 3.9), relacioneu la velocitat de l'objecte mòbil (partícula p) relativa al sistema A amb la velocitat de la partícula relativa al sistema B.

2n. Traceu un diagrama de suma vectorial per a l'equació $\vec{v}_{pB} = \vec{v}_{pA} + \vec{v}_{AB}$. Per a això, feu servir el mètode gràfic d'addició de vectors. Incloeu els eixos de coordenades en la gràfica.

3r. Calculeu la incògnita d'interès. Utilitzeu la trigonometria, si cal.

COMPROVACIÓ Assegureu-vos que obteniu la velocitat o la posició del cos respecte del sistema de referència adient.

NOU!

GUIA DE MATEMÀTIQUES INTEGRADA

En aquesta edició s'ha millorat el suport matemàtic als estudiants que aprenen matemàtiques alhora que s'introdueixen en el món de la física o als que volen repassar les matemàtiques.

La **guia de matemàtiques**

- revisa qüestions bàsiques d'àlgebra, geometria, trigonometria i càlcul,
- relaciona conceptes matemàtics amb conceptes físics del text,
- proporciona exemples i exercicis perquè els estudiants puguin comprovar que han entès els conceptes matemàtics.

Exemple M.13 Desintegració radioactiva del cobalt 60

El període de semidesintegració del cobalt 60 (^{60}Co) és de 5,27 anys. Quan $t = 0$ tenim una mostra de ^{60}Co d'1,20 mg de massa. Quant de temps t (en anys) haurà de passar perquè 0,400 mg de la mostra de ^{60}Co s'hagi desintegrat?

ANÀLISI En la deducció del període de semidesintegració vam establir que $N/N_0 = 1/2$. En aquest exemple, hem de trobar el temps de permanència de dos terços de la mostra, és a dir, quan la fracció N/N_0 sigui 0,667.

RESOLUCIÓ

1r. Expressem la fracció N/N_0 com una funció exponencial: $\frac{N}{N_0} = 0{,}667 = e^{-\lambda t}$

2n. Obtenim els valors recíprocs de tots dos membres: $\frac{N_0}{N} = 1{,}50 = e^{\lambda t}$

3r. Aïllem t: $t = \frac{\ln 1{,}50}{\lambda} = \frac{0{,}405}{\lambda}$

4. La constant de desintegració està relacionada amb el període de semidesintegració per $\lambda = (\ln 2)/t_{1/2}$ (equació M.70). Substituïm $(\ln 2)/t_{1/2}$ per λ i calculem el temps: $t = \frac{\ln 1{,}5}{\ln 2} t_{1/2} = \frac{\ln 1{,}5}{\ln 2} \times 5{,}27 \text{ anys} = 3{,}08 \text{ anys}$

COMPROVACIÓ Per tal que la massa d'una mostra de ^{60}Co decreixi fins al 50 % de la seva massa inicial han de passar 5,27 anys. Per tant, podem esperar que la mostra tardi menys de 5,27 anys a perdre el 33,3 % de la seva massa. Així, el resultat obtingut (3,08 anys) és inferior a 5,27 anys, i concorda amb el que era previsible.

EXERCICIS

27. La constant de temps de descàrrega τ d'un condensador en un circuit RC és el temps que tarda el condensador a descarregar-se fins a e^{-1} (o 0,368) vegades la seva càrrega quan $t = 0$. Si $\tau = 1$ s per a un condensador, quant de temps t (en segons) haurà de transcórrer perquè es descarregui fins al 50,0 % de la càrrega inicial?
28. Si la població de coiots en un lloc determinat creix a un ritme del 8,0 % per dècada i continua creixent al mateix ritme indefinidament, en quants anys s'assolirà una població 1,5 vegades l'actual?

M.12 CÀLCUL INTEGRAL

El **càlcul integral** es pot considerar l'invers del càlcul diferencial. Si *integrem* una funció $f(t)$, obtenim una funció $F(t)$, de manera que $f(t)$ és la derivada de $F(t)$ respecte de t.

LA INTEGRAL COM UNA ÀREA SOTA UNA CORBA. ANÀLISI DIMENSIONAL

El procés de trobar l'àrea sota una corba de la gràfica il·lustra la integració. La figura M.27 mostra una funció $f(t)$. L'àrea de l'element ombrejat és aproximadament $f_i\,\Delta t_i$, en què f_i es calcula en un punt qualsevol de l'interval Δt_i. Aquesta aproximació millora si Δt_i és molt petit. L'àrea total des de t_1 fins a t_2 es troba sumant tots els elements d'àrea des de t_1 fins a t_2 i prenent el límit quan Δt_i tendeix a zero. Aquest límit s'anomena **integral** de f sobre t i s'escriu

$$\int f\,dt = \text{àrea}_i = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i f_i \Delta t_i \qquad \text{M.74}$$

Les *dimensions físiques* d'una integral d'una funció $f(t)$ es troben multiplicant les dimensions de l'*integrand* (la funció que s'ha

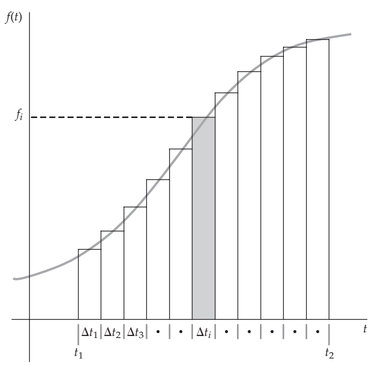


FIGURA M.27 Funció general $f(t)$. L'àrea de l'element ombrejat és aproximadament $f_i \Delta t_i$, en què f_i es calcula per a un punt qualsevol de l'interval.

A més a més, les notes al marge permeten que els estudiants vegin fàcilment la relació que hi ha entre els conceptes físics del text i els conceptes matemàtics.

Per a més informació sobre **càlcul diferencial,** *consulteu la* **Guia de matemàtiques**

NOU!

PEDAGOGIA PER A ASSEGURAR LA COMPRENSIÓ DELS CONCEPTES

S'hi han afegit eines pràctiques per a facilitar als estudiants la comprensió dels conceptes físics.

- S'hi han introduït nous **exemples conceptuals** per a ajudar els estudiants a entendre amb profunditat els conceptes físics essencials. Aquests exemples fan servir l'estratègia d'**anàlisi**, **resolució** i **comprovació**, de manera que els estudiants no solament adquireixen una comprensió conceptual bàsica, sinó que han d'avaluar llurs respostes.

Exemple 8.12 Col·lisions amb massilla — *Conceptes*

La Maria té dues boles de la mateixa massa, una bola de massilla de lampista i una altra de plastilina de silicona per a jugar. Llança la bola de massilla contra un bloc suspès per cordes, tal com mostra la figura 8.20. La bala colpeja la caixa i cau al terra. En conseqüència, el bloc puja fins a una altura màxima h. Si hagués llançat la bola de plastilina a la mateixa velocitat, quina altura hauria assolit el bloc en funció de h? La plastilina de silicona, a diferència de la massilla, és elàstica i hauria rebotat després de xocar amb el bloc.

ANÀLISI Durant l'impacte, la variació de moment del sistema bola-bloc és zero. Com més gran és la variació de moment de la bola, més gran serà la variació de moment del bloc. Augmenta més la variació de moment de la bola si la bola rebota o si no ho fa?

RESOLUCIÓ

La bola de massilla perd una fracció important del moment inicial. La bola de plastilina de silicona perdria tot el moment inicial cap endavant per a guanyar moment en la direcció oposada. Per tant, la bola de plastilina perdria més quantitat de moment que la bola de massilla.

El bloc arribaria més amunt després del xoc amb la bola de plastilina de silicona que amb la bola de massilla.

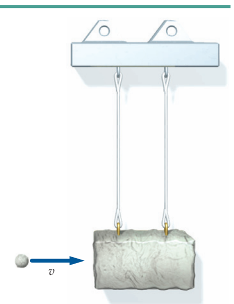


FIGURA 8.20

COMPROVACIÓ El bloc exerceix un impuls cap endarrere sobre la bola de massilla per a desaccelerar-la fins a aturar-la. El mateix impuls fa aturar la bola de plastilina, però un impuls addicional la fa retrocedir. Per tant, el bloc exerceix més impuls sobre la bola de plastilina que sobre la de massilla de lampista. D'acord amb la tercera llei de Newton, l'impuls de la bola sobre el bloc és igual i oposat a l'impuls del bloc sobre la bola. Aleshores, la bola de plastilina de silicona exerceix més impuls sobre el bloc i hi dóna una variació de moment superior.

- Les noves **comprovacions de conceptes** permeten als estudiants comprovar si han entès els conceptes físics a mesura que llegeixen els capítols. Les respostes són al final de cada capítol per a tenir una confirmació immediata. Les comprovacions de conceptes són a prop de temes rellevants, de manera que els estudiants puguin tornar a llegir immediatament els materials que no hagin comprès del tot.
- Els nous **avisos de dificultat**, identificats mitjançant un signe d'exclamació, ajuden els estudiants a evitar errors habituals. Aquests avisos estan situats a prop dels temes que habitualment generen confusió, de manera que els estudiants puguin resoldre de seguida els dubtes que els sorgeixin.

COMPROVACIÓ DE CONCEPTES 3.1

La figura 3.9 és el diagrama del moviment de la saltadora abans, durant i després de l'instant de temps t_6, quan es troba momentàniament en repòs en el punt més baix del descens. En la part de l'ascens que es mostra en l'esquema, la velocitat de la saltadora augmenta. Feu servir aquest diagrama per a determinar la direcció de l'acceleració de la saltadora *a*) en l'instant t_6 i *b*) en l'instant t_9.

en què U_0, la constant arbitrària d'integració, és el valor de l'energia potencial per a $y = 0$. Com que només definim una variació d'energia potencial, el valor real de U no és rellevant. Per exemple, si assignem a l'energia potencial gravitatòria del sistema Terra-esquiador un valor igual a zero quan l'esquiador és al final de la pista, el seu valor quan és a una altura h per sobre d'aquest nivell és mgh. També podem assignar el valor zero de l'energia potencial al moment en què l'esquiador és en el punt P, a mig camí del pendent, en tal cas el seu valor en qualsevol altre punt seria mgy, en què y és la distància de l'esquiador respecte del punt P. En la meitat inferior del pendent, l'energia potencial serà negativa.

! Podem donar el valor zero a U en qualsevol punt de referència.

NOU! APLICACIONS ACTUALS DE LA FÍSICA

Les **aplicacions actuals de la física**, que apareixen al final d'alguns capítols, enllacen els conceptes descrits en els capítols amb temes interessants en el món actual. Entre aquests temes trobem des d'un parc eòlic fins als termòmetres moleculars i els motors de detonació per impulsos.

Aplicacions actuals de la física

Bufar aire calent

Els parcs eòlics estan repartits per la costa danesa, les planes de l'alt Mitjà Oest dels EUA i les muntanyes que recorren Califòrnia fins a Vermont. L'aprofitament de l'energia cinètica del vent no és res nou. Durant segles, els molins de vent s'han fet servir per a bombar aigua, ventilar mines[a] i moldre gra.

Actualment, les turbines de vent fan funcionar generadors elèctrics. Aquestes turbines transformen l'energia cinètica en energia electromagnètica. Les turbines modernes tenen molts preus, mides i rendiments. Algunes són màquines molt petites i senzilles que costen uns 500 dòlars la turbina i produeixen menys de 100 wats de potència.[b] D'altres són gegants i complexes i costen uns 2 milions de dòlars, però generen fins a 2,5 MW per turbina.[c] Totes aquestes turbines aprofiten una font d'energia fàcilment disponible: el vent.

La teoria que hi ha darrere de la conversió d'energia cinètica en energia electromagnètica és simple. Les molècules d'aire empenyen les aspes de l'hèlix i fan girar la turbina. Les aspes fan girar uns engranatges, els quals fan augmentar la velocitat de rotació i dirigeixen la rotació del rotor generador. El generador envia energia electromagnètica mitjançant línies d'alta tensió.

No obstant això, la conversió de l'energia cinètica del vent en energia electromagnètica no és 100 % eficient. Cal recordar que *no pot* ser 100 % eficient. Si les turbines convertissin tota l'energia cinètica del vent en energia elèctrica, l'aire sortiria de les turbines sense energia cinètica. És a dir, les turbines pararien l'aire. Si la turbina parés completament l'aire, aquest fluiria al voltant de la turbina, en comptes de fluir-hi a través.

Per tant, l'eficiència teòrica d'una turbina consisteix a capturar l'energia cinètica de l'aire en moviment i evitar el flux d'aire al seu voltant. Les turbines propulsades per hèlixs són les més comunes i llur eficiència teòrica varia del 30 % al 59 %.[d] (Les eficiències teòriques varien segons les pressuposicions sobre la manera com es comporta l'aire a mesura que flueix a través i al voltant de les hèlixs.)

Per tant, fins i tot la turbina més eficient no pot convertir el 100 % de l'energia teòricament disponible. Què succeeix? Abans d'arribar a la turbina, l'aire es mou en línies de corrent rectes, mentre que un cop han passat per la turbina, l'aire roda i esdevé turbulent. El component rotatori del moviment de l'aire més enllà de la turbina requereix energia. A causa de la viscositat de l'aire, també es produeix alguna dissipació. Si un determinat volum d'aire es mou més lentament, es produirà fricció entre aquest aire i l'aire que flueix a més velocitat al seu voltant. Les hèlixs s'escalfen i l'aire, també.[e] Els engranatges de la turbina també converteixen part de l'energia cinètica en energia tèrmica a causa de la fricció. Tota aquest energia tèrmica també cal tenir-la en compte. Les hèlixs de la turbina vibren individualment, i l'energia associada amb aquestes vibracions no es pot fer servir. Finalment, la turbina fa servir electricitat per a fer funcionar els motors que lubriquen els engranatges i el motor que orienta la turbina en la direcció més adient per a capturar el vent.

En definitiva, la major part de les turbines funcionen amb una eficiència d'entre un 10 % i un 20 %.[f] Tot i això, continuen sent un recurs energètic més net que el petroli. Un dels propietaris de turbines afirma: «La part fonamental del negoci de les turbines rau en el fet que ens ajuda a controlar el nostre futur».[g]

Un parc eòlic convertint l'energia cinètica de l'aire en energia elèctrica. (*Image Slate*.)

a. G. Agricola, *De Re Metallic* [reimpr.], Mineola, Nova York, Dover, 1950, p. 200-203. [Traducció de Herbert i Lou Henry Hoover].
b. A. Conally i J. Conally, «Wind Powered Generator», *Make*, vol. 5 (febrer 2006), p. 90-101.
c. «Why Four Generators May Be Better than One», *Modern Power Systems*, (desembre 2005), p. 30.
d. A. N. Gorban, A. M. Gorlov i V. M. Silantyev, «Limits of the Turbine Effidency for Free Fluid Flow», *Journal of Energy Resources Technology*, vol. 123, (desembre 2001), p. 311-317.
e. S. B. Roy, S. W. Pacala i R. L. Walko, «Can Large Wind Farms Affect Local Meteorology?», *Journal of Geophysical Research* (*Atmospheres*), 109, D19101, (16 octubre 2004).
f. A. N. Gorban, *et al.*, *op. cit*.
g. M. Wilde, «Colwell Farmers Take Advantage of Grant to Produce Wind Energy», *Waterloo-Cedar Falls Courier*, (1 maig 2006) B1 is.

Agraïments

Volem expressar el nostre agraïment a tots els professors, estudiants, col·laboradors i amics que han contribuït a aquesta edició i a les anteriors.

Anthony J. Buffa, professor emèrit de la Universitat Estatal Politècnica de Califòrnia, ha escrit molts dels nous problemes que apareixen al final dels capítols i ha editat les seccions de problemes del final de cada capítol. Laura Runkle ha escrit les «Aplicacions actuals de la física». Richard Mickey va corregir la guia de matemàtiques de la cinquena edició, que ara és la «Guia de matemàtiques» de la sisena. David Mills, professor emèrit del College of the Redwoods, a Califòrnia, ha revisat a fons el manual de solucions. Per a la redacció d'aquest llibre i per a la comprovació de l'exactitud del text i dels problemes hem comptat amb l'ajut inestimable dels professors següents:

Thomas Foster
Universitat d'Illinois Meridional

Karamjeet Arya
Universitat Estatal de San José

Mirley Bala
Universitat A&M de Texas i Universitat Estatal de Corpus Christi

Michael Crivello
San Diego Mesa College

Carlos Delgado
Community College de Nevada del Sud

David Faust
Mt. Hood Community College

Robin Jordan
Universitat de l'Atlàntic de Florida

Jerome Licini
Universitat Lehigh

Dan Lucas
Universitat de Wisconsin

Laura McCullough
Universitat de Wisconsin, Stout

Jeannette Myers
Universitat Francis Marion

Marian Peters
Universitat Estatal Apalatxiana

Todd K. Pedlar
Luther College

Paul Quinn
Universitat de Kutztown

Peter Sheldon
Randolph-Macon Woman's College

Michael G. Strauss
Universitat d'Oklahoma

Brad Trees
Universitat Wesleyana d'Ohio

George Zober
Escola Superior de Yough

Patricia Zober
Escola Superior de Ringgold

Molts professors i estudiants han dut a terme revisions útils i exhaustives d'un o més capítols d'aquesta edició. Cadascun d'ells ha contribuït d'una manera fonamental a millorar la qualitat d'aquesta revisió i, per això, mereixen el nostre agraïment. Ens agradaria donar les gràcies als revisors següents:

Ahmad H. Abdelhadi
Universitat James Madison

Edward Adelson
Universitat Estatal d'Ohio

Royal Albridge
Universitat Vanderbilt

J. Robert Anderson
Universitat de Maryland, College Park

Toby S. Anderson
Universitat Estatal de Tennessee

Wickram Ariyasinghe
Universitat Baylor

Yildirim Aktas
Universitat de Carolina del Nord, Charlotte

Eric Ayars
Universitat Estatal de Califòrnia

James Battat
Universitat Harvard

Eugene W. Beier
Universitat de Pennsilvània

Peter Beyersdorf
Universitat Estatal de San José

Richard Bone
Universitat Internacional de Florida

Juliet W. Brosing
Universitat del Pacífic

Ronald Brown
Universitat Estatal Politècnica de Califòrnia

Richard L. Cardenas
Universitat St. Mary's

Troy Carter
Universitat Estatal de Califòrnia, Los Angeles

Alice D. Churukian
Concordia College

N. John DiNardo
Universitat Drexel

Jianjun Dong
Universitat d'Auburn

Fivos R. Drymiotis
Universitat de Clemson

Mark A. Edwards
Universitat Hofstra

James Evans
Escola Superior Broken Arrow

Nicola Fameli
Universitat de la Colúmbia Britànica

N. G. Fazleev
Universitat de Texas, Arlington

Thomas Furtak
Escola de Mines de Colorado

Richard Gelderman
Universitat de Kentucky Occidental

Yuri Gershtein
Universitat Estatal de Florida

Paolo Gondolo
Universitat d'Utah

Benjamin Grinstein
Universitat de Califòrnia, San Diego

Parameswar Hari
Universitat de Tulsa

Joseph Harrison
Universitat d'Alabama, Birmingham

Patrick C. Hecking
Thiel College

Kristi R. G. Hendrickson
Universitat de Puget Sound

Linnea Hess
Olympic College

Mark Hollabaugh
Normandale Community College

Daniel Holland
Universitat Estatal d'Illinois

Richard D. Holland II
Universitat d'Illinois Meridional

Eric Hudson
Institut Tecnològic de Massachusetts

David C. Ingram
Universitat d'Ohio

Colin Inglefield
Universitat Estatal de Weber

Nathan Israeloff
Universitat Northeastern

Donald J. Jacobs
Universitat Estatal de Califòrnia, Northridge

Erik L. Jensen
Chemeketa Community College

Colin P. Jessop
Universitat de Notre Dame

Ed Kearns
Universitat de Boston

Alice K. Kolakowska
Universitat Estatal de Mississipí

Douglas Kurtze
Universitat Saint Joseph's

Eric T. Lane
Universitat de Tennessee, Chattanooga

Christie L. Larochelle
Franklin & Marshall College

Mary Lu Larsen
Universitat de Towson

Clifford L. Laurence
Universitat Tècnica de Colorado

Bruce W. Liby
Manhattan College

Ramon E. Lopez
Institut Tecnològic de Florida

Ntungwa Maasha
Coastal Georgia Community College i University Center

Jane H. MacGibbon
Universitat de Florida del Nord

A. James Mallmann
Escola d'Enginyers de Milwaukee

Rahul Mehta
Universitat Central d'Arkansas

R. A. McCorkle
Universitat de Rhode Island

Linda McDonald
Universitat North Park

Kenneth McLaughlin
Loras College

Eric R. Murray
Institut Tecnològic de Geòrgia

Jeffrey S. Olafsen
Universitat de Kansas

Richard P. Olenick
Universitat de Dallas

Halina Opyrchal
Institut Tecnològic de Nova Jersey

Russell L. Palma
Universitat Estatal de Minnesota, Mankato

Todd K. Pedlar
Luther College

Daniel Phillips
Universitat d'Ohio

Edward Pollack
Universitat de Connecticut

Michael Politano
Universitat Marquette

Robert L. Pompi
Universitat Estatal de Nova York, Binghamton

Damon A. Resnick
Universitat Estatal de Montana

Richard Robinett
Universitat Estatal de Pennsilvània

John Rollino
Universitat Rutgers

Daniel V. Schroeder
Universitat Estatal de Weber

Douglas Sherman
Universitat Estatal de San José

Christopher Sirola
Universitat Marquette

Larry K. Smith
Snow College

George Smoot
Universitat de Califòrnia, Berkeley

Zbigniew M. Stadnik
Universitat d'Ottawa

Kenny Stephens
Universitat Hardin-Simmons

Daniel Stump
Universitat Estatal de Michigan

Jorge Talamantes
Universitat Estatal de Califòrnia, Bakersfield

Charles G. Torre
Universitat Estatal d'Utah

Brad Trees
Universitat Wesleyana d'Ohio

John K. Vassiliou
Universitat de Villanova

Theodore D. Violett
Western State College

Hai-Sheng Wu
Universitat Estatal de Minnesota, Mankato

Anthony C. Zable
Portland Community College

Ulrich Zurcher
Universitat Estatal de Cleveland

També tenim un deute amb els revisors d'edicions anteriors. Així, doncs, volem donar les gràcies als revisors següents, que ens van proporcionar un ajut imprescindible mentre elaboràvem les edicions quarta i cinquena:

Edward Adelson
Universitat Estatal d'Ohio

Michael Arnett
Kirkwood Community College

Todd Averett
The College of William and Mary

Yildirim M. Aktas
Universitat de Carolina del Nord, Charlotte

Karamjeet Arya
Universitat Estatal de San José

Alison Baski
Universitat Commonwealth de Virgínia

William Bassichis
Universitat A&M de Texas

Joel C. Berlinghieri
The Citadel

Gary Stephen Blanpied
Universitat de Carolina del Sud

Frank Blatt
Universitat Estatal de Michigan

Ronald Brown
Universitat Estatal Politècnica de Califòrnia

Anthony J. Buffa
Universitat Estatal Politècnica de Califòrnia

John E. Byrne
Universitat Gonzaga

Wayne Carr
Institut Tecnològic Stevens

George Cassidy
Universitat d'Utah

Lay Nam Chang
Institut Politècnic de Virgínia

I. V. Chivets
Trinity College, Universitat de Dublín

Harry T. Chu
Universitat d'Akron

Alan Cresswell
Universitat de Pennsilvània, Shippensburg

Robert Coakley
Universitat de Maine Meridional

Robert Coleman
Universitat Emory

Brent A. Corbin
Universitat de Califòrnia, Los Angeles

Andrew Cornelius
Universitat de Nevada, Las Vegas

Mark W. Coffey
Escola de Mines de Colorado

Peter P. Crooker
Universitat de Hawaii

Jeff Culbert
Londres, Ontario

Paul Debevec
Universitat d'Illinois

Ricardo S. Decca
Universitat d'Indiana i Universitat Purdue

Robert W. Detenbeck
Universitat de Vermont

N. John DiNardo
Universitat Drexel

Bruce Doak
Universitat Estatal d'Arizona

Michael Dubson
Universitat de Colorado, Boulder

John Elliott
Universitat de Manchester (Anglaterra)

William Ellis
Universitat de Tecnologia de Sydney

Colonel Rolf Enger
Acadèmia de l'Exèrcit de l'Aire dels EUA

John W. Farley
Universitat de Nevada, Las Vegas

David Faust
Mount Hood Community College

Mirela S. Fetea
Universitat de Richmond

David Flammer
Escola de Mines de Colorado

Philip Fraundorf
Universitat de Missouri, Saint Louis

Tom Furtak
Escola de Mines de Colorado

James Garland
Emèrit

James Garner
Universitat de Florida del Nord

Ian Gatland
Institut Tecnològic de Geòrgia

Ron Gautreau
Institut Tecnològic de Nova Jersey

David Gavenda
Universitat de Texas, Austin

Patrick C. Gibbons
Universitat de Washington

David Gordon Wilson
Institut Tecnològic de Massachusetts

Christopher Gould
Universitat de Califòrnia Meridional

Newton Greenberg
Universitat Estatal de Nova York, Binghamton

John B. Gruber
Universitat Estatal de San José

Huidong Guo
Universitat de Colúmbia

Phuoc Ha
Universitat de Creighton

Richard Haracz
Universitat Drexel

Clint Harper
Moorpark College

Michael Harris
Universitat de Washington

Randy Harris
Universitat de Califòrnia, Davis

Tina Harriott
Universitat Mount Saint Vincent (Canadà)

Dieter Hartmann
Universitat de Clemson

Theresa Peggy Hartsell
Clark College

Kristi R. G. Hendrickson
Universitat de Puget Sound

Michael Hildreth
Universitat de Notre Dame

Robert Hollebeek
Universitat de Pennsilvània

David Ingram
Universitat d'Ohio

Shawn Jackson
Universitat de Tulsa

Madya Jalil
Universitat de Malacca (Malàisia)

Monwhea Jeng
Universitat de Califòrnia, Santa Barbara

James W. Johnson
Tallahassee Community College

Edwin R. Jones
Universitat de Carolina del Sud

Ilon Joseph
Universitat de Colúmbia

David Kaplan
Universitat de Califòrnia, Santa Barbara

William C. Kerr
Universitat de Wake Forest

John Kidder
Dartmouth College

Roger King
City College of San Francisco

James J. Kolata
Universitat de Notre Dame

Boris Korsunsky
Escola Northfield Mt. Hermon

Thomas O. Krause
Universitat de Towson

Eric Lane
Universitat de Tennessee, Chattanooga

Andrew Lang (estudiant de postgrau)
Universitat de Missouri

David Lange
Universitat de Califòrnia, Santa Barbara

Donald C. Larson
Universitat Drexel

Paul L. Lee
Universitat Estatal de Califòrnia, Northridge

Peter M. Levy
Universitat de Nova York

Jerome Licini
Universitat Lehigh

Isaac Leichter
Jerusalem College of Technology

William Lichten
Universitat de Yale

Robert Lieberman
Universitat Cornell

Fred Lipschultz
Universitat de Connecticut

Graeme Luke
Universitat de Colúmbia

Dan MacIsaac
Universitat d'Arizona Septentrional

Edward McCliment
Universitat d'Iowa

Robert R. Marchini
Universitat de Memphis

Peter E. C. Markowitz
Universitat Internacional de Florida

Daniel Marlow
Universitat de Princeton

Fernando Medina
Universitat de l'Atlàntic de Florida

Howard McAllister
Universitat de Hawaii

John A. McClelland
Universitat de Richmond

Laura McCullough
Universitat de Wisconsin, Stout

M. Howard Miles
Universitat Estatal de Washington

Matthew Moelter
Universitat de Puget Sound

Eugene Mosca
Acadèmia Naval dels EUA

Carl Mungan
Acadèmia Naval dels EUA

Taha Mzoughi
Universitat Estatal de Mississipí

Charles Niederriter
Gustavus Adolphus College

John W. Norbury
Universitat de Wisconsin, Milwaukee

Aileen O'Donughue
Universitat St. Lawrence

Jack Ord
Universitat de Waterloo

Jeffry S. Olafsen
Universitat de Kansas

Melvyn Jay Oremland
Universitat de Pace

Richard Packard
Universitat de Califòrnia

Antonio Pagnamenta
Universitat d'Illinois, Chicago

George W. Parker
Universitat Estatal de Carolina del Nord

John Parsons
Universitat de Colúmbia

Dinko Pocanic
Universitat de Virgínia

Edward Pollack
Universitat de Connecticut

Robert Pompi
Universitat Estatal de Nova York, Binghamton

Bernard G. Pope
Universitat Estatal de Michigan

John M. Pratte
Clayton College i Universitat Estatal

Brooke Pridmore
Clayton State College

Yong-Zhong Qian
Universitat de Minnesota

David Roberts
Universitat Brandeis

Lyle D. Roelofs
Haverford College

R. J. Rollefson
Universitat Wesleyana

Larry Rowan
Universitat de Carolina del Nord, Chapel Hill

Ajit S. Rupaal
Universitat de Washington Occidental

Todd G. Ruskell
Escola de Mines de Colorado

Lewis H. Ryder
Universitat de Kent, Canterbury

Andrew Scherbakov
Institut Tecnològic de Geòrgia

Bruce A. Schumm
Universitat de Califòrnia, Santa Cruz

Cindy Schwarz
Vassar College

Mesgun Sebhatu
Universitat Winthrop

Bernd Schuttler
Universitat de Geòrgia

Murray Scureman
Amdahl Corporation

Marllin L. Simon
Universitat d'Auburn

Scott Sinawi
Universitat de Colúmbia

Dave Smith
Universitat de les Illes Verges

Wesley H. Smith
Universitat de Wisconsin

Kevork Spartalian
Universitat de Vermont

Zbigniew M. Stadnik
Universitat d'Ottawa

G. R. Stewart
Universitat de Florida

Michael G. Strauss
Universitat d'Oklahoma

Kaare Stegavik
Universitat de Trondheim (Noruega)

Jay D. Strieb
Universitat de Villanova

Dan Styer
Oberlin College

Chun Fu Su
Universitat Estatal de Mississipí

Jeffrey Sundquist
Palm Beach Community College; South

Cyrus Taylor
Universitat Case Western Reserve

Martin Tiersten
City College of New York

Chin-Che Tin
Universitat d'Auburn

Oscar Vilches
Universitat de Washington

D. J. Wagner
Grove City College
Universitat de Colúmbia

George Watson
Universitat de Delaware

Fred Watts
College of Charleston

David Winter

John A. Underwood
Austin Community College

John Weinstein
Universitat de Mississipí

Stephen Weppner
Eckerd College

Suzanne E. Willis
Universitat d'Illinois Septentrional

Frank L. H. Wolfe
Universitat de Rochester

Frank Wolfs
Universitat de Rochester

Roy C. Wood
Universitat Estatal de Nou Mèxic

Ron Zammit
Universitat Estatal Politècnica de Califòrnia

Yuriy Zhestkov
Universitat de Colúmbia

Dean Zollman
Universitat Estatal de Kansas

Fulin Zuo
Universitat de Miami

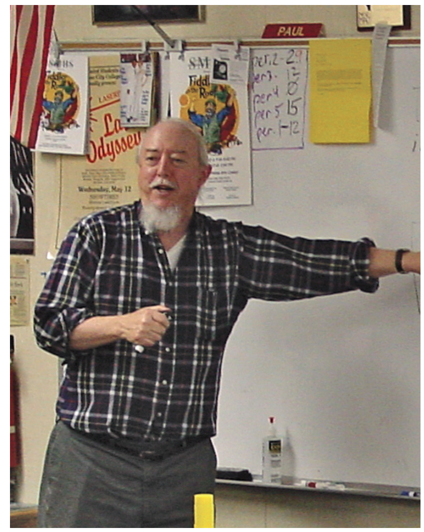
És obvi que la nostra feina no s'acaba mai; per això, esperem rebre comentaris i suggeriments dels lectors per a poder millorar el text i corregir qualsevol error. Si penseu que heu trobat una errada o voleu fer-nos cap comentari, suggeriment o pregunta, envieu-nos un escrit a **produccion@reverte.com**. Incorporarem les correccions al text en reimpressions posteriors.

Per acabar, volem agrair als nostres amics de W. H. Freeman and Company l'ajut i l'encoratjament que ens han ofert. Susan Brennan, Clancy Marshall, Kharissia Pettus, Georgia Lee Hadler, Susan Wein, Trumbull Rogers, Connie Parks, John Smith, Dena Digilio Betz, Ted Szczepanski i Liz Geller, que van ser molt generosos amb llur creativitat i treball intens en cada etapa del procés.

També estem agraïts per les contribucions i l'ajut dels nostres amics i col·laboradors Larry Tankersley, John Ertel, Steve Montgomery i Don Treacy.

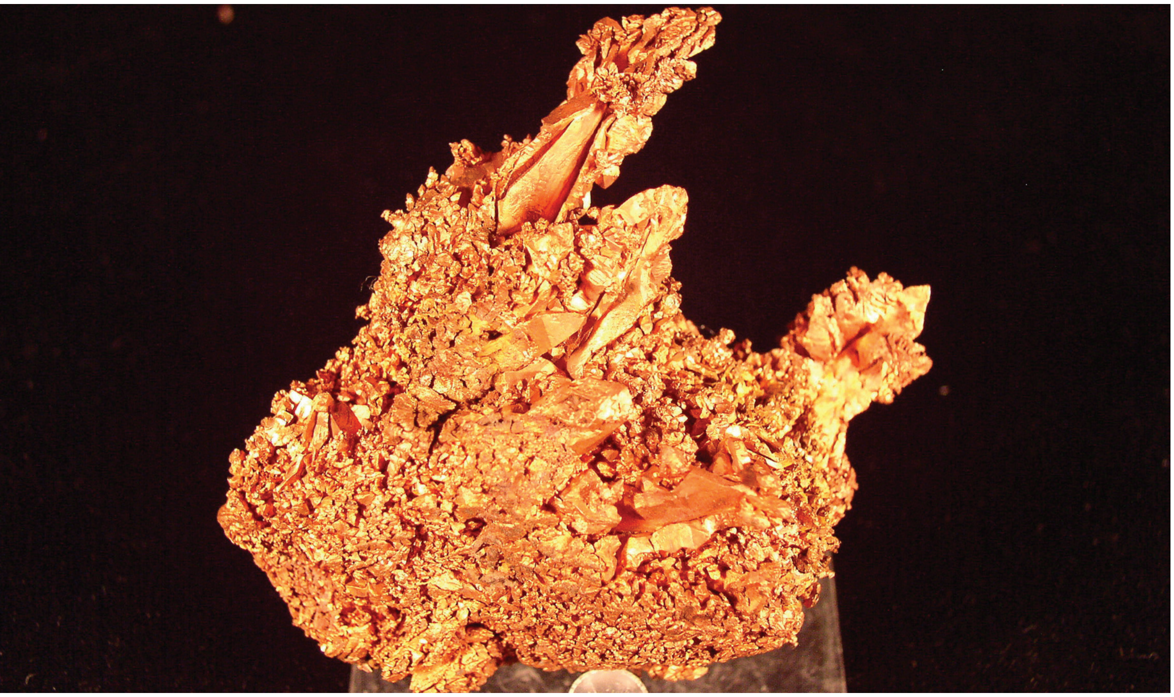
Sobre els autors

Paul Tipler va néixer a la petita ciutat agrícola d'Antigo, a Wisconsin, l'any 1933. Va fer el batxillerat a Oshkosh, Wisconsin, on el seu pare era director de les escoles públiques. Es va llicenciar a la Universitat Purdue, el 1955, i es va doctorar el 1962 a la Universitat d'Illinois, on va estudiar l'estructura del nucli. Mentre escrivia la tesi, va fer classe durant un any a la Universitat Wesleyana de Connecticut. Després es va traslladar a la Universitat d'Oakland, a Michigan, on va ser un dels primers membres del Departament de Física, i hi va tenir un paper important en el desenvolupament dels plans d'estudi. Durant els vint anys següents va impartir quasi totes les disciplines de la física i va escriure les edicions primera i segona dels seus llibres de text *Modern Physics* (1969, 1978) i *Physics* (1976, 1982), àmpliament difosos. L'any 1982, es va traslladar a Berkeley, Califòrnia, on resideix actualment i on ha escrit *College Physics* (1987) i la tercera edició de *Physics* (1991). A més de la física, entre les seves aficions trobem la música, l'excursionisme i l'acampada a l'aire lliure. És un pianista de *jazz* excel·lent i un bon jugador de pòquer.



Gene Mosca va néixer a la ciutat de Nova York i va créixer a Shelter Island, a l'estat de Nova York. Va estudiar a les universitats de Villanova, Michigan i Vermont, on va obtenir el títol de doctor en física. Mosca s'acaba de retirar, però ha estat professor a l'Acadèmia Naval dels Estats Units, on va impulsar nombroses millores en l'ensenyament de la física, tant en els laboratoris com en les aules. Proclamat per Paul Tipler «el millor crític que mai he tingut», Mosca ha esdevingut coautor del llibre des de la cinquena edició.

PART IV **ELECTRICITAT I MAGNETISME**



CAPÍTOL 21

EL COURE ÉS UN MATERIAL CONDUCTOR MOLT ÚTIL A CAUSA DE LES PROPIETATS QUE TÉ, LES QUALS PERMETEN EL TRANSPORT DE L'ELECTRICITAT. (*Brooks R. Dillard* / *www.yuprocks.com.*)

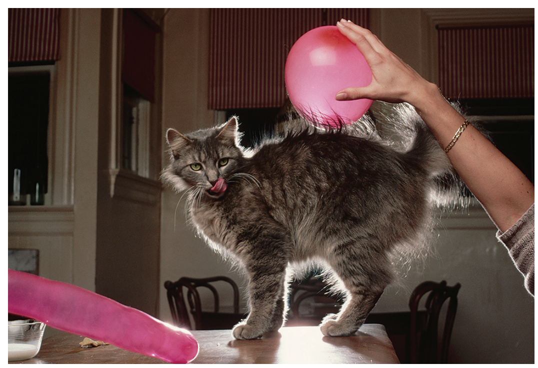
El camp elèctric (I): distribucions discretes de càrrega

? Quina càrrega total tenen els electrons d'una moneda? (Vegeu l'exemple 21.1.)

Així com fa un segle amb prou feines es disposava d'enllumenat elèctric, la nostra vida quotidiana actual depèn extraordinàriament de l'electricitat. Encara que l'ús de l'electricitat s'ha generalitzat des de fa poc, l'estudi d'aquesta part de la física té una llarga història que començà molt abans que s'encengués la primera làmpada elèctrica. Les primeres observacions de l'atracció elèctrica les van fer els grecs en l'antiguitat, els quals descobriren que l'ambre, després de refregar-lo, atreia objectes petits com ara palletes o plomes. De fet, la paraula *elèctric* prové del mot grec *elektron*, que significa 'ambre'.

Actualment, l'electricitat continua sent un camp d'estudi i d'aplicació. Els enginyers elèctrics milloren la tecnologia elèctrica existent, incrementant el rendiment i l'eficiència de dispositius elèctrics diversos, com ara automòbils híbrids, plantes elèctriques, etc. En el camp de l'automoció s'utilitzen pintures de fixació electrostàtica per a recobrir diferents parts del motor i de l'estructura general dels automòbils. Aquestes pintures duren més temps i són més respectuoses amb el medi ambient, ja que no requereixen cap mena de dissolvent.

*En aquest capítol començarem l'estudi de l'electricitat a partir de l'*electrostàtica*, que tracta de les càrregues en repòs. Després d'introduir el concepte de* càrrega elèctrica*, farem una anàlisi breu dels conceptes de* conductor *i* aïllant *i de la manera com pot adquirir càrrega un conductor. Tot seguit, estudiarem la llei de Coulomb, que descriu la força que exerceix una càrrega en una altra. A continuació, introduirem el concepte de* camp elèctric *i veurem com es pot descriure mitjançant les línies de camp que n'indiquen el mòdul i la direcció, tal com les línies de corrent descrivien el camp de velocitats d'un fluid en moviment en el capítol 13. Finalment, veurem el comportament de les càrregues puntuals i dels dipols en camps elèctrics.*



Un gat i un globus. (*Roger Ressmeyer / Corbis*.)

21.1 CÀRREGA ELÈCTRICA

Freguem una barra de cautxú amb una peça de pell i la suspenem d'una corda que pot girar lliurement. Si acostem a aquesta barra una segona barra de cautxú fregada també amb una peça de pell, observarem que les dues barres es repel·leixen mútuament (figura 21.1*a*). Podem repetir l'experiment i obtenim el mateix resultat, si utilitzem dues barres de vidre que han estat fregades amb una peça de seda (figura 21.1*b*). En canvi, si acostem una barra de cautxú que ha estat fregada amb pell a una barra de vidre que ha estat fregada amb seda, observem que les dues barres s'atreuen entre si (figura 21.l*c*).

Quan freguem una barra, aquesta es carrega elèctricament. Si repetim l'experiment amb diversos tipus de materials, veiem que podem classificar tots els objectes carregats en dos grups: els que es carreguen com la barra de cautxú fregada amb pell i els que es carreguen com la barra de vidre fregada amb seda. Els objectes d'un mateix grup es repel·leixen entre si, mentre que els de grups diferents s'atreuen. Benjamin Franklin va proposar un model d'electricitat que explica aquest fenomen. Va suggerir que tot objecte posseeix una quantitat *normal* d'electricitat i que quan dos objectes s'apropen molt, com quan es freguen entre ells, una part de l'electricitat es pot transferir d'un cos a l'altre. Així, doncs, l'un queda amb un excés de càrrega i l'altre, amb un dèficit. Franklin va descriure les càrregues resultants com a positiva (signe més) i negativa (signe menys). Encara més, va designar com a positiva el tipus de càrrega que adquireix la barra de vidre fregada amb una peça de seda, de manera que la càrrega adquirida per la peça de seda esdevenia negativa i de la mateixa magnitud. Aleshores, segons la convenció que va establir Franklin, el cautxú fregat amb pell adquireix una càrrega negativa, mentre que la pell n'adquireix de positiva de la mateixa magnitud. Dos objectes que tenen el ma-

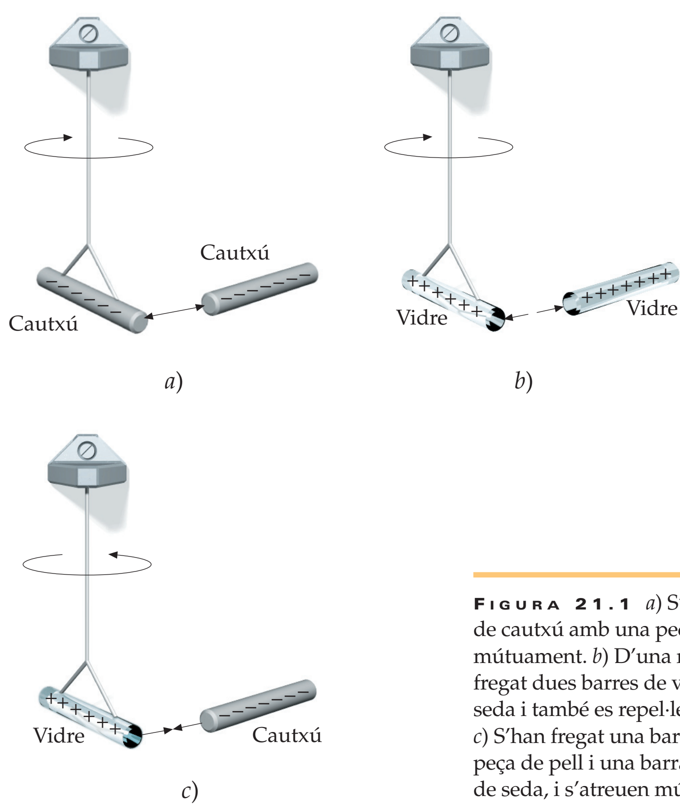


FIGURA 21.1 *a*) S'han fregat dues barres de cautxú amb una peça de pell i es repel·leixen mútuament. *b*) D'una manera semblant, s'han fregat dues barres de vidre amb una peça de seda i també es repel·leixen mútuament. *c*) S'han fregat una barra de cautxú amb una peça de pell i una barra de vidre amb una peça de seda, i s'atreuen mútuament.

teix tipus de càrrega (tant si és positiva com negativa) es repel·leixen entre si, mentre que si tenen càrregues oposades s'atreuen mútuament (figura 21.1). Un objecte que no està carregat ni positivament ni negativament diem que és *elèctricament neutre*.

Avui sabem que quan freguem el vidre amb seda, es transfereixen electrons des del vidre cap a la seda. D'acord amb la convenció de signes de Franklin, que és la que s'utilitza encara, la seda esdevé carregada negativament i, per tant, diem que els electrons tenen càrrega negativa. La taula 21.1 correspon a una versió reduïda d'una **sèrie triboelèctrica** (del grec *tribos*, 'fregament'). Els materials situats en les posicions més baixes tenen més afinitat per a captar electrons. Això vol dir que si freguem dos d'aquests materials entre ells, els electrons seran transferits des del material situat més amunt en la taula cap al material situat més avall. Per exemple, quan freguem niló i tefló, els electrons aniran del niló cap al tefló.

TAULA 21.1 Sèrie triboelèctrica

+ Extrem positiu de la sèrie
amiant
vidre
niló
llana
plom
deda
alumini
paper
cotó
acer
cautxú
níquel i coure
llautó i plata
cautxú sintètic
orló (fibra tèxtil sintètica)
saran (fibra tèxtil de clorur de polivinilidè)
polietilè
tefló
cautxú de silicona
− Extrem negatiu de la sèrie

QUANTITZACIÓ DE LA CÀRREGA

La matèria és formada per àtoms elèctricament neutres. Cada àtom conté un nucli petit, però massiu, compost de protons i neutrons. Els protons tenen càrrega positiva, mentre que els neutrons tenen càrrega nul·la. El nombre de protons que té un àtom d'un element determinat correspon al nombre atòmic Z de l'element. Al voltant del nucli hi ha un nombre equivalent d'electrons carregats negativament de manera que la càrrega total de l'àtom és zero. La massa de l'electró és unes dues mil vegades més petita que la del protó; tanmateix, les càrregues d'aquestes dues partícules són idèntiques pel que fa al mòdul, malgrat que tenen signe contrari. La càrrega del protó és e i la de l'electró és $-e$, en què e és la **unitat fonamental de càrrega**. La càrrega d'un electró o d'un protó és una propietat intrínseca de la partícula, com ho són també la massa i l'espín.

Totes les càrregues observables es presenten en múltiples enters de la unitat fonamental de càrrega e. Dit d'una altra manera, *la càrrega està quantitzada*. Qualsevol càrrega Q observable, present en la natura, es pot representar com a $Q = \pm Ne$, en què N és un nombre enter.[a] No obstant això, en els objectes comuns no observem aquesta quantització de la càrrega, ja que N és quasi sempre un nombre molt gran. Així, doncs, sembla que la càrrega és contínua, igual que l'aire sembla un medi continu, malgrat que en realitat és format per moltes partícules discretes (molècules, àtoms i ions). Per posar un exemple corrent de N, quan carreguem una barra de plàstic fregant-la amb una peça de pell, es transfereixen uns 10^{10} electrons, o més, de la pell a la barra.

CONSERVACIÓ DE LA CÀRREGA

Quan freguem dos objectes entre ells, l'un conté un excés d'electrons i, per tant, es carrega negativament, mentre que l'altre roman amb un dèficit d'electrons i, en conseqüència, té càrrega positiva. La càrrega neta dels objectes es manté constant; és a dir, la *càrrega es conserva*. La **llei de conservació de la càrrega** és una llei fonamental de la natura. En determinades interaccions entre partícules elementals es creen o s'anihilen electrons. Tanmateix, en aquests processos es produeixen o destrueixen quantitats equivalents de càrregues positives i negatives, de manera que la càrrega neta de l'Univers no varia.

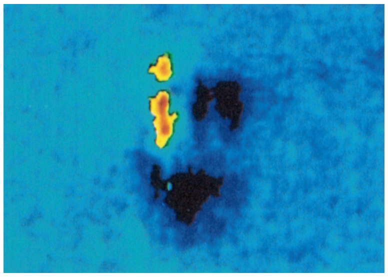
La unitat de càrrega en el sistema internacional (SI) és el coulomb, que es defineix en funció de la unitat de corrent elèctric, l'ampere (A).[b] Un **coulomb** (C) correspon a la quantitat de càrrega que flueix a través de la secció transversal d'un fil conductor en un segon quan la intensitat de corrent en el cable és d'un ampere. (La secció transversal d'un objecte sòlid és la intersecció de l'objecte i un pla, considerant un pla que talla transversalment el cable.) La unitat fonamental de càrrega elèctrica e està relacionada amb el coulomb per

$$e = 1{,}602\,177 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} \approx 1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} \qquad 21.1$$

UNITAT FONAMENTAL DE CÀRREGA

a. Segons el model estàndard de partícules elementals, els protons, els neutrons i altres partícules són constituïts per partícules fonamentals anomenades *quarks*, que tenen càrregues de $\pm\frac{1}{3}e$ o $\pm\frac{2}{3}e$. Només s'han observat combinacions que tenen com a resultat una càrrega neta de $\pm Ne$, en què N és un nombre enter.

b. L'ampere (A) és la unitat de corrent elèctric que s'empra habitualment en electricitat.



Càrrega per contacte. S'ha carregat una mostra de plàstic d'uns 0,02 mm d'amplària per contacte amb una peça de níquel. Encara que el plàstic tingui una càrrega neta positiva, s'observen regions de càrrega negativa (blau fosc) i regions de càrrega positiva (groc). La fotografia s'ha pres fent passar una agulla carregada de 10^{-7} m sobre la mostra i mesurant la força electrostàtica sobre l'agulla.
(*Bruce Terris / IBM Almaden Research Center*.)

EXERCICI 21.1
Al laboratori es poden obtenir càrregues de 50 nC (1,0 nC = 10^{-9} C) fregant dos objectes entre ells. Quants electrons cal transferir per a produir aquesta càrrega?

Exemple 21.1 Càrrega d'una moneda

Un penic de coure[a] (Z = 29) té 3,10 g de massa. Quina és la càrrega total dels electrons en la moneda?

ANÀLISI La càrrega total dels electrons continguts en una moneda serà el nombre d'electrons, N_e, multiplicat per la càrrega de cadascun, $-e$. El nombre d'electrons en un àtom de coure és 29 (nombre atòmic del coure). Per tant, el nombre d'electrons serà vint-i-nou vegades el nombre d'àtoms N_{at} de coure que hi ha en una moneda. Per a esbrinar N_{at}, cal tenir en compte que el nombre de partícules (molècules, àtoms o ions) contingudes en un mol de qualsevol substància és igual al nombre d'Avogadro ($N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$) i que el nombre de grams d'un mol és la massa molar, M, que en el cas del coure és 63,5 g/mol.

RESOLUCIÓ

1r. La càrrega total Q és el nombre d'electrons multiplicat per la seva càrrega:

$$Q = N_e(-e)$$

2n. El nombre d'electrons és Z multiplicat pel nombre d'àtoms de coure N_{at}:

$$N_e = ZN_{at}$$

3r. Calculem el nombre d'àtoms de coure que hi ha en 3,10 g d'aquest metall:

$$N_{at} = (3{,}10\ \text{g})\frac{6{,}02 \times 10^{23}\ \text{àtoms/mol}}{63{,}5\ \text{g/mol}} = 2{,}94 \times 10^{22}\ \text{àtoms}$$

4t. Calculem el nombre d'electrons N_e:

$$N_e = ZN_{at} = (29\ \text{electrons/àtom})(2{,}94 \times 10^{22}\ \text{àtoms}) = 8{,}53 \times 10^{23}\ \text{electrons}$$

5è. Utilitzem aquest valor de N_e per a determinar la càrrega total:

$$Q = N_e \times (-e) = (8{,}53 \times 10^{23}\ \text{electrons})(-1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C/electró}) = \boxed{-1{,}37 \times 10^5\ \text{C}}$$

COMPROVACIÓ En 63,5 g de coure hi ha $29 \times (6{,}02 \times 10^{23})$ electrons. Per tant, en 3,10 g d'aquest metall hi haurà $(3{,}10/63{,}5) \times 29 \times (6{,}02 \times 10^{23}) = 8{,}53 \times 10^{23}$ electrons, la qual cosa concorda amb el resultat del quart pas de l'exemple.

EXERCICI 21.2 Si repartíssim un milió d'electrons a cada habitant dels Estats Units (uns tres-cents milions de persones), quin percentatge del nombre d'electrons contingut en un penic de coure representaria?

a. Des del 1793 fins al 1837, els penics dels Estats Units eren compostos per coure al 100 %. L'any 1982, se'n va canviar la composició i es va passar del 95 % de coure i 5 % de zinc al 2,5 % de coure i 97,5 % de zinc.

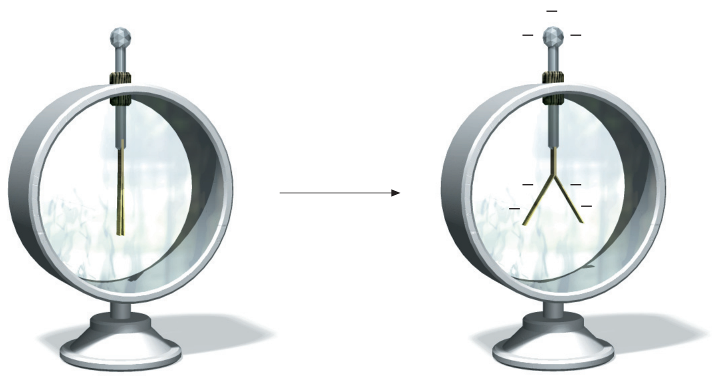


FIGURA 21.2 Un electroscopi. Les dues làmines d'or estan connectades a una barra metàl·lica que té una esfera conductora al capdamunt. L'esfera, la barra i les làmines estan aïllades del recipient. Quan les làmines no estan carregades, pengen juntes en direcció vertical. Si posem en contacte l'esfera amb una barra de plàstic carregada negativament, es transfereixen càrregues negatives de la barra a l'esfera, i de l'esfera a les làmines d'or. Aleshores, les làmines d'or se separen a causa de la repulsió elèctrica entre llurs càrregues negatives. (Si posem en contacte l'esfera amb una barra de vidre carregada positivament, les làmines d'or també se separaran. En aquest cas, la barra de vidre carregada positivament atreu electrons de l'esfera de metall i deixa una càrrega neta positiva a l'esfera, a la barra i a les làmines.)

21.2 CONDUCTORS I AÏLLANTS

En molts materials, com ara el coure i altres metalls, una part dels electrons es pot moure lliurement en tot el material. Aquests materials s'anomenen **conductors**. En altres materials, com ara la fusta o el vidre, tots els electrons estan lligats als àtoms propers i cap d'ells no es pot moure lliurement. Aquests materials s'anomenen **aïllants**.

En un àtom de coure hi ha vint-i-nou electrons units al nucli a causa de l'atracció electrostàtica entre els electrons carregats negativament i el nucli carregat positivament. La força que uneix els electrons més externs (electrons de valència) amb el nucli és més feble que la que uneix els més interns (electrons propers al nucli). Quan es combina un gran nombre d'àtoms de coure en una peça metàl·lica de coure, l'enllaç dels electrons de cada àtom individual al seu nucli disminueix a causa de les interaccions dels electrons amb els electrons i els nuclis dels àtoms adjacents. Aleshores, un o més dels electrons de valència de cada àtom roman en llibertat per a moure's per tot el material, de la mateixa manera que una molècula d'aire es pot moure a l'interior d'una habitació. El nombre d'electrons lliures depèn de cada metall en particular, malgrat que generalment varia entorn d'un electró per àtom. (Els electrons lliures també s'anomenen *electrons de conducció* o *electrons deslocalitzats*.) Un àtom que ha perdut o guanyat algun electró, és a dir, ha adquirit una càrrega neta, s'anomena **ió**. En el coure metàl·lic, els ions de coure s'agrupen regularment formant *xarxes*. Un conductor és elèctricament neutre si, per cada xarxa iònica amb càrrega positiva $+e$, hi ha un electró lliure portador de càrrega negativa $-e$. Es pot canviar la càrrega neta d'un conductor afegint-hi o extraient-ne electrons. Un conductor amb càrrega neta negativa tindrà un excés d'electrons lliures, mentre que un conductor amb càrrega neta positiva en serà deficitari.

CÀRREGA PER INDUCCIÓ

La conservació de la càrrega es pot il·lustrar mitjançant la **càrrega per inducció**, que és un mètode senzill per a carregar un conductor (es mostra en la figura 21.3). Considerem dues esferes metàl·liques descarregades que estan en contacte l'una amb l'altra. Quan apropem una barra carregada positivament a una de les esferes (figura 21.3*a*), els electrons de conducció flueixen d'una esfera a l'altra i es dirigeixen cap a la barra amb càrrega positiva. Així, doncs, la barra amb càrrega positiva de la figura 21.3*a* atreu els electrons carregats negativament, de manera que l'esfera més propera a la barra ad-

COMPROVACIÓ DE CONCEPTES 21.1

Una esfera conductora amb càrrega $+Q$ es posa en contacte amb una altra esfera conductora idèntica, però sense càrrega. *a*) Quina serà la nova càrrega de cada esfera? *b*) Mantenim les dues esferes en contacte i hi acostem una barra carregada positivament, cosa que provoca una redistribució de les càrregues de les dues esferes, de manera que l'esfera més propera a la barra queda carregada amb $-Q$. Quina càrrega tindrà l'altra esfera?

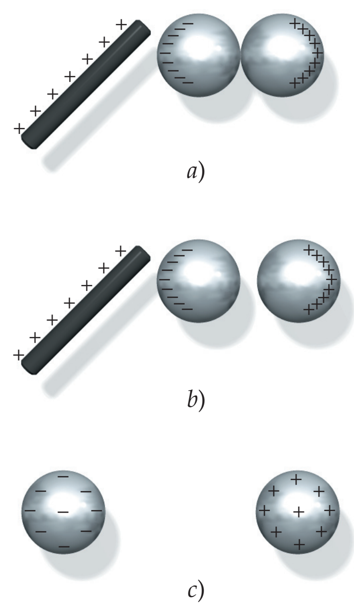


FIGURA 21.3 Càrrega per inducció. *a*) Dos conductors esfèrics neutres en contacte adquireixen càrregues oposades, ja que la barra carregada positivament atreu els electrons cap a l'esfera de l'esquerra. *b*) Si separem les esferes sense moure la barra de posició, les esferes retenen llurs càrregues iguals i oposades. *c*) En apartar la barra i separar les esferes, aquestes queden carregades uniformement.

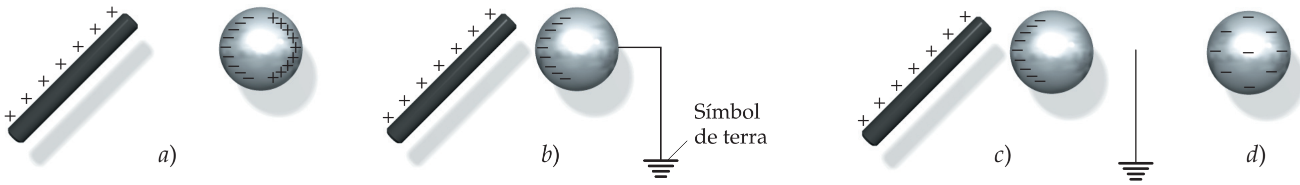


FIGURA 21.4 Inducció per connexió a terra. *a*) La càrrega lliure sobre una esfera conductora es polaritza a causa de la barra carregada positivament, ja que la barra atreu les càrregues negatives de l'esfera. *b*) Si connectem l'esfera a terra mitjançant un cable, els electrons del terra neutralitzen la càrrega positiva del cantó més allunyat de la barra i l'esfera queda carregada negativament. *c*) Si desconnectem el cable abans de separar la barra, la càrrega negativa es manté. *d*) En separar la barra, l'esfera queda amb càrrega negativa i uniforme.

quireix electrons provinents de l'esfera més llunyana. En conseqüència, l'esfera més propera a la barra queda carregada negativament, mentre que la més llunyana queda carregada amb la mateixa càrrega neta, però positiva. Un conductor que té càrregues *separades* iguals, però oposades, diem que està **polaritzat**. Si separem les esferes sense haver retirat la barra, quedaran carregades amb les mateixes quantitats, però de signe contrari (figura 21.3*b*). Si utilitzem una barra carregada negativament, obtindrem un resultat similar. En aquest cas, els electrons es transferiran des de l'esfera més propera a la barra fins a la més allunyada.

Per a molts usos, el planeta Terra es pot considerar un conductor infinitament gran i amb una càrrega lliure infinita. Quan un conductor es connecta elèctricament amb el terra, diem que està **connectat a terra**. Aquest fenomen es representa esquemàticament mitjançant un cable de connexió que acaba en unes petites línies horitzontals paral·leles, tal com indica la figura 21.4*b*. La figura 21.4 mostra que per a carregar un conductor n'hi ha prou de transferir electrons des del terra i, tot seguit, tallar la connexió a terra. (En la pràctica, una persona que estigués en contacte amb el terra i que toqués l'esfera amb les mans serviria d'exemple de demostració electrostàtica.)

COMPROVACIÓ DE CONCEPTES 21.2

Carreguem dues esferes conductores idèntiques mitjançant inducció i després les separem un bon tros. L'esfera 1 té càrrega $+Q$ i l'esfera 2, càrrega $-Q$. Suposem que hi ha una tercera esfera idèntica i inicialment descarregada. Posem en contacte les esferes 1 i 3 i, tot seguit, les separem. A continuació, posem en contacte les esferes 2 i 3 i, tot seguit, les tornem a separar. Quina és la càrrega final de cada esfera?

El parallamps d'aquest edifici està connectat a terra per a conduir els electrons des del terra fins als núvols carregats positivament i, d'aquesta manera, neutralitzar-los. (© *Grant Heilman*.)

Aquestes dames porten barrets amb cadenes metàl·liques que arrosseguen per terra, suposadament per a protegir-se dels llamps. (*Ann Roman Picture Library*.)

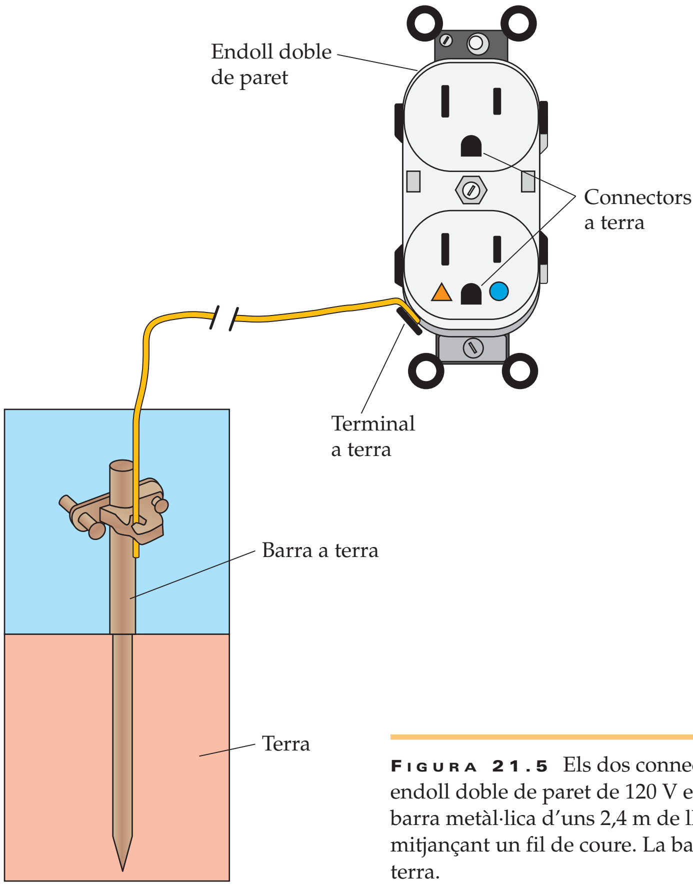
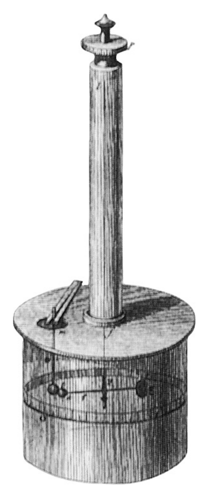


FIGURA 21.5 Els dos connectors a terra d'un endoll doble de paret de 120 V es connecten a una barra metàl·lica d'uns 2,4 m de llargària mitjançant un fil de coure. La barra es connecta a terra.

21.3 LA LLEI DE COULOMB

Charles Coulomb (1736-1806) va utilitzar la balança de torsió que ell mateix havia inventat per a estudiar la força exerceix una càrrega sobre una altra.[a] En l'experiment de Coulomb, les esferes carregades eren molt més petites que la distància entre elles, de manera que les càrregues es podien considerar puntuals. Coulomb va fer servir el mètode de càrrega per inducció per a generar esferes amb càrrega idèntica i poder variar la càrrega que tenien. Per exemple, començant amb una càrrega q_0 sobre cada esfera, podia reduir la càrrega fins a $\frac{1}{2}q_0$ connectant temporalment a terra una de les esferes per a descarregar-la i posant després les dues esferes en contacte. Els resultats dels experiments de Coulomb i d'altres científics s'enuncien en la **llei de Coulomb**:



Balança de torsió de Coulomb. (*Bundy Library, Norwalk, CT.*)

> La força que exerceix una càrrega puntual sobre una altra està dirigida al llarg de la línia que les uneix. La força varia inversament al quadrat de la distància que separa les càrregues i és proporcional a llur producte. La força és repulsiva si les càrregues tenen el mateix signe i atractiva, si tenen signes oposats.
>
> LLEI DE COULOMB

a. El dispositiu experimental de Coulomb era bàsicament el mateix que hem vist en l'experiment de Cavendish en el capítol 11, però se substitueixen les masses per petites esferes carregades. L'atracció gravitatòria de les esferes és completament negligible comparada amb l'atracció o repulsió elèctriques produïdes per les càrregues que hi ha en les esferes per fregament.

El *mòdul* de la força elèctrica exercida per una càrrega puntual q_1 sobre una altra càrrega puntual q_2 separades una distància r s'expressa

$$F = \frac{k|q_1 q_2|}{r^2} \qquad 21.2$$

LLEI DE COULOMB PER AL MÒDUL DE LA FORÇA EXERCIDA PER q_1 SOBRE q_2

en què k és una constant positiva determinada experimentalment, anomenada **constant de Coulomb**, que val

$$k = 8{,}99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \qquad 21.3$$

Si q_1 es troba en $\vec{r}_1$ i q_2 en $\vec{r}_2$ (figura 21.6), aleshores la força $\vec{F}_{12}$ que q_1 exerceix sobre q_2 és

$$\vec{F}_{12} = \frac{kq_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} \qquad 21.4$$

LLEI DE COULOMB (FORMA VECTORIAL)

en què $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ és el vector que va de q_1 a q_2 i $\hat{r}_{12} = \vec{r}_{12}/r_{12}$ és el vector unitari que va en la mateixa direcció.

D'acord amb la tercera llei de Newton, la força electrostàtica $\vec{F}_{21}$ exercida per q_2 sobre q_1 tindrà sentit contrari a la força $\vec{F}_{12}$. Fixeu-vos en la semblança entre la llei de Coulomb i la llei de Newton de la gravitació (equació 11.3). Si bé totes dues lleis depenen de la inversa del quadrat de la distància, mentre que la força gravitatòria entre dues partícules és proporcional a les masses de les partícules i és sempre atractiva, la força elèctrica és proporcional a les càrregues d'aquestes partícules i pot ser atractiva (quan les càrregues siguin de signe oposat) o repulsiva (quan les càrregues siguin del mateix signe).

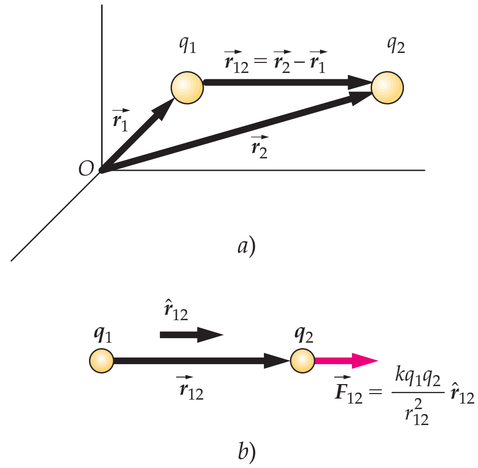


FIGURA 21.6 *a*) Càrrega q_1 situada en $\vec{r}_1$ i càrrega q_2 en $\vec{r}_2$ totes dues respecte de l'origen O. *b*) La força $\vec{F}_{12}$ exercida per q_1 sobre q_2 té la direcció i el sentit del vector $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ si les dues càrregues tenen el mateix signe, i té sentit oposat si llurs signes són oposats. El vector unitari $\hat{r}_{12} = \vec{r}_{12}/r_{12}$ té la direcció del vector que uneix la càrrega q_1 amb la càrrega q_2.

! L'equació 21.4 dóna la direcció correcta per a la força en els casos en què les dues càrregues siguin positives, negatives o de signe contrari.

Exemple 21.2 Força elèctrica en un àtom d'hidrogen

La distància mitjana que separa l'electró del protó en un àtom d'hidrogen és $5{,}3 \times 10^{-11}$ m, aproximadament. Esbrineu el mòdul de la força electrostàtica que el protó exerceix sobre l'electró.

ANÀLISI Designem q_1 la càrrega del protó i q_2, la de l'electró. A partir de la llei de Coulomb determinarem el mòdul de la força d'atracció electrostàtica entre el protó i l'electró.

RESOLUCIÓ

1r. Dibuixem l'electró i el protó i els indiquem amb els símbols corresponents (figura 21.7):

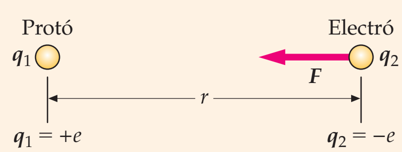


FIGURA 21.7

2n. Utilitzem la informació que coneixem i l'equació 21.2 (llei de Coulomb) per a calcular la força electrostàtica:

$$F = \frac{k|q_1 q_2|}{r^2} = \frac{ke^2}{r^2} = \frac{(8{,}99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(1{,}60 \times 10^{-19}\text{ C})^2}{(5{,}3 \times 10^{-11}\text{ m})^2}$$
$$= \boxed{8{,}2 \times 10^{-8}\text{ N}}$$

COMPROVACIÓ L'ordre de magnitud del resultat és versemblant. Si combinem les potències de deu del numerador $10^9 \times 10^{-38} = 10^{-29}$, amb la del denominador 10^{-22}, obtenim que $10^{-29}/10^{-22} = 10^{-7}$. Comparem aquest resultat amb l'obtingut: $8{,}2 \times 10^{-8} \approx 10^{-7}$.

AMPLIACIÓ Si es compara amb les interaccions macroscòpiques, aquesta força és molt petita. Tanmateix, com que la massa de l'electró és només d'uns 10^{-30} kg, aquesta força produeix una acceleració enorme, $F/m \approx 8 \times 10^{22}$ m/s^2. La massa del protó és gairebé dues mil vegades més gran que la de l'electró, de manera que l'acceleració del protó és d'uns 4×10^{19} m/s^2. Podem comparar aquestes acceleracions amb l'acceleració de la gravetat, que tan sols és 10^1 m/s^2.

EXERCICI 21.3 Col·loquem dues càrregues puntuals de 0,0500 μC cadascuna, separades una distància de 10,0 cm. Calculeu el mòdul de la força exercida per una de les càrregues sobre l'altra.

Com que tant la força elèctrica com la força gravitatòria entre dues partícules varien inversament al quadrat de llur distància de separació, la relació entre aquestes dues forces és independent d'aquesta distància. Així, doncs, podem comparar les intensitats relatives d'aquestes dues forces en partícules elementals, com ara l'electró i el protó.

Exemple 21.3 Relació entre la força elèctrica i la força gravitatòria

Determineu la relació entre la força elèctrica i la força gravitatòria exercides entre el protó i l'electró d'un àtom d'hidrogen.

ANÀLISI Utilitzarem la llei de Coulomb, prenent $q_1 = e$ i $q_2 = -e$, per a determinar la força elèctrica. I farem servir la llei de Newton de la gravitació, prenent la massa del protó $m_\mathrm{p} = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg i la massa de l'electró $m_\mathrm{e} = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg, per a determinar la força gravitatòria.

RESOLUCIÓ

1r. Expressem els mòduls de la força elèctrica F_e i de la força gravitatòria F_g en funció de les càrregues, de les masses, de la distància de separació r i de les constants elèctrica i de gravitació:

$$F_\mathrm{e} = \frac{ke^2}{r^2} \qquad F_\mathrm{g} = \frac{Gm_\mathrm{p}m_\mathrm{e}}{r^2}$$

2n. Determinem el quocient entre les dues forces. Fixeu-vos que la distància de separació r es cancel·la:

$$\frac{F_\mathrm{e}}{F_\mathrm{g}} = \frac{ke^2}{Gm_\mathrm{p}m_\mathrm{e}}$$

3r. Ho substituïm pels valors numèrics corresponents:

$$\frac{F_\mathrm{e}}{F_\mathrm{g}} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(1{,}67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg})(9{,}11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg})} = \boxed{2{,}27 \times 10^{39}}$$

COMPROVACIÓ Els coulombs es cancel·len en el numerador del tercer pas, mentre que en el denominador s'anul·len els kilograms. En conseqüència, les unitats tant del numerador com del denominador són N · m^2. Per tant, la fracció és adimensional, tal com era previsible, ja que es tracta d'un quocient entre dues forces.

AMPLIACIÓ El resultat obtingut en el tercer pas és molt gran, fet que explica per què no es tenen en compte els efectes gravitatoris quan s'estudien les interaccions atòmiques o moleculars.

La força gravitatòria és increïblement més feble que l'elèctrica i, pràcticament, no té cap paper des del punt de vista atòmic. Tot i això, constitueix la força dominant a gran escala, com ara en sistemes planetaris i estel·lars, ja que aquests elements contenen aproximadament el mateix nombre de càrregues positives que de negatives, de manera que les forces atractives i repulsives es compensen. Per tant, la força neta entre cossos astronòmics es deu essencialment a l'atracció gravitatòria.

FORÇA EXERCIDA PER UN SISTEMA DE CÀRREGUES

En un sistema de càrregues, cadascuna exerceix una força sobre les altres, descrita per l'equació 21.4. Així, la força neta sobre cada càrrega és la suma vectorial de les forces individuals efectuades sobre cada càrrega per totes les altres càrregues del sistema. Aquest resultat és una conseqüència del *principi de superposició* de forces.

Per a més informació sobre trigonometria, consulteu la Guia de matemàtiques

Exemple 21.4 Força elèctrica sobre una càrrega

Tres càrregues puntuals reposen sobre l'eix x; q_1 està situada a l'origen, q_2 és en $x = 2{,}0$ m i q_0 és en x ($x > 2{,}0$ m). *a*) Determineu la força elèctrica total sobre q_0 exercida per q_1 i q_2 si $q_1 = +25$ nC, $q_2 = -10$ nC, $q_0 = +20$ nC i $x = 3{,}5$ m. *b*) Trobeu una expressió de la força elèctrica total sobre q_0 deguda a q_1 i q_2 en la regió compresa entre $2{,}0 \text{ m} < x < \infty$.

ANÀLISI La força elèctrica total sobre q_0 és el vector suma de la força $\vec{F}_{10}$ exercida per q_1 i la força $\vec{F}_{20}$ exercida per q_2. Calcularem les forces individuals mitjançant la llei de Coulomb i el principi de superposició. Fixeu-vos que $\hat{r}_{10} = \hat{r}_{20} = \hat{i}$, ja que $\hat{r}_{10}$ i $\hat{r}_{20}$ van en la direcció $+x$.

RESOLUCIÓ

a) 1r. Dibuixem un esquema del sistema de càrregues (figura 21.8*a*). Indiquem les distàncies r_{10} i r_{20} en la gràfica:

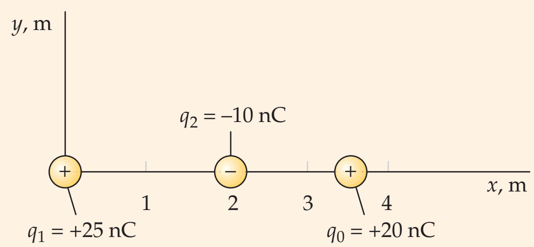


FIGURA 21.8*a*

2n. Calculem la força exercida per q_1 sobre q_0. Com que són càrregues del mateix signe, es repel·leixen. La força té la direcció $+x$:

$$F_{10} = \frac{k|q_1 q_0|}{r_{10}^2}$$

$$\vec{F}_{10} = +F_{10}\hat{i} = +\frac{k|q_1 q_0|}{r_{10}^2}\hat{i} = \frac{(8{,}99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(25 \times 10^{-9} \text{ C})(20 \times 10^{-9} \text{ C})}{(3{,}5 \text{ m})^2}\hat{i}$$

$$= (0{,}37 \times 10^{-6} \text{ N})\hat{i}$$

3r. Determinem la força exercida per q_2 sobre q_0. Com que són càrregues de signe oposat, s'atreuen. La força té la direcció $-x$:

$$F_{20} = \frac{k|q_2 q_0|}{r_{20}^2}$$

$$\vec{F}_{20} = -F_{20}\hat{i} = -\frac{k|q_2 q_0|}{r_{20}^2}\hat{i} = -\frac{(8{,}99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(10 \times 10^{-9} \text{ C})(20 \times 10^{-9} \text{ C})}{(1{,}5 \text{ m})^2}\hat{i}$$

$$= -(0{,}80 \times 10^{-6} \text{ N})\hat{i}$$

4t. Sumem els resultats i obtenim la força neta:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} = \boxed{-(0{,}43 \times 10^{-6} \text{ N})\hat{i}}$$

b) 1r. Dibuixem un esquema del sistema de càrregues i hi indiquem les distàncies r_{10} i r_{20} (figura 21.8*b*):

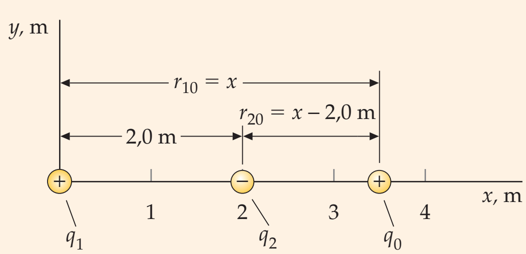


FIGURA 21.8*b*

2n. Obtenim una expressió per a la força sobre q_0 deguda a q_1:

$$\vec{F}_{10} = \frac{k|q_1 q_0|}{x^2}\hat{i}$$

3r. Obtenim una expressió per a la força sobre q_0 deguda a q_2:

$$\vec{F}_{20} = -\frac{k|q_2 q_0|}{(x - 2{,}0\ \text{m})^2}\hat{i}$$

4t. Sumem els resultats i obtenim una expressió per a la força neta:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} = \left(\frac{k|q_1 q_0|}{x^2} - \frac{k|q_2 q_0|}{(x - 2{,}0\ \text{m})^2}\right)\hat{i}$$

COMPROVACIÓ En els passos segon, tercer i quart de l'apartat *b*, les dues forces tendeixen a zero quan $x \to \infty$, tal com era previsible. També, tal com podíem esperar, el mòdul de la força del tercer pas tendeix a infinit quan $x \to 2{,}0$ m.

AMPLIACIÓ Com que la càrrega q_2 està situada entre les càrregues q_1 i q_0, podríem pensar que la presència de q_2 pot afectar la força $\vec{F}_{10}$ que exerceix q_1 sobre q_0. Tanmateix, no és el cas i la presència de q_2 no influeix sobre la força $\vec{F}_{10}$ que q_1 exerceix sobre q_0. (Aquest fet s'anomena *principi de superposició*.) La figura 21.9 mostra el component *x* de la força sobre q_0 en funció de la posició *x* en la regió $2{,}0\ \text{m} < x < \infty$. En punts propers a q_2, la força deguda a q_2 és dominant i, com que les càrregues oposades s'atreuen, la força sobre q_2 va dirigida en el sentit negatiu de les *x*. Per a $x >> 2{,}0$ m, la força va dirigida en el sentit positiu de les *x*, ja que la distància entre q_1 i q_2 és tan petita que podem considerar que la força deguda a les dues càrregues és gairebé la mateixa que la que efectua una única càrrega de +15 nC.

EXERCICI 21.4 Si q_0 està situada en $x = 1{,}0$ m, determineu la força elèctrica total exercida sobre q_0.

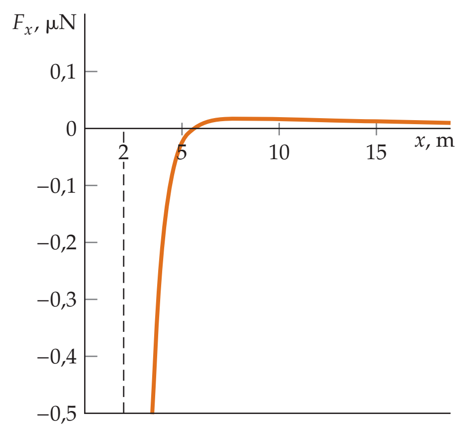


FIGURA 21.9

Perquè un sistema de càrregues sigui estacionari hi ha d'haver altres forces no elèctriques que actuïn sobre les càrregues, de manera que la força neta sobre cada càrrega sigui zero. En l'exemple anterior i en els que vénen a continuació, suposarem que aquestes forces hi són presents, de manera que totes les càrregues romanguin estacionàries.

Exemple 21.5 Força neta en dues dimensions

Una càrrega $q_1 = +25$ nC està situada a l'origen; una càrrega $q_2 = -15$ nC és sobre l'eix *x*, en $x = 2{,}0$ m, i una càrrega $q_0 = +20$ nC és en el punt $x = 2{,}0$ m, $y = 2{,}0$ m, tal com s'indica en la figura 21.10. Determineu el mòdul i la direcció de la força elèctrica resultant sobre q_0.

ANÀLISI La força elèctrica resultant és la suma vectorial de les forces individuals exercides per cadascuna de les càrregues sobre q_0. Calculem cadascuna de les forces a partir de la llei de Coulomb i l'expressem en funció de llurs components rectangulars.

RESOLUCIÓ

1r. Dibuixem les posicions de les tres càrregues en uns eixos de coordenades. Indiquem la força elèctrica resultant $\vec{F}$ sobre la càrrega q_0 com el vector suma de les forces $\vec{F}_{10}$ deguda a q_1 i $\vec{F}_{20}$ deguda a q_2 (figura 21.10*a*):

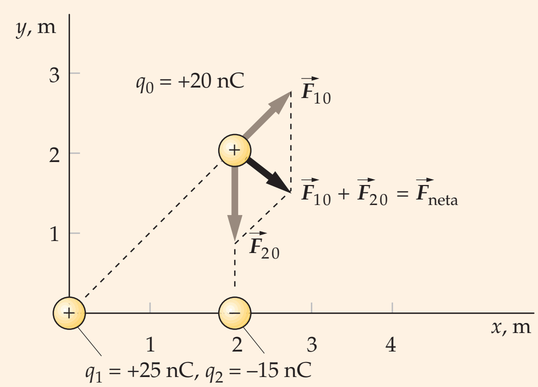


FIGURA 21.10*a*

2n. La força resultant $\vec{F}$ sobre q_0 és la suma de les forces individuals:

$$\vec{F} = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20}$$

per tant, $\Sigma F_x = F_{10x} + F_{20x}$ i $\Sigma F_y = F_{10y} + F_{20y}$

3r. La força $\vec{F}_{10}$ està dirigida al llarg de la recta que va de q_1 a q_0. Prenem $r_{10} = 2{,}0\sqrt{2}$ m com la distància entre q_1 i q_0, i calculem el mòdul de la força:

$$F_{10} = \frac{k|q_1 q_0|}{r_{10}^2} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(25 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})(20 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})}{(2{,}0\sqrt{2}\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 5{,}62 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}$$

4t. Com que $\vec{F}_{10}$ forma un angle de 45° amb els eixos x i y, els components x i y són iguals:

$$F_{10x} = F_{10y} = F_{10} \cos 45° = (5{,}62 \times 10^{-7}\mathrm{N}) \cos 45°$$
$$= 3{,}97 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}$$

5è. La força $\vec{F}_{20}$ exercida per q_2 sobre q_0 és atractiva i va en la direcció $-y$, tal com es mostra en la figura 21.10*a*:

$$\vec{F}_{20} = -\frac{k|q_2 q_0|}{r_{20}^2}\hat{j} = -\frac{(8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(15 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})(20 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})}{(2{,}0\ \mathrm{m})^2}\hat{j}$$
$$= -(6{,}74 \times 10^{-7}\mathrm{N})\hat{j}$$

6è. Calculem els components de la força resultant:

$$F_x = F_{10x} + F_{20x} = (3{,}97 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}) + 0 = 3{,}97 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}$$
$$F_y = F_{10y} + F_{20y} = (3{,}97 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}) + (-6{,}74 \times 10^{-7}\ \mathrm{N})$$
$$F_y = -2{,}77 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}$$

7è. Dibuixem la força resultant (figura 21.10*b*) i els seus dos components:

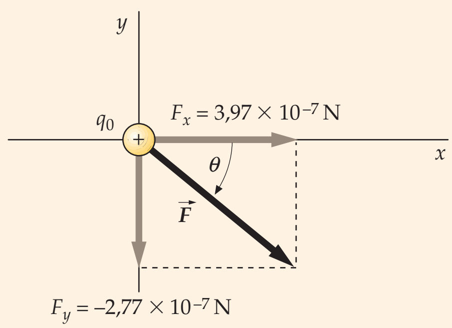


FIGURA 21.10*b*

8è. Obtenim el mòdul de la força resultant a partir dels seus components:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(3{,}97 \times 10^{-7}\ \mathrm{N})^2 + (-2{,}77 \times 10^{-7}\ \mathrm{N})^2}$$
$$= 4{,}84 \times 10^{-7}\ \mathrm{N} = \boxed{4{,}8 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}}$$

9è. La força resultant apunta cap avall a la dreta, tal com s'aprecia en la figura 21.10*b*. L'angle θ que forma amb l'eix x es defineix:

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{-2{,}77}{3{,}97} = -0{,}698$$
$$\theta = \tan^{-1}(-0{,}698) = -34{,}9° = \boxed{-35°}$$

COMPROVACIÓ Caldria esperar que els mòduls de les dues forces fossin aproximadament iguals, ja que encara que q_1 és una mica més gran que $|q_2|$, q_2 és més a prop de q_0 que q_1. Si comparem els resultats dels passos tercer i cinquè, observem que concorden amb aquesta apreciació.

EXERCICI 21.5 Expresseu $\hat{r}_{10}$ de l'exemple 21.5 en termes dels vectors unitaris $\hat{i}$ i $\hat{j}$.

EXERCICI 21.6 Prenent x_{10} com el component x de $\hat{r}_{10}$ en l'exemple 21.5, és el component x de la força $\vec{F}_{10} = (kq_1q_0/r_{10}^2)\hat{r}_{10}$ igual a kq_1q_0/x_{10}^2?

21.4 EL CAMP ELÈCTRIC

La força elèctrica que exerceix una càrrega sobre una altra és un exemple de força d'acció a distància, semblant a la força gravitatòria que efectua una massa sobre una altra. La idea de l'acció a distància presenta un problema conceptual difícil. Quin és el mecanisme mitjançant el qual una partícula pot exercir una força sobre una altra per l'espai buit que hi ha entre les partícules? D'altra banda, suposem que una partícula carregada situada en un punt determinat es mou de sobte. Variarà aleshores instantàniament la força sobre una altra partícula situada a una distància r de la primera? Per a evitar el problema de l'acció a distància, s'introdueix el concepte de **camp elèctric**. Una càrrega crea un camp elèctric $\vec{E}$ en tot l'espai i aquest camp exerceix una força sobre la segona càrrega. Així, doncs, la força és exercida pel *camp* $\vec{E}$ en la posició de la segona càrrega, no pas per la primera càrrega directament (que és a una certa distància). Els canvis en el camp es propaguen per l'espai a la velocitat de la llum, c. En conseqüència, si movem una càrrega sobtadament, la força que exerceix sobre una altra càrrega situada a una distància r no es modificarà fins que no hagi transcorregut un temps r/c.

La figura 21.11*a* mostra una sèrie de càrregues puntuals q_1, q_2 i q_3 disposades arbitràriament en l'espai. Aquestes càrregues generen un camp elèctric $\vec{E}$ en tots els punts de l'espai. Si situem una petita càrrega de prova q_0 en algun punt proper a aquest sistema de tres càrregues, una força actuarà sobre q_0 a causa de les altres càrregues. La força resultant exercida sobre q_0 serà la suma vectorial de les forces individuals efectuades sobre q_0 per cadascuna de les altres càrregues del sistema. Com que cadascuna d'aquestes forces és proporcional a q_0, la força neta també serà proporcional a q_0. El camp elèctric $\vec{E}$ en un punt equival a aquesta força dividida entre q_0:[a]

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \qquad (q_0 \text{ és petita}) \tag{21.5}$$

DEFINICIÓ: CAMP ELÈCTRIC

La unitat del camp elèctric en l'SI és el newton per coulomb (N/C). A més, la càrrega de prova q_0 exercirà una força sobre cadascuna de les altres càrregues puntuals (figura 21.11*b*). Aquestes forces podrien provocar el moviment d'algunes de les càrregues. Per a evitar-ho, cal que la càrrega q_0 sigui prou petita per a poder considerar negligibles les forces sobre les altres càrregues. Així, el camp elèctric en la posició en què es troba la càrrega q_0 es defineix mitjançant l'equació 21.5, sempre que la càrrega q_0 tendeixi a zero. La taula 21.2 recull les magnituds d'alguns camps elèctrics que podem trobar en la natura.

El camp elèctric descriu la condició en l'espai creada pel sistema de càrregues puntuals. Si desplacem la càrrega de prova q_0 d'un punt a un altre, podem trobar $\vec{E}$ en tots els punts de l'espai (llevat de l'ocupat per la càrrega q). El camp elèctric $\vec{E}$ és, per tant, una funció vectorial de la posició. La força exercida sobre una càrrega de prova q_0 en un punt qualsevol està relacionada amb el camp elèctric en el punt en qüestió per

$$\vec{F} = q_0\vec{E} \tag{21.6}$$

EXERCICI 21.7

Quan col·loquem una càrrega de prova de 5,0 nC en un punt determinat, se sotmet a l'acció d'una força de $2{,}0 \times 10^{-4}$ N en la direcció creixent de x. Quin és el camp elèctric $\vec{E}$ en aquest punt?

EXERCICI 21.8

Quina força actua sobre un electró situat en un punt en què el camp elèctric és $\vec{E} = (4{,}0 \times 10^4\ \text{N/C})\hat{\imath}$?

El camp elèctric degut a una sola càrrega puntual es pot calcular a partir de la llei de Coulomb. Si situem una petita càrrega de prova positiva q_0 en un punt P situat a una distància r_{iP} de la càrrega q_i, la força que actua sobre q_0 és

$$\vec{F}_{i0} = \frac{kq_iq_0}{r_{iP}^2}\hat{r}_{iP}$$

a. Aquesta definició és anàloga a la del camp gravitatori terrestre definit com la força per unitat de massa que la Terra exerceix sobre un cos, com es recull en el capítol 4 (secció 3).

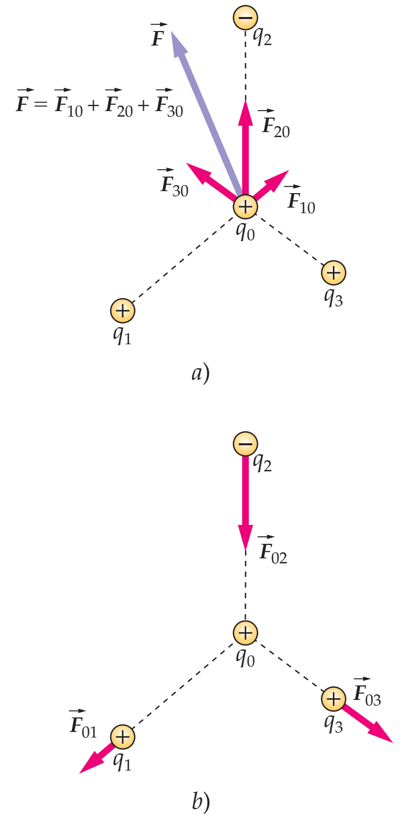


FIGURA 21.11 *a*) Una petita càrrega de prova q_0 situada prop d'un sistema de càrregues q_1, q_2, q_3, … experimenta una força elèctrica neta $\vec{F}$ proporcional a q_0. La relació $\vec{F}/q_0$ és el camp elèctric en aquest punt. *b*) La càrrega de prova q_0 també exerceix una força sobre cadascuna de les altres càrregues que l'envolten, sempre proporcional a q_0.

TAULA 21.2 Diversos camps elèctrics en la natura

	E, N/C
En cables domèstics	10^{-2}
En ones de ràdio	10^{-1}
En l'atmosfera	10^2
En la llum solar	10^3
Sota un núvol de tempesta	10^4
En la descàrrega d'un llamp	10^4
En un tub de raigs X	10^6
En l'electró d'un àtom d'hidrogen	6×10^{11}
En la superfície d'un nucli d'urani	2×10^{21}

El camp elèctric en el punt P degut a la càrrega q_i (figura 21.12) és, per tant,

$$\vec{E}_{iP} = \frac{kq_i}{r_{iP}^2}\hat{r}_{iP} \tag{21.7}$$

LLEI DE COULOMB PER A $\vec{E}$

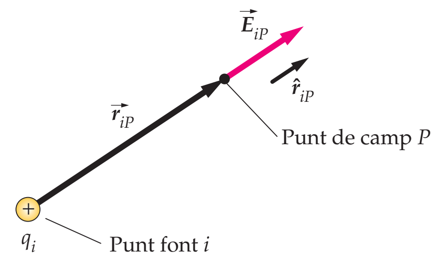


FIGURA 21.12 Camp elèctric $\vec{E}$ en un punt de camp P degut a la càrrega q_i col·locada en un punt font i.

en què $\hat{r}_{iP}$ és el vector unitari que apunta des del **punt font** i fins al **punt de camp** P.

El camp elèctric resultant en P degut a una distribució de càrregues puntuals es determina sumant els camps originats per cada càrrega de manera separada:

$$\vec{E}_P = \sum_i \vec{E}_{iP} \tag{21.8}$$

CAMP ELÈCTRIC $\vec{E}$ DEGUT A UN SISTEMA DE CÀRREGUES PUNTUALS

És a dir, el camp elèctric compleix el principi de superposició.

! Encara que l'expressió del camp elèctric (equació 21.7) depèn de la posició del punt P, el camp *no* depèn de la càrrega de prova q_0. Per això q_0 no apareix en l'equació 21.7.

ESTRATÈGIA DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

Càlcul del camp elèctric resultant

ANÀLISI Per a calcular el camp elèctric resultant $\vec{E}_P$ en un punt de camp P degut a una distribució determinada de càrregues puntuals, cal dibuixar la configuració de càrregues i el punt de camp en uns eixos de coordenades.

RESOLUCIÓ

1r. Definiu r_{iP} com la distància de cada càrrega al punt P. Afegiu el camp $\vec{E}_{iP}$ en P degut a cada càrrega puntual.

2n. Si el punt P no està alineat amb totes les càrregues puntuals, cal assenyalar els angles entre cada vector de camp elèctric $\vec{E}_{iP}$ i algun dels eixos de coordenades.

3r. Determineu els tres components de cada vector de camp $\vec{E}_{iP}$ i calculeu els components del camp elèctric resultant $\vec{E}_P$.

Exemple 21.6 Direcció del camp elèctric *Conceptes*

Col·loquem una càrrega puntual positiva $q_1 = +q$ en un punt de l'eix x, en $x = a$, i una càrrega puntual negativa $q_2 = -2q$ en $x = -a$, tal com s'il·lustra en la figura 21.13. Dividim l'eix x en tres regions: regió I ($x < -a$), regió II ($-a < x < +a$) i regió III ($x > a$). Hi ha cap punt en alguna d'aquestes regions en què el camp elèctric resultant sigui zero? En cas afirmatiu, en quina o quines regions?

ANÀLISI Suposem que $\vec{E}_1$ i $\vec{E}_2$ són els camps elèctrics generats per q_1 i q_2, respectivament. Com que q_1 és positiva, $\vec{E}_1$ apuntarà lluny de la càrrega q_1, i, com que q_2 és negativa, $\vec{E}_2$ apuntarà cap a q_2. El camp elèctric resultant $\vec{E}$ serà la suma vectorial dels dos camps ($\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$). Per tant, serà zero quan els dos camps $\vec{E}_1$ i $\vec{E}_2$ tinguin el mateix mòdul, però sentits oposats; a més a més, a mesura que ens acostem a les càrregues, els camps corresponents tendeixen a infinit. En canvi, en punts molt allunyats de les càrregues, i sempre sobre l'eix x, el camp elèctric resultant s'aproxima a l'exercit per una càrrega equivalent a la suma de les dues càrregues $q_1 + q_2$ i situada en el punt mitjà de les dues càrregues, cosa que dóna lloc a un camp degut a una càrrega puntual negativa, ja que $q_1 + q_2$ té una càrrega neta negativa.

RESOLUCIÓ

1r. Fem un esquema en què apareguin les dues càrregues, l'eix x i els camps elèctrics deguts a cada càrrega en un punt sobre l'eix x i en cadascuna de les regions, I, II i III. Designeu aquests punts P_{I}, P_{II} i P_{III}, respectivament (figura 21.13):

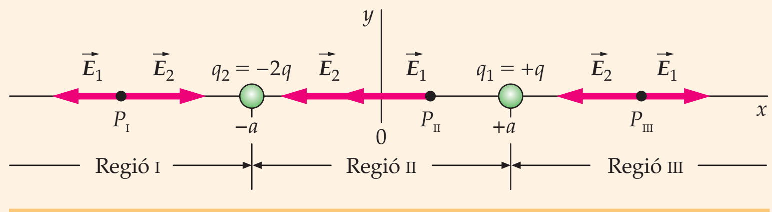


FIGURA 21.13

2n. Analitzem en quins punts de la regió I, els dos camps elèctrics poden tenir el mateix mòdul, però sentit contrari:

En tots els punts de la regió I, els dos camps elèctrics tenen sentits oposats. Tanmateix, el mòdul E_2 és més gran que E_1 en cada punt de la regió per dues raons: qualsevol punt de la regió serà més a prop de q_2 que de q_1, i, a més, $q_2 = -2q$ és més gran que $q_1 = +q$ en valor absolut. En conseqüència, en aquesta regió no hi ha cap punt en què el camp elèctric s'anul·li.

3r. Comprovem en quins punts de la regió II, els dos camps elèctrics poden tenir el mateix mòdul, però sentit contrari:

En la regió II, els dos camps elèctrics tenen el mateix sentit i, per tant, no hi ha cap punt en què el camp elèctric sigui nul.

4t. Analitzem en quins punts de la regió III, els dos camps elèctrics poden tenir el mateix mòdul, però sentit contrari:

En la regió III, els dos camps elèctrics tenen sentits oposats. En punts propers a $x = a$, E_1 és més gran que E_2 (perquè en punts propers a una càrrega puntual, E tendeix a infinit). En canvi, en punts en què $x \gg a$, E_2 és més gran que E_1 (perquè a distàncies grans de les dues càrregues, el sentit del camp és determinat pel signe de $q_1 + q_2$). Així, en algun punt de la regió III, E_1 serà igual a E_2 i, per tant, el camp elèctric net serà zero.

COMPROVACIÓ El camp elèctric resultant és zero en un punt de la regió III. Aquesta anul·lació es produeix perquè la càrrega de mòdul més gran q_2 és la que està més allunyada de tots els punts de la regió i perquè $\vec{E}_1$ i $\vec{E}_2$ van en sentits contraris. El resultat coincideix amb el que podíem esperar.

Exemple 21.7 El camp elèctric sobre la recta que uneix dues càrregues puntuals positives

Una càrrega puntual positiva $q_1 = +8{,}0$ nC està situada sobre l'eix x, en $x = x_1 = -1{,}0$ m, i una segona càrrega puntual positiva $q_2 = +12$ nC és sobre l'eix x, en $x = x_2 = 3{,}0$ m. Determineu el camp elèctric net *a*) en el punt A sobre l'eix x de manera que $x = 6{,}0$ m i *b*) en el punt B sobre l'eix x de manera que $x = 2{,}0$ m.

ANÀLISI Suposem que $\vec{E}_1$ i $\vec{E}_2$ són els camps elèctrics creats per q_1 i q_2, respectivament. El sentit dels dos camps $\vec{E}_1$ i $\vec{E}_2$ s'allunya de les càrregues q_1 i q_2, ja que totes dues són positives. Calcularem el camp resultant utilitzant $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

RESOLUCIÓ

a) 1r. Dibuixem la configuracuió de càrregues i situem el punt A sobre l'eix x en el lloc adequat. Dibuixem els vectors que representen el camp elèctric en A degut a cada càrrega puntual. Procedim de manera anàloga en el cas del punt B (figura 21.14):

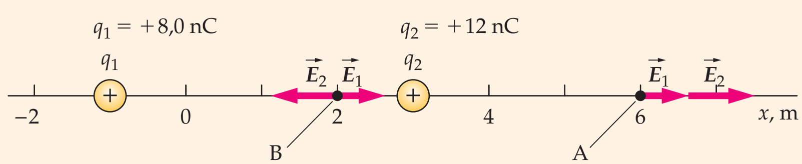


FIGURA 21.14 Com que q_1 i q_2 són càrregues positives, $\vec{E}_1$ i $\vec{E}_2$ apunten allunyant-se de les càrregues respectives, tant en A com en B.

2n. Calculem $\vec{E}$ en el punt A, utilitzant $r_{1\text{A}} = |x_{\text{A}} - x_1| = 6{,}0\text{ m} - (-1{,}0\text{ m}) = 7{,}0$ m i $r_{2\text{A}} = |x_{\text{A}} - x_2| = 6{,}0\text{ m} - (3{,}0\text{ m}) = 3{,}0$ m:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{kq_1}{r_{1\text{A}}^2}\hat{r}_{1\text{A}} + \frac{kq_2}{r_{2\text{A}}^2}\hat{r}_{2\text{A}} = \frac{kq_1}{(x_{\text{A}} - x_1)^2}\hat{i} + \frac{kq_2}{(x_{\text{A}} - x_2)^2}\hat{i}$$

$$= \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(8{,}0 \times 10^{-9}\ \text{C})}{(7{,}0\ \text{m})^2}\hat{i} + \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(12 \times 10^{-9}\ \text{C})}{(3{,}0\ \text{m})^2}\hat{i}$$

$$= (1{,}47\ \text{N/C})\hat{i} + (12{,}0\ \text{N/C})\hat{i} = \boxed{(13\ \text{N/C})\hat{i}}$$

b) Calculem $\vec{E}$ en el punt B, en què $r_{1B} = |x_B - x_1| = 2{,}0\text{ m} - (-1{,}0\text{ m}) = 3{,}0\text{ m}$ i $r_{2B} = |x_B - x_2| = |2{,}0\text{ m} - (3{,}0\text{ m})| = 1{,}0\text{ m}$:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{kq_1}{r_{1B}^2}\hat{r}_{1B} + \frac{kq_2}{r_{2B}^2}\hat{r}_{2B} = \frac{kq_1}{(x_B - x_1)^2}\hat{i} + \frac{kq_2}{(x_B - x_2)^2}(-\hat{i})$$

$$= \frac{(8{,}99 \times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(8{,}0 \times 10^{-9}\text{ C})}{(3{,}0\text{ m})^2}\hat{i} - \frac{(8{,}99 \times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(12 \times 10^{-9}\text{ C})}{(1{,}0\text{ m})^2}\hat{i}$$

$$= (7{,}99\text{ N/C})\hat{i} - (108\text{ N/C})\hat{i} = \boxed{-(100\text{ N/C})\hat{i}}$$

COMPROVACIÓ El camp en l'apartat *b* és gran i va en la direcció negativa de les x, cosa que era previsible, ja que B és més a prop de la càrrega q_2 que de la càrrega q_1, i q_2 (+12 nC) és la càrrega més gran.

AMPLIACIÓ El camp elèctric $\vec{E}_1$ predomina en el camp elèctric resultant en els punts propers a $q_1 = +8{,}0$ nC. Hi ha un punt entre q_1 i q_2 en què el camp elèctric total s'anul·la. Una càrrega de prova situada en aquest punt no experimentarà cap força elèctrica. En la figura 21.15 es representa E_x en funció de x per a aquesta configuració de càrregues.

EXERCICI 21.9 A partir de les dades de l'exemple 21.7, trobeu el punt de l'eix x en què el camp elèctric és igual a zero.

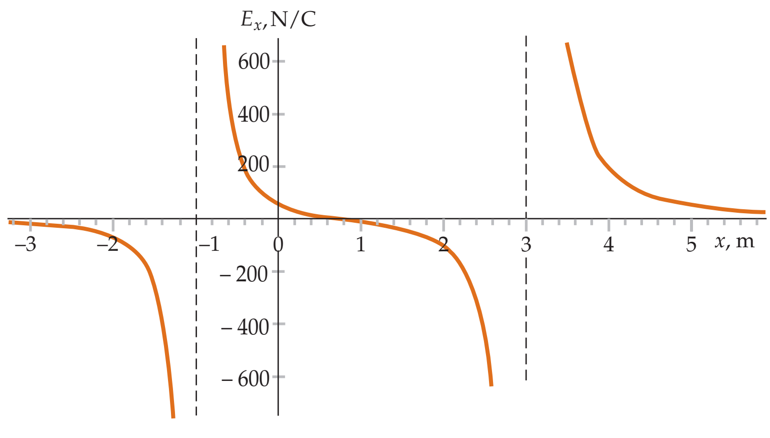


FIGURA 21.15

Exemple 21.8 El camp elèctric degut a càrregues puntuals situades en l'eix x

Intenteu-ho!

Una càrrega puntual $q_1 = +8{,}0$ nC és situada a l'origen i una segona càrrega puntual $q_2 = +12{,}0$ nC es troba en $x = 4{,}0$ m. Determineu el camp elèctric en $y = 3{,}0$ m.

ANÀLISI Igual que en l'exemple 21.7, $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. En punts de l'eix y, el camp elèctric $\vec{E}_1$ degut a la càrrega q_1 té la direcció de l'eix y, i $\vec{E}_2$ degut a q_2 és en el segon quadrant. Per trobar el camp resultant $\vec{E}$, hem de buscarne primerament els components x i y.

RESOLUCIÓ

Abans de mirar la resposta, tapeu la columna de la dreta i intenteu resoldre el problema tots sols.

Passos

1r. Representeu les dues càrregues i el punt de camp en uns eixos de coordenades. Indiqueu el camp elèctric degut a cada càrrega sobre el punt de camp i, també, els angles i les distàncies pertinents (figura 21.16*a*).

Respostes

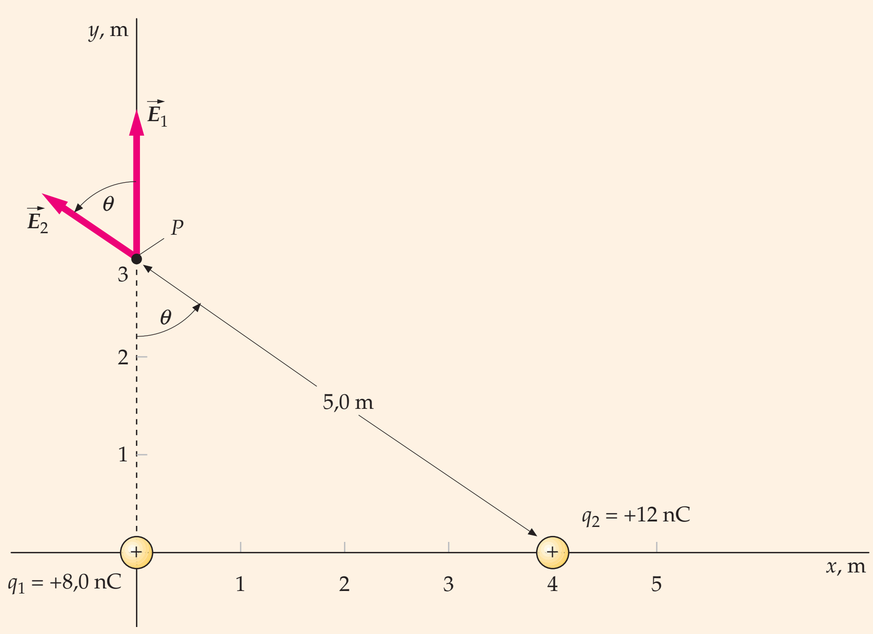


FIGURA 21.16*a*

2n. Calculeu el mòdul del camp $\vec{E}_1$ degut a q_1 en el punt (0, 3,0 m). Trobeu els components x i y del camp.
$E_1 = kq_1/y^2 = 7{,}99$ N/C
$E_{1x} = 0$, $E_{1y} = E_1 = 7{,}99$ N/C

3r. Calculeu el mòdul del camp $\vec{E}_2$ degut a q_2 en el punt (0, y).
$E_2 = 4{,}32$ N/C

4t. Expresseu els components x i y de $\vec{E}_2$ en funció de l'angle θ.
$E_{2x} = -E_2 \sin\theta$; $E_{2y} = E_2 \cos\theta$

5è. Calculeu el $\sin\theta$ i el $\cos\theta$.
$\sin\theta = 0{,}80$; $\cos\theta = 0{,}60$

6è. Calculeu E_{2x} i E_{2y}.
$E_{2x} = -3{,}46$ N/C; $E_{2y} = 2{,}59$ N/C

7è. Dibuixeu els components del camp resultant. Incloeu en l'esquema tant el vector $\vec{E}$ com l'angle que $\vec{E}$ forma amb l'eix x (figura 21.16*b*).

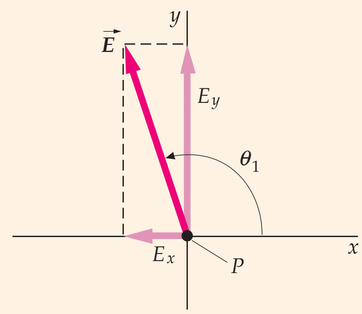


FIGURA 21.16*b*

8è. Trobeu els components x i y del camp resultant $\vec{E}$.
$E_x = E_{1x} + E_{2x} = -3{,}46$ N/C
$E_y = E_{1y} + E_{2y} = 10{,}6$ N/C

9è. Calculeu el mòdul de $\vec{E}$ a partir dels components seus.
$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 11{,}2 \text{ N/C} = \boxed{11 \text{ N/C}}$

10è. Determineu l'angle θ_1 que formen $\vec{E}$ i l'eix x.
$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{E_y}{E_x}\right) = \boxed{108°}$

COMPROVACIÓ Tal com podíem esperar, el mòdul E és més gran que E_1 i E_2, però més petit que la suma $E_1 + E_2$, la qual cosa és lògica, ja que l'angle entre $\vec{E}_1$ i $\vec{E}_2$ és inferior a 90°.

Exemple 21.9 El camp elèctric degut a dues càrregues iguals, però de signe contrari

Una càrrega $+q$ reposa en $x = a$ i una segona càrrega $-q$, en $x = -a$ (figura 21.17). *a*) Determineu el camp elèctric sobre l'eix x en un punt arbitrari de manera que $x > a$. *b*) Trobeu el camp elèctric en el límit de manera que $x \gg a$.

ANÀLISI Calcularem el camp elèctric en el punt P fent ús del principi de superposició, $\vec{E}_P = \vec{E}_{1P} + \vec{E}_{2P}$. Per a $x > a$, el camp elèctric $\vec{E}_+$ degut a la càrrega positiva va en la direcció positiva de les x, mentre que el camp elèctric $\vec{E}_-$ degut a la càrrega negativa va en la direcció negativa de les x. La distància del punt P a la càrrega positiva és $x - a$, i a la càrrega negativa és $x - (-a) = x + a$.

RESOLUCIÓ

a) 1r. Dibuixem la configuració de càrregues sobre uns eixos de coordenades i hi assenyalem les distàncies entre cada càrrega i el punt de camp (figura 21.17):

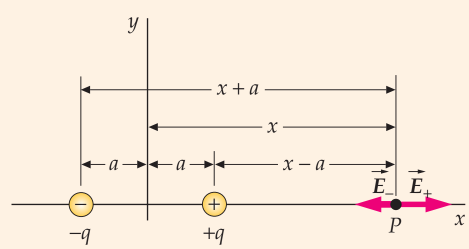


FIGURA 21.17

2n. Calculem el camp $\vec{E}$ degut a les dues càrregues per a $x > a$: (NOTA: L'equació de la dreta només és vàlida quan $x > a$.)

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{kq}{[x-a]^2}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{kq}{[x-(-a)]^2}\left(-\hat{\boldsymbol{i}}\right)$$
$$= kq\left[\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2}\right]\hat{\boldsymbol{i}}$$

3r. Traiem denominador comú dels termes entre claudàtors i ho simplifiquem:

$$\vec{E} = kq\left[\frac{(x+a)^2-(x-a)^2}{(x+a)^2(x-a)^2}\right]\hat{\boldsymbol{i}} = \boxed{kq\frac{4ax}{(x^2-a^2)^2}\hat{\boldsymbol{i}} \qquad x > a}$$

b) En el límit $x \gg a$, podem negligir el terme a^2 comparat amb x^2 del denominador:

$$\vec{E} = kq\frac{4ax}{(x^2-a^2)^2}\hat{\boldsymbol{i}} \approx kq\frac{4ax}{x^4}\hat{\boldsymbol{i}} = \boxed{\frac{4kqa}{x^3}\hat{\boldsymbol{i}} \qquad x \gg a}$$

COMPROVACIÓ Els dos resultats enquadrats tendeixen a zero quan x tendeix a infinit, tal com podíem esperar.

AMPLIACIÓ La figura 21.18 representa E_x en funció de x per a qualsevol valor x, prenent $q = 1{,}0$ nC i $a = 1{,}0$ m. En punts allunyats de les càrregues, de manera que $|x| \gg a$, el camp s'obté de

$$\vec{E} = \frac{4kqa}{|x|^3}\hat{\boldsymbol{i}} \qquad |x| \gg a$$

Entre les càrregues, la contribució de cadascuna va en la direcció negativa. Podem expressar $\vec{E}$ de la manera següent:

$$\vec{E} = \frac{kq}{(x-a)^2}\hat{\boldsymbol{e}}_+ + \frac{k(-q)}{(x+a)^2}\hat{\boldsymbol{e}}_- \qquad -a < x < a$$

en què el vector unitari $\hat{\boldsymbol{e}}_+$ va en el sentit de les x positives per a x més grans que a, i el vector $\hat{\boldsymbol{e}}_-$, en el de les x negatives per a x més petites que $-a$. (Fixeu-vos que $\hat{\boldsymbol{e}}_+ = \frac{x-a}{|x-a|}\hat{\boldsymbol{i}}$ i $\hat{\boldsymbol{e}}_- = \frac{x+a}{|x+a|}\hat{\boldsymbol{i}}$).

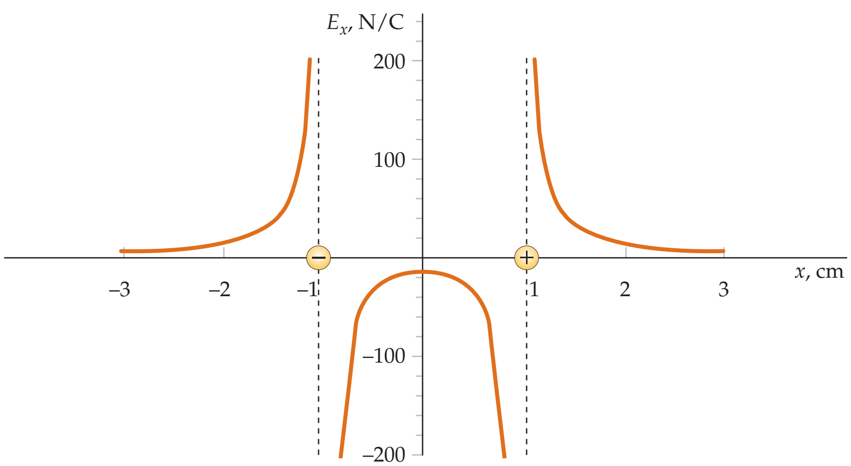


FIGURA 21.18 Representació gràfica de E_x en funció de x per a la distribució de càrregues de l'exemple 21.9.

DIPOLS ELÈCTRICS

Un sistema de dues càrregues iguals i oposades q separades una petita distància L s'anomena **dipol**. La seva intensitat i orientació són descrites pel **moment dipolar elèctric**, $\vec{p}$, un vector que apunta de la càrrega negativa $-q$ cap a la càrrega positiva $+q$ i el mòdul del qual és el producte $q\vec{L}$ (figura 21.19):

$$\vec{p} = q\vec{L} \qquad 21.9$$

DEFINICIÓ: MOMENT DIPOLAR ELÈCTRIC

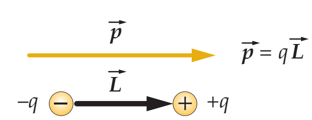


FIGURA 21.19 Un dipol elèctric és un sistema de dues càrregues iguals i oposades. El moment dipolar és $\vec{p} = q\vec{L}$, en què q és el valor absolut de cada càrrega i $\vec{L}$ és el vector de posició que va de la càrrega negativa a la càrrega positiva.

en què $\vec{L}$ és el vector que va des de la càrrega negativa fins a la càrrega positiva.

Per a la configuració de càrregues de la figura 21.17, $\vec{L} = 2a\hat{\boldsymbol{i}}$ i el moment dipolar és

$$\vec{p} = 2aq\hat{\boldsymbol{i}}$$

En funció del moment dipolar $\vec{p}$, el camp elèctric sobre l'eix del dipol en un punt allunyat $|x|$ va en la mateixa direcció i sentit que $\vec{p}$ i té per mòdul

$$E = \frac{2kp}{|x|^3} \tag{21.10}$$

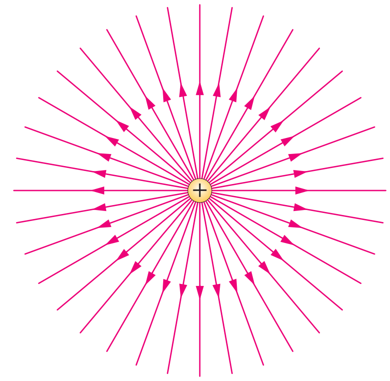
(vegeu l'exemple 21.9). En un punt allunyat d'un dipol en qualsevol direcció, el mòdul del camp elèctric és proporcional al mòdul del moment dipolar i disminueix amb el cub de la distància. En els sistemes amb càrrega neta diferent de zero i en punts situats a distàncies grans, el camp elèctric disminueix a raó d'$1/r^2$. En els sistemes amb càrrega neta nul·la, el camp elèctric disminueix més ràpidament amb la distància. En el cas d'un dipol elèctric, el camp minva a raó d'$1/r^3$ en totes les direccions.

21.5 LÍNIES DE CAMP ELÈCTRIC

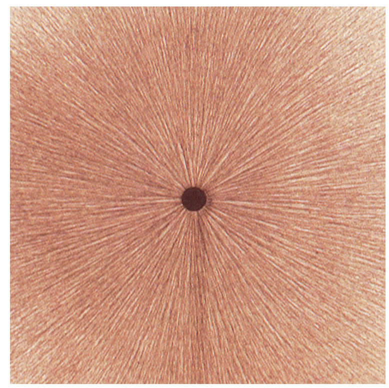
Podem representar el camp elèctric dibuixant les línies que n'indiquen la direcció i el mòdul, anomenades **línies de camp elèctric** (o **línies de força**, ja que indiquen la direcció de la força elèctrica exercida sobre una càrrega de prova positiva). El vector de camp $\vec{E}$ és tangent a les línies en cada punt. En els punts molt propers a una càrrega positiva, el camp elèctric $\vec{E}$ apunta radialment allunyant-se de la càrrega; per tant, les línies de camp elèctric divergeixen de la càrrega positiva. Anàlogament, en punts molt propers a una càrrega puntual negativa, les línies de camp elèctric convergeixen cap a la càrrega negativa.

La figura 21.20 mostra les línies de camp elèctric d'una sola càrrega puntual positiva. La separació entre les línies està relacionada amb la intensitat del camp elèctric. A mesura que ens allunyem de la càrrega, el camp elèctric s'afebleix i les línies se separen. Considerem una superfície esfèrica imaginària de radi r centrada en la càrrega, que té una àrea de $4\pi r^2$. Aleshores, quan r augmenta, la densitat de les línies de camp (el nombre de línies per unitat de superfície) disminueix a raó d'$1/r^2$, de la mateixa manera que minva E. Per tant, si adoptem la convenció de dibuixar un nombre de línies fix i proporcional a q des d'una càrrega puntual, i si les dibuixem equidistants en la regió propera a la càrrega, la intensitat del camp serà indicada per la densitat de línies. Com més juntes estiguin les línies, més intens serà el camp elèctric. La magnitud del camp elèctric també s'anomena **intensitat de camp elèctric**.

La figura 21.21 mostra les línies de camp elèctric per a dues càrregues iguals puntuals positives q separades una distància petita. En punts propers a les càrregues, el camp és degut únicament a la càrrega en qüestió, ja que l'altra càrrega és relativament lluny i, per tant, podem negligir la contribució que fa al camp. Així, doncs, les línies de camp en punts propers a cada càrrega són radials i equidistants. Com que

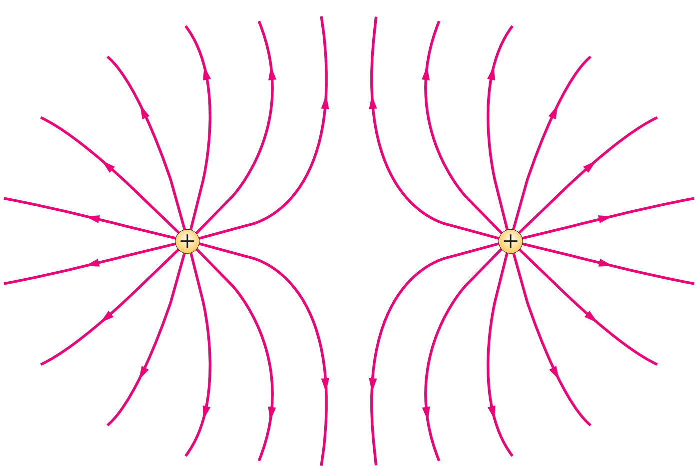


a)

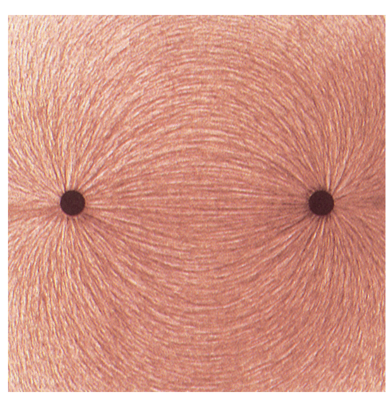


b)

FIGURA 21.20 *a*) Línies de camp elèctric d'una sola càrrega puntual positiva. Si la càrrega fos negativa, les fletxes anirien en sentit contrari. *b*) Les mateixes línies de camp evidenciades per trossets de fil suspesos en oli. El camp elèctric de l'objecte central carregat indueix càrregues oposades en els extrems de cada trosset de fil, i fa que s'orientin paral·lelament al camp. (*Harold M. Waage*.)



a)



b)

FIGURA 21.21 *a*) Línies de camp elèctric degudes a dues càrregues puntuals positives. Si les càrregues fossin negatives, el sentit de les fletxes seria el contrari. *b*) Les línies de camp del mateix sistema evidenciades amb trossets de fil suspesos en oli. (*Harold M. Waage*.)

les càrregues són iguals, dibuixarem un nombre equivalent de línies que surten de cadascuna. A una distància molt gran de les càrregues, els detalls de la configuració són irrellevants i el sistema es comporta com una sola càrrega puntual de valor $2q$. (Per exemple, si les dues càrregues estiguessin separades 1 mm i les observéssim des d'un punt situat a 100 km, semblarien una càrrega única de $2q$.) Així, doncs, en punts allunyats de les càrregues, el camp es pot considerar igual al creat per una càrrega puntual $2q$ i les línies de camp seran gairebé equidistants. Si observem la figura 21.21, veiem que la densitat de línies de camp en la regió compresa entre les dues càrregues és més petita comparada amb la densitat de línies just a la dreta o a l'esquerra de les càrregues. Això vol dir que la intensitat del camp elèctric és més feble en la regió compresa entre les càrregues que en la regió de la seva dreta o esquerra, on les línies estan més juntes entre elles. No cal dir que aquesta informació també es pot obtenir mitjançant el càlcul directe del camp en cada regió.

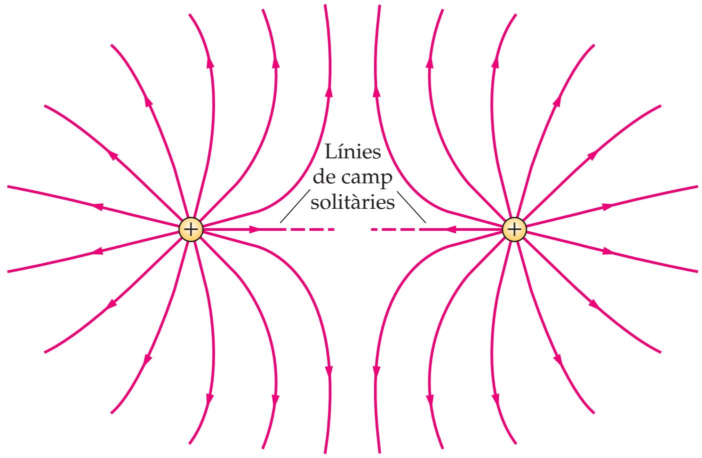


FIGURA 21.22 Hi ha infinites línies de camp que surten de les dues càrregues, dues de les quals s'anomenen *línies de camp solitàries*. Aquestes línies acaben en el punt mitjà entre les dues càrregues.

El raonament utilitzat en els exemples precedents es pot aplicar per a dibuixar les línies de camp elèctric de qualsevol sistema de càrregues puntuals. A prop de cadascuna de les càrregues, les línies de camp tenen la mateixa separació i, segons el signe de la càrrega, se n'allunyen o s'hi apropen. Lluny de totes les càrregues, l'estructura detallada del sistema és irrellevant, i les línies de camp són les mateixes que les corresponents a una única càrrega puntual igual a la càrrega neta del sistema. A continuació resumim les normes que cal seguir per a dibuixar les línies de camp elèctric.

ESTRATÈGIA DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

Dibuix de línies de camp

ANÀLISI Les línies de camp elèctric comencen en les càrregues positives i acaben en les negatives.[a]

RESOLUCIÓ

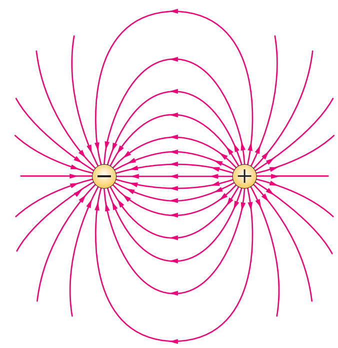
1r. Les línies es dibuixen uniformement espaiades, amb independència que surtin d'una càrrega puntual aïllada o hi entrin.

2n. El nombre de línies que surt d'una càrrega positiva o entra en una de negativa és proporcional al valor de la càrrega.

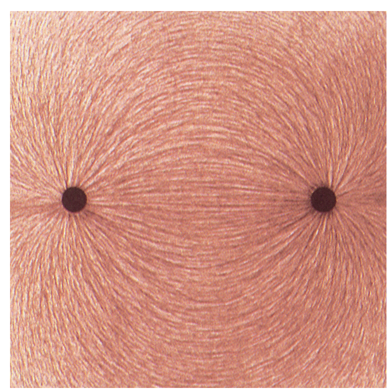
3r. La densitat de línies en un punt (nombre de línies per unitat de superfície perpendicular a les línies) és proporcional al mòdul del camp en aquest punt.

4t. A distàncies grans d'un sistema de càrregues, les línies de camp estan igualment espaiades i són radials, com si vinguessin d'una sola càrrega puntual igual a la càrrega neta del sistema.

COMPROVACIÓ Les línies de camp no es poden tallar mai. (Si es tallessin dues línies, el camp $\vec{E}$ en el punt d'intersecció tindria dues direccions.)



a)



b)

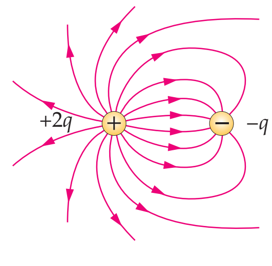
FIGURA 21.23 *a*) Línies de camp elèctric corresponents a un dipol. *b*) Les mateixes línies de camp evidenciades per trossets de fil suspesos en oli. (*Harold M. Waage*.)

En la figura 21.23 es mostren les línies de camp elèctric per a un dipol. Molt a prop de la càrrega positiva, les línies són radials i dirigides cap enfora; molt a prop

a. Les línies de camp solitàries són línies de camp que no compleixen aquesta premissa. Un exemple de línia solitària és la que surt d'una de les càrregues positives de la figura 21.22 i es dirigeix directament cap a l'altra càrrega. Aquesta línia acaba en el punt mitjà entre les dues càrregues; de manera anàloga, la línia que surt de la segona càrrega positiva i es dirigeix cap a la primera, també acaba en el punt mitjà. En aquest sistema hi ha infinites línies de camp, dues de les quals són línies solitàries.

de la càrrega negativa, les línies són radials i dirigides cap endins. Com que les càrregues tenen el mateix valor, el nombre de línies que comencen en la càrrega positiva és igual al nombre de les que acaben en la negativa. En aquest cas, el camp és més intens en la regió entre les càrregues, tal com indica el fet que la densitat de línies de camp en aquesta regió sigui molt elevada.

La figura 21.24*a* mostra les línies de camp elèctric per a una càrrega negativa $-q$ situada a una distància curta *a* d'una càrrega positiva $+2q$. De la càrrega positiva surten el doble de línies de les que entren en la negativa. És a dir, la meitat de les línies que comencen en la càrrega positiva $+2q$ entren en la càrrega negativa $-q$, però l'altra meitat continua fins a l'infinit. Molt lluny de les càrregues (figura 21.24*b*), les línies són gairebé simètricament equidistants i divergeixen d'un sol punt, com si es tractés d'un sistema amb una sola càrrega puntual positiva $+q$.



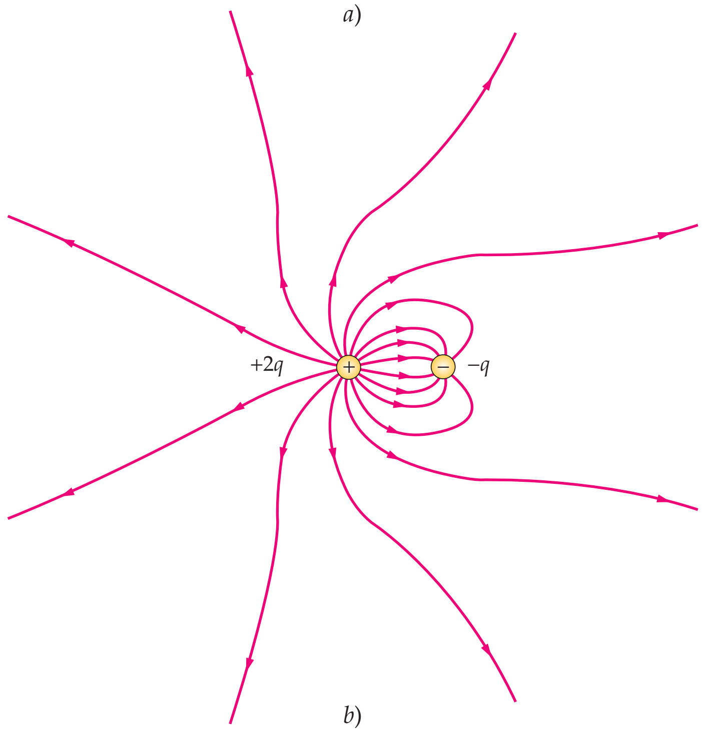


FIGURA 21.24 *a*) Línies de camp elèctric corresponents a una càrrega puntual $+2q$ i a una segona càrrega puntual $-q$. *b*) A distàncies grans de les càrregues, les línies de camp són gairebé iguals a les que s'obtenen considerant una sola càrrega puntual $+q$ situada al centre del sistema de càrregues.

Exemple 21.10 Línies de camp de dues esferes conductores *Conceptes*

En la figura 21.25 es representen les línies de camp elèctric corresponents a dues esferes conductores. Quin és el signe de la càrrega de cada esfera i quin és el valor relatiu de cada càrrega?

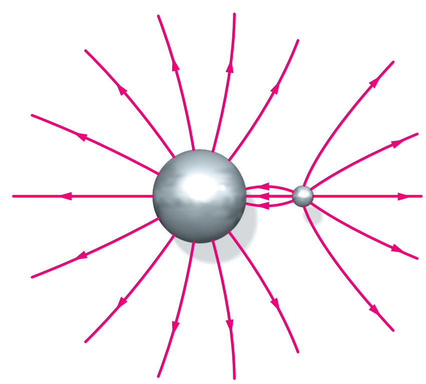


FIGURA 21.25

ANÀLISI Si el nombre de línies de camp que surt d'un objecte és més gran que el nombre que hi entra, aleshores l'objecte està carregat positivament. En canvi, si el nombre de línies que entra a un objecte és més gran que el nombre que en surt, aleshores l'objecte està carregat negativament. El quocient entre els valors de les càrregues serà igual al quocient entre el nombre net de línies entrants o sortints de les esferes.

RESOLUCIÓ

1r. Comptem el nombre de línies que surt de l'esfera més gran: Com que hi ha onze línies de camp elèctric que surten de l'esfera més gran i només tres que hi convergeixen, el nombre net de línies que en surt és vuit.

2n. Comptem el nombre de línies que surt de l'esfera més petita: De l'esfera petita surten vuit línies de camp elèctric i no n'entra cap, de manera que el nombre net de línies que en surt és vuit.

3r. Determinem el signe de la càrrega de cada esfera: Com que de les dues esferes surten més línies que no pas hi entren, les $\boxed{\text{dues esferes tenen càrrega positiva.}}$

4t. Determinem els valors relatius de les càrregues de les dues esferes: Com que de les dues esferes surt el mateix nombre de línies de camp, el $\boxed{\text{valor de les càrregues de cada esfera serà igual.}}$

La relació entre la intensitat del camp elèctric i les línies de camp elèctric és vàlida pel fet que el camp varia de manera inversament proporcional al quadrat de la distància a la càrrega puntual. Com que el camp gravitatori d'una massa puntual també varia inversament amb el quadrat de la distància, les línies de força també són útils per a descriure camps gravitatoris. A prop d'una massa puntual, les línies de camp gravitatori convergeixen cap a la massa, de la mateixa manera que les línies de camp elèctric ho fan cap a una càrrega negativa. Tanmateix, a diferència de les línies de camp elèctric prop de càrregues positives, no hi ha punts de l'espai en què les línies de camp gravitatori divergeixin. Això és així perquè la força gravitatòria entre dues masses mai no pot ser repulsiva.

21.6 L'ACCIÓ DEL CAMP ELÈCTRIC SOBRE LES CÀRREGUES

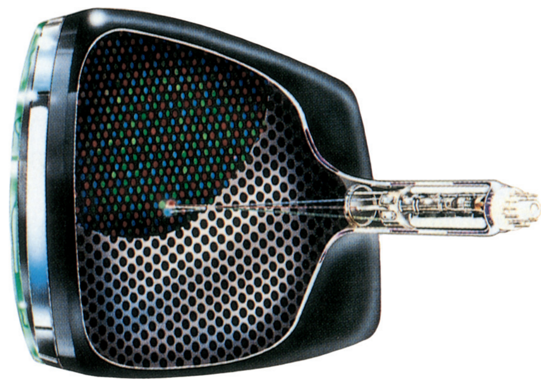
Un camp elèctric uniforme pot exercir una força sobre una partícula carregada i, també, una força neta i un moment sobre un dipol elèctric.

MOVIMENT DE CÀRREGUES PUNTUALS EN CAMPS ELÈCTRICS

Quan col·loquem una partícula amb càrrega q en el si d'un camp elèctric $\vec{E}$, experimenta l'acció d'una força $q\vec{E}$. Si la força elèctrica és l'única força significativa que actua sobre la partícula, aquesta partícula adquireix una acceleració

$$\vec{a} = \frac{\Sigma\vec{F}}{m} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

en què m és la massa de la partícula. (Si es tracta d'un electró, la seva velocitat sovint és una fracció considerable de la velocitat de la llum. En aquests casos, les lleis de Newton de la dinàmica no són vàlides i cal aplicar la teoria especial d'Einstein de la relativitat.) Si coneixem el camp elèctric, podem trobar la relació entre *càrrega* i *massa* de la partícula mitjançant el mesurament de l'acceleració. L'any 1897, Joseph John Thomson va utilitzar la desviació dels electrons en el si d'un camp elèctric uniforme per a demostrar l'existència dels electrons i mesurar-ne la relació entre *càrrega* i *massa*. Els oscil·loscopis, les pantalles d'ordinadors i els tubs de raigs catòdics dels televisors són exemples d'aparells basats en el moviment dels electrons en camps elèctrics.



Dibuix esquemàtic d'un tub de raigs catòdics utilitzat fins fa poc en la televisió en color. Els feixos d'electrons procedents del canó electrònic situat a la dreta activen substàncies fosforescents sobre la pantalla, a l'esquerra, i hi produeixen un punt brillant el color del qual depèn de la intensitat relativa de cada feix. Els camps elèctrics que hi ha entre les plaques deflectores del canó (o camps magnètics creats per bobines que envolten el canó) desvien els feixos. Els feixos escombren la pantalla seguint una línia horitzontal, es desvien cap avall i escombren una altra línia. La pantalla és escombrada completament trenta vegades per segon. (*Gentilesa de Hulon Forrester / Video Display Corporation*, *Tucker Georgia*.)

Exemple 21.11 Un electró que es mou paral·lelament a un camp elèctric uniforme

Llancem un electró cap a un camp elèctric uniforme $\vec{E} = (1\,000 \text{ N/C})\hat{i}$ amb una velocitat inicial $\vec{v}_0 = (2{,}00 \times 10^6 \text{ m/s})\hat{i}$ en la direcció del camp (figura 21.26). Quina distància recorrerà l'electró abans d'aturar-se?

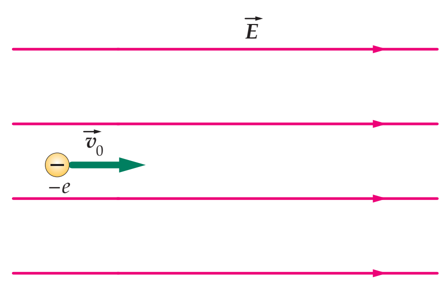


FIGURA 21.26

ANÀLISI La càrrega de l'electró és negativa, de manera que la força $\vec{F} = -e\vec{E}$ que hi actua anirà en sentit oposat al del camp. Com que $\vec{E}$ és constant, la força també ho serà i, per tant, podrem fer ús de les fórmules del moviment amb acceleració constant que hem estudiat en el capítol 2. Suposarem que el camp està dirigit en la direcció positiva de les x.

RESOLUCIÓ

1r. El desplaçament Δx està relacionat amb les velocitats inicial i final:

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x\Delta x$$

2n. Obtenim l'acceleració a partir de la segona llei de Newton:

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{-eE_x}{m}$$

3r. Quan $v_x = 0$, el desplaçament és:

$$\Delta x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x} = \frac{0 - v_{0x}^2}{2(-eE_x/m)} = \frac{mv_0^2}{2eE} = \frac{(9{,}11 \times 10^{-31} \text{ kg})(2{,}00 \times 10^6 \text{ m/s})^2}{2(1{,}60 \times 10^{-19} \text{ C})(1\,000 \text{ N/C})}$$

$$= 1{,}14 \times 10^{-2} \text{ m} = \boxed{1{,}14 \text{ cm}}$$

COMPROVACIÓ El desplaçament Δx és positiu, tal com podíem esperar per a qualsevol objecte que es mou en la direcció positiva de les x.

Exemple 21.12 Un electró que es mou perpendicularment a un camp elèctric uniforme

Llancem un electró cap a un camp elèctric uniforme $\vec{E} = (-2{,}0\ \mathrm{kN/C})\hat{j}$ amb una velocitat inicial $\vec{v}_0 = (1{,}0 \times 10^6\ \mathrm{m/s})\hat{i}$ i en direcció perpendicular al camp (figura 21.27). *a*) Compareu la força gravitatòria de l'electró amb la força elèctrica que hi actua. *b*) Quina desviació haurà experimentat l'electró quan hagi recorregut 1,0 cm en la direcció x?

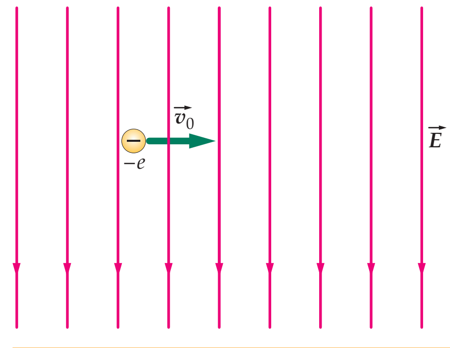


FIGURA 21.27

ANÀLISI *a*) Calcularem la relació entre la força elèctrica $|q|E = eE$ i la força gravitatòria mg. *b*) Com que mg és, per comparació, negligible, la força neta sobre l'electró equivaldrà a la força elèctrica vertical cap amunt. Així, el component horitzontal de la velocitat v_x de l'electró serà constant, i l'electró es desviarà cap amunt segons $\Delta y = \frac{1}{2}at^2$, en què t és el temps que triga a recórrer 1,0 cm en la direcció x.

RESOLUCIÓ

a) 1r. Calculem la relació entre el mòdul de la força elèctrica, F_e, i el mòdul de la força gravitatòria, F_g:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{eE}{mg} = \frac{(1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})(2\,000\ \mathrm{N/C})}{(9{,}11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg})(9{,}81\ \mathrm{N/kg})} = \boxed{3{,}6 \times 10^{13}}$$

b) 1r. Expressem la desviació vertical en funció de l'acceleració a i el temps t:

$$\Delta y = \frac{1}{2}a_y t^2$$

2n. Expressem el temps que triga l'electró a recórrer una distància horitzontal Δx a una velocitat horitzontal constant v_0:

$$t = \frac{\Delta x}{v_0}$$

3r. Calculem Δy utilitzant aquest resultat:

$$\Delta y = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\left(\frac{\Delta x}{v_0}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{(1{,}6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})(2\,000\ \mathrm{N/C})}{9{,}11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}}\left(\frac{0{,}010\ \mathrm{m}}{10^6\ \mathrm{m/s}}\right)^2$$

$$= \boxed{1{,}8\ \mathrm{cm}}$$

COMPROVACIÓ El resultat del tercer pas de l'apartat *b* és positiu, és a dir, va cap amunt. No podia ser d'una altra manera, ja que es tracta d'un objecte amb acceleració cap amunt que al principi es movia horitzontalment.

AMPLIACIÓ *a*) Sovint, la força elèctrica és enorme en comparació de la força gravitatòria. Així, a l'hora de dissenyar tubs de raigs catòdics o calcular la desviació de l'electró en l'exemple d'aquí al damunt, no cal tenir en compte la gravetat. De fet, els tubs d'imatges dels televisors funcionen perfectament encara que els capgirem, com si la gravetat no existís. *b*) La trajectòria que descriu un electró que es mou en el si d'un camp elèctric uniforme és una paràbola, de manera anàloga a la trajectòria que descriu una partícula neutra que es mou en el si d'un camp gravitatori uniforme.

Exemple 21.13 El camp elèctric en una impressora d'injecció *Context real*

Volem esbrinar el mecanisme mitjançant el qual les impressores col·loquen la tinta en la posició adequada. Navegant per Internet trobem un esquema similar al de la figura 21.28. Segons aquest esquema, les gotes de tinta es carreguen i es fan passar per un camp elèctric uniforme generat per dues plaques metàl·liques carregades amb signes oposats. Amb els coneixements adquirits en aquest capítol, volem calcular la intensitat del camp elèctric que utilitzen aquestes impressores. Les gotes de tinta fan un diàmetre de 40,0 μm i tenen una velocitat inicial de 40,0 m/s. Sabent que, quan les gotes tenen una càrrega de 2,00 nC, es desvien 3,00 mm cap amunt en recórrer la distància d'1,00 cm entre les plaques, esbrineu quin és el camp elèctric. (Considereu negligibles els efectes gravitatoris en el moviment de les gotes.)

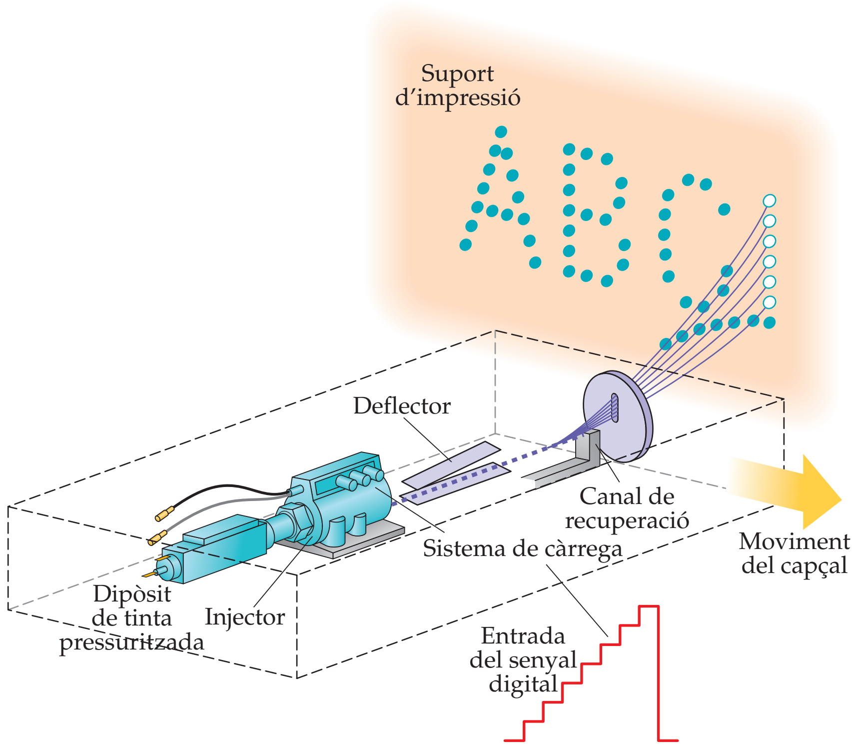


FIGURA 21.28 Impressora d'injecció de tinta. La tinta surt de l'injector en forma de petites gotes discretes. Cadascuna d'aquestes gotetes, que formarà un punt de la imatge, es carrega. Les plaques amb càrregues oposades constitueixen el dispositiu per a desviar les gotes. Com més gran és la càrrega de la gota, més gran és la desviació que experimentarà quan passi entre les plaques. Les gotes que no es carreguen, no es desvien cap amunt i acaben en un mecanisme de drenatge que les fa retornar al dipòsit de tinta. (*Gentilesa de Videojet Systems International*.)

ANÀLISI El camp elèctric $\vec{E}$ entre les plaques exerceix una força elèctrica constant $\vec{F}$ sobre la gota de tinta, en què $\vec{F} = q\vec{E}$. Volem esbrinar E per la qual cosa abans hem de trobar la força $\vec{F}$. La trobarem a partir de la seva acceleració (que determinarem gràcies a la cinemàtica) i de la seva massa (que determinarem a partir del seu radi i densitat ρ, que considerarem que és igual a la de l'aigua, és a dir, 1 000 kg/m^3), tot aplicant que $\vec{F} = m\vec{a}$.

RESOLUCIÓ

1r. La intensitat del camp elèctric és igual a la força dividida entre la càrrega:
$$E = \frac{F}{q}$$

2n. La força, dirigida cap amunt en el sentit positiu de les y, és igual a la massa per l'acceleració:
$$F = ma_y$$

3r. Obtenim el desplaçament vertical fent ús de les fórmules de cinemàtica per a moviments amb una acceleració constant prenent $v_{0y} = 0$:
$$\Delta y = v_{0y}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 = 0 + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$

4t. El temps que triga la gota a recórrer $\Delta x = 1{,}00$ cm a $v_0 = 40{,}0$ m/s és:
$$\Delta x = v_{0x}t = v_0 t \quad \text{per tant,} \quad t = \Delta x / v_0$$

5è. Aïllem a_y i queda:
$$a_y = \frac{2\Delta y}{t^2} = \frac{2\Delta y}{(\Delta x/v_0)^2} = \frac{2v_0^2\Delta y}{(\Delta x)^2}$$

6è. La massa és igual a la densitat pel volum:
$$m = \rho V = \rho\tfrac{4}{3}\pi r^3$$

7è. Aïllem E:
$$E = \frac{F}{q} = \frac{ma}{q} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{q}\frac{2v_0^2\Delta y}{(\Delta x)^2} = \frac{8\pi}{3}\frac{\rho r^3 v_0^2 \Delta y}{q(\Delta x)^2}$$
$$= \frac{8\pi}{3}\frac{(1\,000\ \text{kg/m}^3)(20{,}0\times10^{-6}\ \text{m})^3(40{,}0\ \text{m/s})^2(3{,}00\times10^{-3}\ \text{m})}{(2{,}00\times10^{-9}\ \text{C})(0{,}0100\ \text{m})^2} = \boxed{1{,}61\ \text{kN/C}}$$

COMPROVACIÓ Les unitats de l'última línia del setè pas són kg · m/(C · s^2), la qual cosa concorda amb el que podíem esperar, ja que 1 N = 1 kg · m/s^2.

AMPLIACIÓ El mecanisme d'injecció de tinta d'aquest exemple s'anomena *mecanisme de desviació múltiple contínua* i s'utilitza en algunes impressores industrials. Les impressores senzilles per a ordinadors personals no utilitzen aquest mecanisme de desviació de les trajectòries de les gotes carregades mitjançant un camp elèctric.

DIPOLS EN CAMPS ELÈCTRICS

En l'exemple 21.9 hem analitzat el camp elèctric produït per un dipol, un sistema de dues càrregues iguals, però de signe contrari, i molt properes entre elles. A continuació estudiarem el comportament d'un dipol en presència d'un camp elèctric extern. Algunes molècules tenen moments dipolars permanents a causa de la distribució de càrrega no uniforme a l'interior de la molècula. Aquestes molècules s'anomenen **molècules polars**. N'és un exemple el HCl, que essencialment és un ió positiu d'hidrogen amb càrrega $+e$ combinat amb un ió negatiu de clorur amb càrrega $-e$. El centre de càrrega de l'ió positiu no coincideix amb el centre de càrrega de l'ió negatiu, de manera que la molècula té un moment dipolar permanent. La molècula d'aigua n'és un altre exemple (figura 21.29).

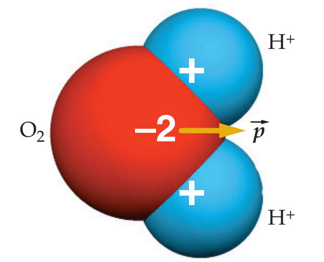


FIGURA 21.29 Una molècula de H_2O té un moment dipolar elèctric permanent dirigit des del centre de la càrrega negativa fins al centre de la càrrega positiva.

Un camp elèctric extern uniforme no exerceix cap força neta sobre un dipol, però hi exerceix un parell de forces que tendeix a alinear el dipol en la direcció del camp extern. En la figura 21.30 observem que el mòdul del parell de forces $\vec{\tau}$ exercides sobre les càrregues és $F_1 L \sin\theta = qEL \sin\theta = pE \sin\theta$.[a] El parell de forces està dirigit perpendicularment al paper i cap endins, de tal manera que tendeix a fer girar el moment dipolar $\vec{p}$ fins que s'alinea en la direcció del camp elèctric $\vec{E}$. El parell de forces es pot escriure de manera més acurada com a producte vectorial:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \qquad 21.11$$

Quan el dipol gira un angle $d\theta$, el camp elèctric fa un treball:

$$dW = -\tau d\theta = -pE \sin\theta \, d\theta$$

(El signe menys prové del fet que el parell de forces s'oposa a qualsevol increment de θ.) Si igualem el valor negatiu d'aquest treball a la variació d'energia potencial, resulta

$$dU = -dW = +pE \sin\theta \, d\theta$$

Integrem i obtenim

$$U = -pE \cos\theta + U_0$$

Prenent l'origen d'energia potencial U quan $\theta = 90°$, aleshores $U_0 = 0$ i l'energia potencial del dipol és

$$U = -pE \cos\theta = -\vec{p} \cdot \vec{E} \qquad 21.12$$

ENERGIA POTENCIAL D'UN DIPOL EN UN CAMP ELÈCTRIC

Els forns de microones aprofiten el moment dipolar de les molècules d'aigua per a coure aliments. Com altres ones electromagnètiques, les microones tenen camps elèctrics que oscil·len i exerceixen parells de forces sobre els dipols, i així provoquen que les molècules d'aigua girin amb una energia cinètica de rotació considerable. D'aquesta manera, l'energia de radiació de microones es transmet a les molècules d'aigua a una gran velocitat; per això, el temps de cocció en un forn de microones es redueix d'una manera significativa.

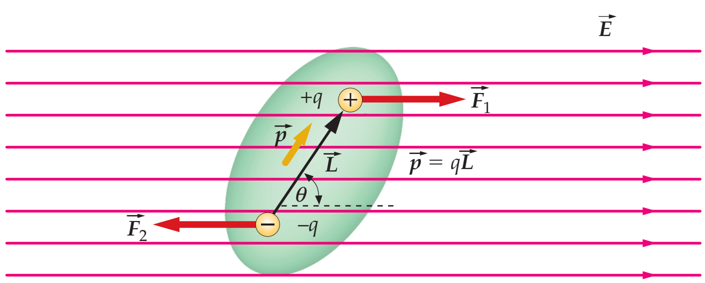


FIGURA 21.30 Un dipol en un camp elèctric uniforme experimenta forces iguals i oposades que fan girar el dipol, de manera que el seu moment dipolar $\vec{p}$ es tendeix a alinear amb el camp elèctric $\vec{E}$.

a. El moment de forces produït per dues forces iguals i oposades (que també s'anomena *parell de forces*) és el mateix en qualsevol punt de l'espai.

Les **molècules no polars** no tenen moment dipolar elèctric permanent. No obstant això, totes les molècules neutres contenen la mateixa quantitat de càrrega positiva que de càrrega negativa. En presència d'un camp elèctric extern $\vec{E}$, les càrregues positives i negatives se separen espacialment. Les positives es mouen en el sentit de $\vec{E}$, mentre que les negatives ho fan en el sentit contrari. Així, les molècules adquireixen un moment dipolar induït paral·lel al camp elèctric extern i es diu que estan **polaritzades**.

En un camp elèctric no uniforme, un dipol elèctric experimenta una força neta, ja que el camp elèctric té mòduls diferents en els centres de càrrega positiva i negativa. La figura 21.31 mostra que una càrrega puntual positiva polaritza una molècula no polar i tot seguit l'atreu. Un exemple prou familiar és l'atracció que manté un globus carregat electrostàticament enganxat a una paret. La càrrega del globus crea un camp no uniforme que polaritza les molècules de la paret i les atreu. Les molècules de la paret exerceixen una força igual i oposada sobre el globus.

El diàmetre d'un àtom o molècula és de prop de 10^{-12} m = 1 pm (un picòmetre). Una unitat adequada per al moment dipolar elèctric dels àtoms i molècules és la càrrega electrònica fonamental e multiplicada per la distància d'1 pm. Per exemple, el moment dipolar de l'aigua, H_2O, en aquestes unitats té un mòdul d'uns 40 $e \cdot$ pm.

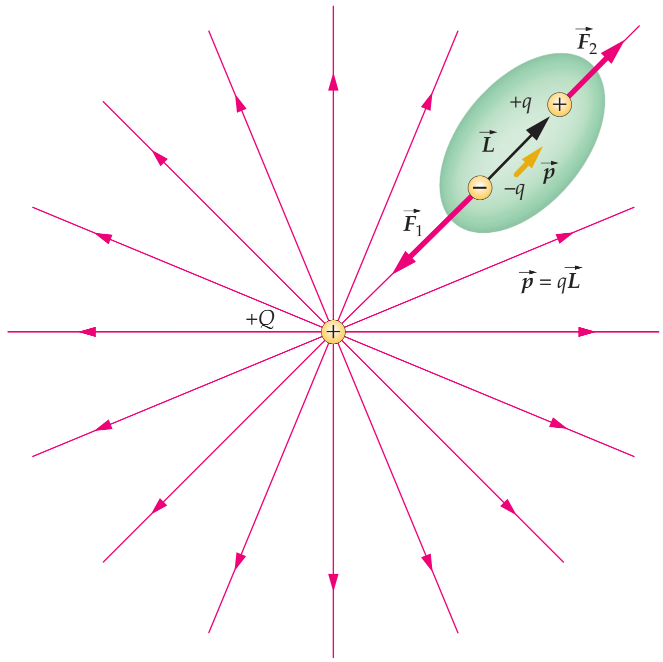


FIGURA 21.31 Molècula no polar en un camp elèctric no uniforme creat per una càrrega puntual $+Q$. La càrrega puntual atreu les càrregues negatives (els electrons) de la molècula i repel·leix les positives (els protons). Com a resultat d'això, el centre de càrrega $-q$ queda més a prop de la càrrega $+Q$ que no pas el centre de càrrega $+q$ i, en conseqüència, s'indueix un moment dipolar $\vec{p}$ paral·lel al camp creat per la càrrega $+Q$. Com que $-q$ és més a prop de $+Q$ que $+q$, F_1 serà més gran que F_2 i la molècula serà atreta per la càrrega puntual. D'altra banda, si la càrrega puntual fos negativa, malgrat que el moment dipolar induït aniria en sentit contrari, la molècula seria atreta un altre cop per la càrrega puntual.

Exemple 21.14 Parell de forces i energia potencial

Una molècula polar té un moment dipolar de mòdul 20 $e \cdot$ pm i que forma un angle de 20° amb un camp elèctric uniforme de mòdul $3{,}0 \times 10^3$ N/C (figura 21.32). Determineu *a*) el mòdul del parell de forces que actua sobre el dipol i *b*) l'energia potencial del sistema.

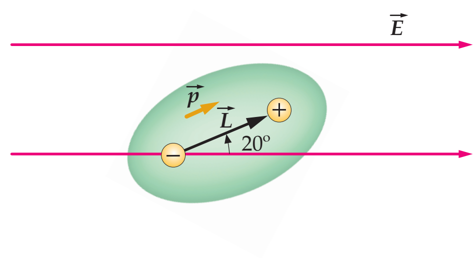


FIGURA 21.32

ANÀLISI Trobarem el parell de forces a partir de l'expressió $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ i l'energia potencial, a partir de l'expressió $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$.

RESOLUCIÓ

1r. Calculem el mòdul del parell de forces:

$$\tau = |\vec{p} \times \vec{E}| = pE \sin\theta = (20\, e \cdot \text{pm})(3 \times 10^3\ \text{N/C})(\sin 20°)$$
$$= (0{,}02)(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})(10^{-9}\ \text{m})(3 \times 10^3\ \text{N/C})(\sin 20°)$$
$$= \boxed{3{,}3 \times 10^{-27}\ \text{N} \cdot \text{m}}$$

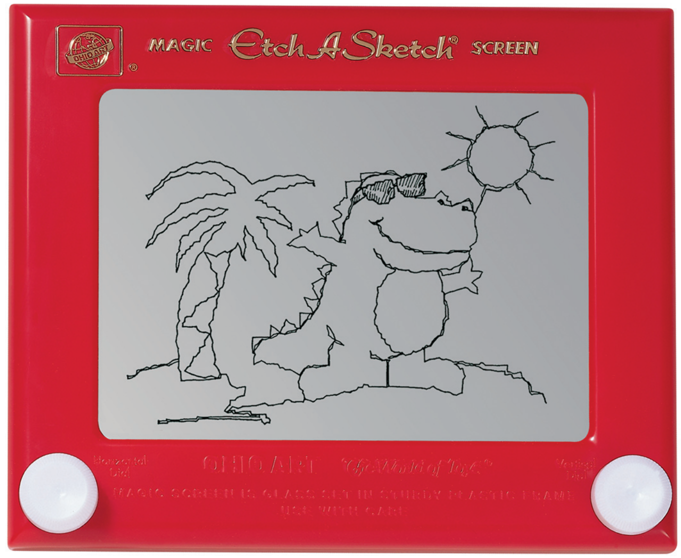
2n. Calculem l'energia potencial:

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos\theta$$
$$= -(0{,}02)(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})(10^{-9}\ \text{m})(3 \times 10^3\ \text{N/C})\cos 20°$$
$$= \boxed{-9{,}0 \times 10^{-27}\ \text{J}}$$

COMPROVACIÓ El signe de l'energia potencial és negatiu perquè hem pres l'origen $U = 0$ de l'energia potencial $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ quan $\theta = 90°$. Per tant, per a $\theta = 20°$ l'energia potencial serà inferior a zero. El sistema té més energia potencial quan $\theta = 20°$ que quan $\theta = 90°$.

Recobriment industrial amb pols electrostàtica o pintura electrostàtica

Els infants d'arreu del món han pogut gaudir de les propietats triboelèctriques. Cap a l'any 1960, l'empresa americana Ohio Art Company va llançar al mercat la pissarra Telesketch («la pantalla màgica»).[a] Quan se sacseja la pols ben fina d'alumini, les gotes d'estirè li proporcionen una càrrega. La pols carregada és atreta per la pantalla translúcida de la joguina i, per mitjà d'un punxó, es pot dibuixar sobre la pols. El fonament físic d'aquesta joguina rau en el fet que l'alumini i la pantalla s'atreuen mútuament perquè tenen càrregues oposades.



La pols fina és atreta cap al revers de la pantalla per efecte electrostàtic. En fer girar els botons, el dibuix desapareix mitjançant una petita barra. (*Gentilesa de The Ohio Art Company*.)

A més d'una joguina, la pols carregada també es pot utilitzar en activitats industrials adultes. Els metalls tendeixen a corroir-se si no es protegeixen. Per a evitar la corrosió, cal recobrir les parts metàl·liques dels automòbils, aparells metàl·lics i altres objectes de metall. Antigament, els recobriments consistien en pintures, laques, vernissos i esmalts que s'aplicaven en forma líquida i es deixaven assecar. Aquests líquids presenten certs inconvenients.[b] Els dissolvents necessiten molt temps per a assecar-se i alliberen components volàtils perjudicials. A més, les superfícies que no són llises no es poden cobrir uniformement. D'altra banda, els aerosols líquids produeixen residus que no són fàcils de reciclar. El recobriment amb pintura electrostàtica resol molts d'aquests problemes.[c] Aquest mètode es va utilitzar per primer cop cap als anys cinquanta del segle XX i actualment l'utilitzen els fabricants compromesos amb el medi ambient, ja que redueix l'emissió de productes químics volàtils.

Per a poder aplicar la pintura electrostàtica, cal carregar elèctricament l'objecte que es vol recobrir,[d] la qual cosa és molt més senzilla si l'objecte en qüestió és un conductor. Aleshores, partícules de pols minúscules,[e] entre 1 μm i 100 μm, adquireixen càrrega oposada. Aquestes partícules són atretes de manera intensa per l'objecte que es vol recobrir. Les partícules que queden soltes es poden reciclar i tornar a utilitzar. Un cop les partícules ja són damunt l'objecte, cal fixar el recobriment, procés que es duu a terme mitjançant un augment de temperatura o radiació ultraviolada. Així, les molècules de la pintura queden immobilitzades i tant les partícules com l'objecte perden la càrrega.

Per carregar les partícules apliquem o bé una descàrrega de corona o bé un procés de càrrega triboelèctric.[f] La descàrrega de corona insufla les partícules a través del plasma electrònic i les carrega negativament. El procés de càrrega triboelèctric envia les partícules a través d'un tub construït amb un material situat a l'extrem oposat de l'espectre tribolelèctric (sovint s'utilitza tefló). Gràcies a aquest contacte ràpid, les partícules de recobriment queden carregades positivament. Així, la càrrega que es proporciona a l'objecte que es vol recobrir dependrà del mètode que s'utilitzi per a recobrir-lo. Depenent del recobriment i dels additius, les càrregues de recobriment varien entre 500 μC/kg i 1 000 μC/kg.[g] El procés de fixació varia segons el material que s'empra en el recobriment i de l'objecte que es vol recobrir. Normalment, el temps de fixació pot variar entre 1 minut i 30 minuts.[h]

Malgrat que la pintura electrostàtica és un mètode econòmic i respectuós amb el medi ambient, presenta alguns inconvenients. En primer lloc, la capacitat de les partícules de pols per a mantenir la càrrega[i] depèn de la humitat, que cal controlar amb cura.[j] A més, si el camp elèctric que genera la descàrrega de corona és massa intens, la pols es dispersa massa de pressa cap a l'objecte que es vol recobrir. A conseqüència d'això, queden sense cobrir regions en forma circular, fet que produeix un efecte de pell de taronja.[k] Així, doncs, la pols electrostàtica pot ser una mera joguina infantil, però també pot servir per a processos de recobriment industrial complexos, i útils, en evolució contínua.

a. A. Grandjean, «Tracing Device», patent dels EUA 3055113 (25 setembre 1962).
b. D. Matheson, «20th- to 21st-Century Technological Challenges in Soft Coatings», *Science*, vol. 297, núm. 5583 (9 agost 2002), p. 976-979.
c. D. Hammerton i K. Buysens, «UV-Curable Powder Coatings: Benefits and Performance», *Paint and Coatings Industry*, (agost 2000), p. 58.
d. S. Zeren i D. Renoux, «Powder Coatings Additives», *Paint and Coatings Industry*, (octubre 2002), p. 116.
e. R. Hemphill, «Deposition of $BaTiO_3$ Nanoparticles by Electrostatic Spray Powder Charging», *Paint and Coatings Industry*, (abril 2006), p. 74-78.
f. S. J. Czyzak i D. T. Williams, «Static Electrification of Solid Particles by Spraying», *Science,* vol. 14 (20 juliol 1951), p. 66-68.
g. S. Zeren i D. Renoux, *op. cit*.
h. D. Hammerton i K. Buysens, *op. cit*.
i. C. T. O'Konski, «The Exponential Decay Law in Spray De-electrification», *Science*, vol. 114 (5 octubre 1951), p. 368.
j. R. Sharma *et al*., «Effect of Ambient Relative Humidity and Surface in Modification on the Charge Decay Properties of Polymer Powders in Powder Coating», *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 39, núm. 1 (gener/febrer 2003), p. 87-95.
k. D. Wostratzky, S. Lord i E. V. Sitzmann, «Power!», *Paint and Coatings Industry*, (octubre 2000), p. 54.

Resum

1. La quantització i la conservació són dues propietats fonamentals de la càrrega elèctrica.
2. La llei de Coulomb és la llei fonamental que descriu la interacció entre càrregues en repòs.
3. El camp elèctric descriu la condició establerta en l'espai per una distribució de càrregues.

TEMA	OBSERVACIONS I EQUACIONS IMPORTANTS	
1. Càrrega elèctrica	Hi ha dos tipus de càrrega, la positiva i la negativa. Les càrregues amb el mateix signe es repel·leixen, i les càrregues de signe diferent s'atreuen.	
Quantització	La càrrega elèctrica està quantitzada, és a dir, sempre es presenta com a múltiples enters de la unitat fonamental de càrrega e. La càrrega de l'electró és $-e$ i la del protó, $+e$.	
Magnitud	$e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C	
Conservació	La càrrega es conserva. Quan es creen o s'anihilen partícules carregades, la quantitat total de càrrega que transporten les partícules creades o destuïdes és zero.	
2. Conductors i aïllants	En els metalls, aproximadament un electró per àtom es pot moure amb llibertat pel material. En els materials aïllants, tots els electrons estan lligats als àtoms veïns.	
Terra	Qualsevol conductor molt extens (com el planeta Terra) que pugui subministrar o absorbir una quantitat il·limitada de càrrega s'anomena *terra*.	
3. Càrrega per inducció	Per a carregar un conductor mitjançant inducció cal procedir com s'indica: connectem el conductor a terra tot mantenint una càrrega externa en punts propers (per tal d'atreure o repel·lir electrons de conducció); tot seguit, el desconnectem de terra i, finalment, en retirem la càrrega externa.	
4. Llei de Coulomb	La força exercida per una càrrega puntual q_1 sobre una càrrega puntual q_2 separades una distància r_{12} és determinada per $$\vec{F}_{12} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$ en què $\hat{r}_{12}$ és el vector unitari que va de q_1 a q_2.	21.4
Constant de Coulomb	$k = 8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$	21.3
5. Camp elèctric	El camp elèctric degut a un sistema de càrregues en un punt es defineix com la força neta, $\vec{F}$, exercida per les càrregues sobre una càrrega petita de prova positiva q_0, dividida entre q_0: $$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$	21.5
Degut a una càrrega puntual	$$\vec{E}_{iP} = \frac{kq_i}{r_{iP}^2}\hat{r}_{iP}$$	21.7
Degut a un sistema de càrregues puntuals	El camp elèctric en P degut a diverses càrregues és la suma vectorial dels camps en P deguts a les càrregues individuals: $$\vec{E}_P = \sum_i \vec{E}_{iP}$$	21.8
6. Línies de camp elèctric	El camp elèctric es pot representar mitjançant línies de camp elèctric que s'originen en les càrregues positives i acaben en les negatives. La intensitat del camp elèctric està associada a la densitat de les línies de camp elèctric.	
7. Dipol	Un dipol elèctric és un sistema de dues càrregues iguals, però de signe contrari, i separades una distància molt petita.	
Moment dipolar elèctric	$$\vec{p} = q\vec{L}$$ en què $\vec{L}$ és la posició de la càrrega positiva en relació amb la càrrega negativa.	21.9
Camp degut a un dipol	La intensitat del camp elèctric en punts allunyats a un dipol és proporcional al mòdul del moment dipolar i disminueix amb el cub de la distància.	
Parell de forces sobre un dipol	En un camp elèctric uniforme, la força neta que actua sobre un dipol és zero. Tanmateix, hi ha un parell de forces que tendeix a alinear el dipol segons la direcció del camp. $$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$	21.11

TEMA	OBSERVACIONS I EQUACIONS IMPORTANTS	
Energia potencial d'un dipol	$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} + U_0$ en què habitualment prenem U_0 com a zero.	21.12
8. Molècules polars i molècules no polars	Les molècules polars, com ara el H_2O o el HCl, tenen moments dipolars permanents, ja que els centres de càrrega positiva i negativa no coincideixen. Es comporten com simples dipols en un camp elèctric. Les molècules no polars no presenten moments dipolars permanents, però en presència d'un camp elèctric n'adquireixen d'induïts.	

Respostes a les comprovacions de conceptes

21.1 *a*) $+\frac{1}{2}Q$. Com que les esferes són idèntiques, cal que la càrrega es reparteixi a parts iguals. *b*) $+2Q$, perquè se satisfaci la conservació de la càrrega.

21.2 $Q_1 = +Q/2$, $Q_2 = -Q/4$ i $Q_3 = -Q/4$

Respostes als exercicis

21.1 $N = Q/e = (50 \times 10^{-9}\text{ C})/(1{,}6 \times 10^{-19}\text{ C}) = 3{,}1 \times 10^{11}$. En una càrrega d'aquesta magnitud, els efectes de la quantització de la càrrega no són apreciables, ni tan sols quan hi afegim o en traiem milions d'electrons.

21.2 Un $3{,}5 \times 10^{-8}$ per cent

21.3 $2{,}25 \times 10^{-3}$ N

21.4 $+(6{,}3\ \mu\text{N})\hat{\boldsymbol{i}}$

21.5 $\hat{\boldsymbol{r}}_{10} = (\hat{\boldsymbol{i}} + \hat{\boldsymbol{j}})/\sqrt{2}$

21.6 No, però suposem que fos així: com que el component x de $\vec{r}_{10}$ és més petit que el mòdul de $\vec{r}_{10}$, el denominador de kq_1q_0/x_{10}^2 serà més petit que el de kq_1q_0/r_{10}^2. Això voldria dir que el component x de $\vec{F}_{10}$ és més gran que el mòdul de $\vec{F}_{10}$, la qual cosa és impossible, ja que el component d'un vector no pot ser mai més gran que el seu mòdul. Per tant, el component x de la força $\vec{F}_{10} = (kq_1q_0/r_{10}^2)\hat{\boldsymbol{r}}_{10}$ no és necessàriament igual a $F_{10x} = kq_1q_0/x_{10}^2$.

21.7 $\vec{E} = \vec{F}/q_0 = (4{,}0 \times 10^4\text{ N/C})\hat{\boldsymbol{i}}$

21.8 $\vec{F} = -(6{,}4 \times 10^{-15}\text{ N})\hat{\boldsymbol{i}}$

21.9 $x = 1{,}80$ m

Problemes

En alguns problemes es donen més dades de les que realment necessitareu; en d'altres haureu d'obtenir les dades a partir dels vostres coneixements, de fonts externes o d'estimacions ben fonamentades.

Considereu significants tots els dígits dels valors numèrics que tenen zeros a la dreta i no tenen decimals.

• Relativament fàcil: un sol concepte, un sol pas.

•• Dificultat intermèdia: pot exigir la síntesi de conceptes.

••• Difícil: nivell avançat.

SSM La solució es troba a l'*Student Solutions Manual*.

Els problemes consecutius ombrejats van de dos en dos.

PROBLEMES CONCEPTUALS

1 • Tots els objectes són formats per àtoms que, al seu torn, són constituïts per partícules carregades (protons i electrons); tanmateix, normalment no apreciem els efectes de la força electrostàtica. Expliqueu per què no observem aquests efectes.

2 • Un àtom de carboni esdevindrà un *ió*, si en capturem un o més electrons en un procés anomenat *ionització.* Quina serà la càrrega neta d'un àtom de carboni, que hem ionitzat mitjançant l'extracció de dos electrons? *a*) $+e$. *b*) $-e$. *c*) $+2e$. *d*) $-2e$.

3 •• L'experiment següent aparentment refuta la llei de Coulomb. Ens pentinem amb una pinta de cautxú i, tot seguit, observem que la pinta atreu trossets de paper. D'acord amb la llei de Coulomb, perquè s'exerceixi força d'atracció electrostàtica cal que els objectes estiguin carregats. Els trossets de paper, però, no ho estaven i, per tant, no hi hauria d'haver cap força d'atracció entre ells. Tot i això, n'hi ha. *a*) Quin error hi ha en el raonament? *b*) Perquè hi hagi una força d'atracció entre la pinta i el paper, és necessari que la càrrega neta de la pinta sigui negativa? Raoneu la resposta.

4 •• Suposem que tenim dues esferes metàl·liques i una barra aïllant carregada positivament. Expliqueu com podem fer servir la barra, sense tocar cap esfera, per a induir en les esferes *a*) una càrrega negativa i *b*) una càrrega positiva.

5 •• Dues partícules puntuals carregades de $+4q$ i $-3q$ estan separades una distància d. Dibuixeu les línies de camp *a*) per a punts propers al sistema i *b*) per a punts situats a distàncies molt més grans que d.

6 •• Considerem una esfera amb càrrega positiva. És possible que aquesta esfera atregui una altra esfera també amb càrrega positiva? Raoneu la resposta.

7 •• Quan fem oscil·lar una boleta de paper d'alumini rebregat penjada d'una corda i l'acostem a una barra carregada, la boleta estarà sotmesa a l'atracció electrostàtica de la barra. Ara bé, un cop la boleta toqui la barra, serà repel·lida bruscament. Expliqueu aquest fenomen.

8 •• Considerem un sistema format per una càrrega puntual positiva situada en $x = 0{,}00$, una altra càrrega igual situada en $x = 1{,}00$ m (totes dues sobre l'eix x) i una tercera càrrega puntual positiva situada en una determinada posició d'equilibri. *a*) Quina és aquesta posició d'equilibri? *b*) Si la tercera càrrega es mou paral·lelament a l'eix x, es tracta d'un equilibri estable? *c*) I si es mou paral·lelament a l'eix y? Raoneu les respostes.

9 •• Dues esferes conductores neutres que estan en contacte reposen damunt una taula de fusta ben aïllada. Acostem una barra carregada positivament a una de les esferes pel cantó oposat al punt de contacte amb l'altra esfera. *a*) Descriviu les càrregues induïdes sobre les dues esferes i representeu-ne les distribucions de càrrega. *b*) A continuació separem les dues esferes, retirem la barra carregada i allunyem les esferes l'una de l'altra. Dibuixeu les distribucions de càrrega de cada esfera.

10 •• Col·loquem tres càrregues puntuals $+q$, $+Q$ i $-Q$ en els vèrtexs d'un triangle equilàter, tal com mostra la figura 21.33. Suposem que no hi ha cap altra càrrega en la regió. *a*) Quina serà la direcció de la força neta sobre $+q$ deguda a les altres dues càrregues? *b*) Quina serà la força elèctrica total sobre el sistema de les tres càrregues? Expliqueu-ho.

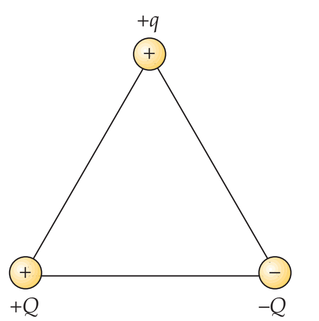


FIGURA 21.33 Problema 10

11 •• Una càrrega positiva es pot moure lliurement en una regió que té un camp elèctric $\vec{E}$. Digueu quina de les afirmacions següents és vertadera:

a) La partícula s'accelerarà segons la direcció perpendicular al camp $\vec{E}$.
b) La partícula s'accelerarà segons la direcció paral·lela al camp $\vec{E}$.
c) La partícula es mourà en la direcció del camp $\vec{E}$.
d) La partícula podria estar temporalment en repòs.
e) La força exercida sobre la partícula s'oposa a la direcció del camp $\vec{E}$.
f) La partícula es mourà en la direcció oposada al camp $\vec{E}$.

12 •• Col·loquem quatre càrregues en els vèrtexs d'un quadrat, tal com indica la figura 21.34. Suposem que no hi ha cap més càrrega en la regió. Digueu quina de les afirmacions següents és vertadera:

a) El camp $\vec{E}$ és zero en els punts mitjans de cada costat del quadrat.
b) $\vec{E}$ és zero al centre del quadrat.
c) $\vec{E}$ és zero en el punt mitjà entre les dues càrregues superiors i en el punt mitjà entre les dues càrregues inferiors.

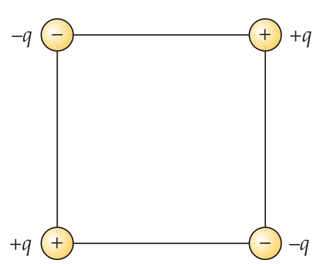


FIGURA 21.34 Problema 12

13 •• Dues partícules puntuals carregades amb $+q$ i $-3q$ estan separades una distància d. Dibuixeu les línies de camp *a*) en els punts propers al sistema i *b*) en punts situats a una distància molt més gran que d. SSM

14 •• Col·loquem tres càrregues puntuals positives iguals a $+q$ en els vèrtexs d'un triangle equilàter de costat a. Situem l'origen de coordenades en el punt mitjà d'un dels costats del triangle, el centre del triangle en $x = x_1$ i el vèrtex oposat a l'origen sobre l'eix x en $x = x_2$. *a*) Expresseu x_1 i x_2 en funció de a. *b*) Trobeu una expressió del camp elèctric sobre l'eix x i a una distància x en la regió $0 < x < x_2$. *c*) Demostreu que l'expressió que heu obtingut en l'apartat *b* concorda amb els resultats esperats en $x = 0$ i $x = x_1$.

15 •• Considerem una molècula en repòs amb un determinat moment dipolar elèctric $\vec{p}$ orientat que forma un angle θ amb el camp elèctric uniforme $\vec{E}$. Descriviu el moviment posterior del moment dipolar.

16 •• Vertader o fals:

a) El camp elèctric d'una càrrega puntual sempre s'allunya de la càrrega.
b) La força elèctrica sobre una partícula carregada sempre va en el mateix sentit que el camp elèctric.
c) Les línies de camp elèctric no es poden tallar mai.
d) Totes les molècules adquireixen moments dipolars elèctrics en presència d'un camp elèctric extern.

17 •• Considerem dues molècules que tenen moments dipolars amb el mateix mòdul i orientats en diverses configuracions, tal com s'il·lustra en la figura 21.35. Determineu la direcció del camp elèctric en cadascun dels punts enumerats. Raoneu les respostes. SSM

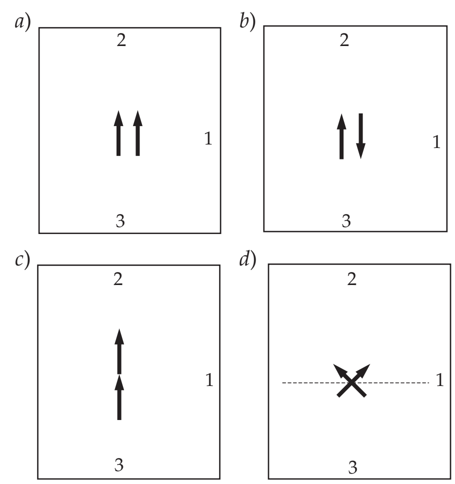


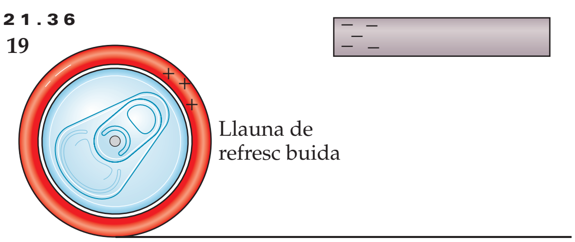
FIGURA 21.35 Problema 17

ESTIMACIÓ I APROXIMACIÓ

18 •• Estimeu la força necessària per a unir els dos protons d'un nucli de He. *Pista*: *Considereu els protons càrregues puntuals i estimeu la separació entre ells.*

19 •• Carreguem una barra de plàstic fregant-la amb una peça de pell. A continuació, acostem la barra a una llauna de refresc buida (figura 21.36). Expliqueu per què la llauna rodarà cap a la barra (figura 21.36).

FIGURA 21.36 Problema 19



20 •• Quan un camp elèctric accelera els ions lliures de l'aire fins que assoleixen velocitats prou grans per a col·lidir amb les molècules del gas i ionitzar-les, aleshores es produeixen les descàrregues elèctriques. *a*) Si suposem que la distància recorreguda per cada ió abans de col·lidir amb una molècula és l'anomenat *recorregut lliure mitjà* i que l'energia cinètica necessària per a ionitzar la molècula és 1,0 eV, aproximadament, estimeu la intensitat mínima del camp elèctric necessària en condicions normals de pressió i temperatura. Considereu que l'àrea de la secció transversal d'una molècula d'aire és 0,10 nm^2, aproximadament. *b*) Quina és la dependència del camp elèctric de l'apartat *a* amb la temperatura? *c*) I amb la pressió?

CÀRREGA ELÈCTRICA

21 • Quan freguem una barra de plàstic amb un jersei de llana, la barra adquireix una càrrega de $-0{,}80$ μC. Quants electrons es transfereixen del jersei de llana a la barra de plàstic?

22 • Un *faraday* es defineix com una càrrega igual al nombre d'Avogadro ($N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$). Calculeu quants coulombs hi ha en un faraday.

23 • Quina és la càrrega total de tots els protons que hi ha en 1,00 kg de carboni? SSM

24 •• Considerem un cub d'alumini d'1,00 cm de costat que acumula una càrrega neta de +2,50 pC. *a*) Quin percentatge d'electrons presents inicialment en el cub hem eliminat? *b*) Quin percentatge de massa hem reduït a conseqüència d'aquesta eliminació?

25 •• En el fenomen anomenat *efecte fotoelèctric*, fem servir radiació ultraviolada per a carregar una peça de metall. *a*) Suposem que la radiació incideix sobre una làmina de metall i que els electrons són incidits amb prou energia per a escapar de la superfície del metall a una velocitat d'1,00 × 10^6 electrons per segon. Calculeu el temps necessari abans que la làmina no adquireixi una càrrega de +1,50 nC. *b*) Si per a extreure un electró de la superfície calen 1,3 eV, trobeu la potència del feix de radiació, suposant que aquest procés té una eficiència del 100 %.

LLEI DE COULOMB

26 • Una càrrega puntual $q_1 = 4{,}0$ μC està situada en l'origen i una altra càrrega puntual $q_2 = 6{,}0$ μC reposa sobre l'eix x en el punt $x = 3{,}0$ m. *a*) Esbrineu la força elèctrica exercida sobre la càrrega q_2. *b*) Calculeu la força exercida sobre la càrrega q_1. *c*) Digueu en què diferirien les vostres respostes dels apartats *a* i *b*, si q_2 valgués $-6{,}0$ μC.

27 • Tres càrregues puntuals estan situades sobre l'eix *x*: $q_1 = -6{,}0$ μC en $x = -3{,}0$ m, $q_2 = 4{,}0$ μC en l'origen i $q_3 = -6{,}0$ μC en $x = 3{,}0$ m. Trobeu la força elèctrica exercida sobre q_1. SSM

28 •• Dues càrregues puntuals de 2,0 μC i 4,0 μC estan separades una distància *L*. On caldrà col·locar una tercera càrrega puntual perquè la força elèctrica en aquesta càrrega sigui nul·la?

29 •• Dues càrregues puntuals de −2,0 μC i 4,0 μC estan separades una distància *L*. On caldrà col·locar una tercera càrrega puntual perquè la força elèctrica en aquesta càrrega sigui nul·la?

30 •• Col·loquem tres càrregues puntuals de mòdul 3,00 nC en els vèrtexs d'un quadrat de 5,00 cm de costat. Les dues càrregues puntuals situades en els vèrtexs oposats són positives i l'altra és negativa. Calculeu la força que exerceixen aquestes càrregues sobre una quarta càrrega $q_4 = +\,3{,}00$ nC situada en el vèrtex restant.

31 •• Una càrrega puntual de 5,00 μC es troba sobre l'eix *y* en $y = 3{,}00$ cm i una segona càrrega puntual de −5,00 μC sobre l'eix *y* en $y = -3{,}00$ cm. Determineu la força elèctrica exercida sobre una càrrega de 2,00 μC situada sobre l'eix *x* en $x = 8{,}00$ cm.

32 •• Una càrrega puntual de −2,5 μC està situada en l'origen i una segona càrrega puntual de 6,0 μC es troba en $x = 1{,}0$ m i $y = 0{,}50$ m. Una tercera càrrega, un electró, es troba en un punt de coordenades (x, y). Determineu les coordenades (x, y) de la posició d'equilibri d'aquest electró.

33 •• Considerem una càrrega puntual de −1,0 μC situada en l'origen, una segona càrrega puntual de 2,0 μC en $x = 0$, $y = 0{,}10$ m i una tercera de 4,0 μC en $x = 0{,}20$ m, $y = 0$. Calculeu la força elèctrica total que actua sobre cadascuna de les tres càrregues puntuals.

34 •• Una càrrega de 5,00 μC està situada en $x = 0$, $y = 0$. Una altra càrrega *q* està situada en $x = 4{,}00$ cm, $y = 0$. La força elèctrica que actua sobre una càrrega de 2,00 μC en $x = 8{,}00$ cm, $y = 0$ és de $-(19{,}7\ \mathrm{N})\hat{\imath}$. Trobeu el valor de la càrrega *q*.

35 ••• Suposem que tenim cinc càrregues puntuals *Q* idèntiques situades de manera equidistant sobre un semicercle de radi *R*, tal com veiem en la figura 21.37. Calculeu la força (en funció de *k*, *Q* i *R*) exercida sobre una càrrega *q* situada en un punt equidistant de les altres cinc càrregues. SSM

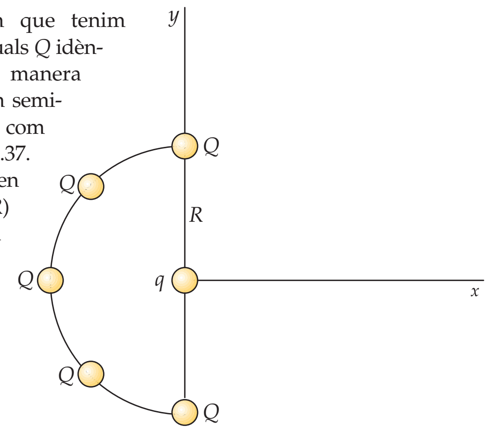


FIGURA 21.37
Problema 35

36 ••• La configuració de la molècula d'amoníac (NH_3) és, aproximadament, la d'un tetraedre regular amb els tres ions H^+ que formen la base i l'ió N^{3-} en el vèrtex. La longitud de cada costat és d'1,64 × 10^{-10} m. Calculeu la força elèctrica que actua sobre cada ió.

CAMP ELÈCTRIC

37 • Una càrrega de 4,0 μC és en l'origen. Quins són el mòdul i el sentit del camp elèctric sobre l'eix *x* en *a*) $x = 6{,}0$ m i *b*) $x = -10$ m? *c*) Representeu un esquema de E_x en funció de *x* tant per a valors positius com negatius de *x*. (Recordeu que E_x és negatiu quan $\vec{E}$ va en el sentit negatiu de les *x*.) SSM

38 • Dues càrregues puntuals, cadascuna de +4,0 μC, reposen sobre l'eix *x*, l'una en l'origen i l'altra en $x = 8{,}0$ m. Trobeu el camp elèctric sobre l'eix *x* en *a*) $x = -2{,}0$ m, *b*) $x = 2{,}0$ m, *c*) $x = 6{,}0$ m i *d*) $x = 10$ m. *e*) Determineu en quin punt de l'eix *x* el camp elèctric és zero. *f*) Feu un esquema de E_x en funció de *x* en l'interval $-3{,}0$ m $< x < 11$ m.

39 • Una càrrega de 2,0 nC situada en l'origen està sotmesa a l'acció d'una força elèctrica de 8,0 × 10^{-4} N en la direcció positiva de l'eix de les *y*. *a*) Quin és el camp elèctric en l'origen? *b*) Quina seria la força elèctrica exercida sobre una càrrega de −4,0 nC situada en l'origen? *c*) Si aquesta força fos deguda a un camp elèctric d'una càrrega situada sobre l'eix *y* en $y = 3{,}0$ cm, quin seria el valor d'aquesta càrrega?

40 • El camp elèctric a prop de la superfície de la Terra és d'uns 150 N/C i va dirigit cap avall. *a*) Compareu la força elèctrica ascendent exercida sobre un electró amb la força gravitatòria dirigida cap avall. *b*) Quina càrrega hauria de tenir una pilota de tennis de taula de 2,70 g perquè el camp elèctric compensés el seu pes en punts propers a la superfície de la Terra?

41 •• Dues càrregues iguals positives de valor $q_1 = q_2 = +6{,}0$ nC són en l'eix *y* en $y_1 = +\,3{,}0$ cm i $y_2 = -3{,}0$ cm, respectivament. *a*) Quins són el mòdul i la direcció del camp elèctric sobre l'eix *x* en $x = 4{,}0$ cm? *b*) Quant val la força exercida sobre una tercera càrrega $q_0 = 2{,}0$ nC situada en el punt $x = 4{,}0$ cm? SSM

42 •• Una càrrega puntual de +5,0 μC està situada en $x = -3{,}0$ cm i una segona càrrega puntual de −8,0 μC en $x = +\,4{,}0$ cm. Trobeu el punt en què caldrà col·locar una tercera càrrega de +6,0 μC perquè el camp elèctric en $x = 0$ sigui zero.

43 •• Una càrrega puntual de $-5{,}0\ \mu C$ està localitzada en $x = 4{,}0$ m, $y = -2{,}0$ m. Una segona càrrega puntual de $12\ \mu C$ està localitzada en $x = 1{,}0$ m, $y = 2{,}0$ m. *a*) Determineu el mòdul i la direcció del camp elèctric en $x = -1{,}0$ m, $y = 0$. *b*) Calculeu el mòdul i la direcció de la força elèctrica exercida sobre un electró situat en $x = -1{,}0$ m, $y = 0$.

44 •• Dues càrregues positives iguals q són en l'eix y; l'una en $y = +a$ i l'altra, en $y = -a$. *a*) Demostreu que el component x del camp elèctric sobre l'eix x és $E_x = 2kqx/(x^2 + a^2)^{3/2}$. *b*) Demostreu que en punts propers a l'origen, en què x és molt més petit que a, $E_x \approx 2kqx/a^3$. *c*) Demostreu que en punts en què x és molt més gran que a, $E_x \approx 2kq/x^2$. Expliqueu per què podríem esperar aquest resultat fins i tot abans de fer-ne el càlcul.

45 •• Una càrrega puntual de $5{,}0\ \mu C$ està localitzada en $x = 1{,}0$ m, $y = 3{,}0$ m i una altra càrrega de $-4{,}0\ \mu C$ està localitzada en $x = 2{,}0$ m, $y = -2{,}0$ m. *a*) Determineu el mòdul i la direcció del camp elèctric en $x = 23$ m, $y = 1{,}0$ m. *b*) Calculeu el mòdul i la direcció de la força exercida sobre un protó en $x = -3{,}0$ m, $y = 1{,}0$ m.

46 •• Considerem dues càrregues puntuals i positives Q que es localitzen en $y = +a$ i en $y = -a$. *a*) Demostreu que la intensitat del camp elèctric presenta un màxim en els punts $x = a/\sqrt{2}$ i $x = -a/\sqrt{2}$ calculant $\partial E_x/\partial x$ i igualant'ho a zero. *b*) Representeu E_x en funció de x utilitzant els resultats de l'apartat *a* i considerant que E_x és, aproximadament, $2kqx/a^3$quan $x \ll a$, i $2kq/x^2$ quan $x \gg a$.

47 •• Col·loquem dues partícules puntuals amb càrrega q cadascuna sobre la base d'un triangle equilàter de costat L (figura 21.38). Situem una tercera partícula de càrrega $2q$ en l'altre vèrtex. On cal col·locar una quarta partícula amb càrrega q perquè el camp elèctric en el centre del triangle sigui zero? (El centre és en el pla del triangle i equidista dels tres vèrtexs.) SSM

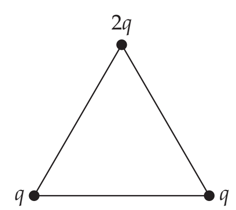


FIGURA 21.38 Problemes 47 i 48

48 •• Col·loquem dues partícules puntuals amb càrrega q cadascuna sobre la base d'un triangle equilàter de costat L (figura 21.38). Col·loquem també una tercera partícula de càrrega $2q$ en l'altre vèrtex. Situem una quarta partícula amb càrrega q' en el punt mitjà de la base, de manera que el camp elèctric esdevé zero al centre del triangle. Quant val q'? (El centre és en el pla del triangle i equidista dels tres vèrtexs.)

49 •• Dues càrregues positives puntuals $+q$ idèntiques són sobre l'eix y; l'una en $y = +a$ i l'altra, en $y = -a$. El camp elèctric és nul en l'origen, de manera que una càrrega de prova q_0 situada en l'origen estarà en equilibri. *a*) Estudieu l'estabilitat de l'equilibri considerant una càrrega de prova positiva i analitzant desplaçaments petits al llarg dels eixos x i y. *b*) Repetiu l'apartat *a* considerant negativa la càrrega de prova. *c*) Trobeu el valor i el signe d'una càrrega de prova q_0 de manera que, un cop situada en l'origen, anul·li les forces sobre cadascuna de les altres tres càrregues.

50 ••• Dues càrregues puntuals positives $+q$ són en l'eix y en $y = +a$ i $y = -a$. Una gota de massa m amb una càrrega negativa $-q$ llisca sense fricció al llarg d'una corda situada sobre l'eix x. Suposem que x és la posició de la gota. *a*) Demostreu que per a $x \ll a$, la gota experimenta una força de restitució lineal (és a dir, proporcional a x i dirigida cap a la posició d'equilibri $x = 0$) i que, per tant, està sotmesa a un moviment harmònic simple. *b*) Trobeu el període del moviment.

CÀRREGUES PUNTUALS EN CAMPS ELÈCTRICS

51 •• L'acceleració d'una partícula en un camp elèctric depèn de la relació entre *càrrega* i *massa* (q/m) de la partícula. *a*) Calculeu q/m per a un electró. *b*) Quins són el mòdul i la direcció de l'acceleració d'un electró sotmès a un camp elèctric uniforme de 100 N/C? *c*) Calculeu el temps necessari perquè l'electró, inicialment en repòs, assoleixi una velocitat de $0{,}01c$, en el camp elèctric de 100 N/C. (Quan la velocitat de l'electró és propera a la velocitat de la llum, c, aleshores cal utilitzar la cinemàtica relativista; però, per a velocitats de prop de $0{,}01c$ o més petites, la cinemàtica no relativista és suficient per als càlculs.) *d*) Quina distància recorrerà l'electró en aquest temps? SSM

52 • L'acceleració d'una partícula en un camp elèctric depèn de la relació entre *càrrega* i *massa* (q/m) de la partícula. *a*) Calculeu q/m per a un protó i trobeu-ne l'acceleració quan està sotmès a un camp elèctric uniforme de 100 N/C. *b*) Calculeu el temps necessari perquè el protó, inicialment en repòs, assoleixi una velocitat de $0{,}01c$, en el si del camp elèctric de 100 N/C. (Quan la velocitat de l'electró és propera a la velocitat de la llum, c, aleshores cal usar la cinemàtica relativista; però, per a velocitats de prop de $0{,}01c$, o menys, la cinemàtica no relativista és suficient per als càlculs.)

53 • Un electró té una velocitat inicial de $2{,}00 \times 10^6$ m/s en la direcció positiva de l'eix de les x. Entra en una regió que té un camp elèctric uniforme $\vec{E} = (300\ \text{N/C})\hat{j}$. *a*) Trobeu l'acceleració de l'electró. *b*) Quant temps trigarà l'electró a recórrer 10,0 cm en la direcció $+x$? *c*) Trobeu l'angle i la direcció de la desviació que experimentarà l'electró.

54 •• Un electró que parteix del repòs és accelerat per l'acció d'un camp elèctric uniforme feble $\vec{E} = -1{,}50 \times 10^{-10}\ \text{N/C}\,\hat{j}$. Quina serà la velocitat de l'electró quan hagi recorregut una distància vertical d'1,0 μm? (Tingueu en compte la força gravitatòria sobre l'electró.)

55 •• Deixem anar, partint del repòs, una massa de 2,00 g en una regió que té un camp elèctric uniforme $\vec{E} = (300\ \text{N/C})\hat{i}$. L'energia cinètica de la massa un cop ha recorregut 0,500 m és 0,120 J. Esbrineu la càrrega de la partícula.

56 •• Una partícula parteix de l'origen amb una velocitat de $3{,}00 \times 10^6$ m/s i forma un angle de 35° amb l'eix x. Es mou en una regió que té un camp elèctric constant $\vec{E} = -E_0\hat{j}$. Trobeu E_0 de manera que la partícula creui l'eix x en $x = 1{,}50$ cm, si és *a*) un electró i *b*) un protó.

57 •• Un electró parteix de la posició indicada en la figura 21.39 amb una velocitat inicial $v_0 = 5{,}00 \times 10^6$ m/s i formaun angle de 45° amb l'eix x. El camp elèctric té la direcció y positiva i un mòdul de $3{,}50 \times 10^3$ N/C. Les línies negres de la figura representen plaques de metall carregades. Sobre quina placa i en quin punt xocarà l'electró? SSM

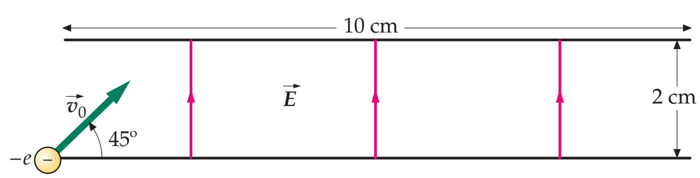


FIGURA 21.39 Problema 57

58 •• **PROBLEMA D'ENGINYERIA** Un electró que té una energia cinètica de $2{,}00 \times 10^{-16}$ J es mou cap a la dreta al llarg de l'eix d'un tub de raigs catòdics, tal com s'observa en la figura 21.40. En la regió compresa entre les plaques deflectores hi ha un camp elèctric que val $\vec{E} = (2{,}00 \times 10^4\ \text{N/C})\hat{j}$. Fora d'aquesta regió, no hi ha camp elèctric ($\vec{E} = 0$). *a*) A quina distància de l'eix del tub es troba l'electró quan surt de la regió entre plaques? *b*) Un cop ha sortit de les plaques, amb quin angle respecte de l'eix es mourà l'electró? *c*) A quina distància de l'eix es trobarà l'electró en el moment de col·lidir amb la pantalla fluorescent?

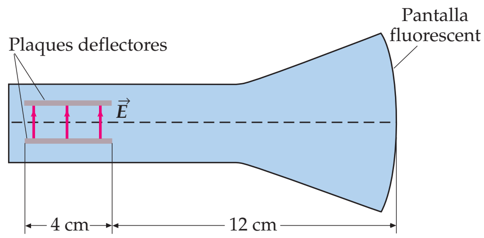


FIGURA 21.40 Problema 58

DIPOLS

59 • Dues càrregues puntuals $q_1 = 2{,}0$ pC i $q_2 = -2{,}0$ pC estan separades una distància de 4,0 μm. *a*) Quin és el moment dipolar d'aquest parell de càrregues? *b*) Dibuixeu el parell de càrregues i indiqueu la direcció del moment dipolar.

60 • Col·loquem un dipol de moment 0,50 $e \cdot$ nm en un camp elèctric uniforme de valor $4{,}0 \times 10^4$ N/C. Determineu el mòdul del parell de forces exercit sobre el dipol quan *a*) el dipol és paral·lel al camp elèctric, *b*) el dipol és perpendicular al camp elèctric i *c*) el dipol forma un angle de 30° amb el camp elèctric. *d*) Considerem l'origen de l'energia potencial quan el dipol és perpendicular al camp elèctric. Trobeu l'energia potencial del dipol per a les orientacions que s'especifiquen en els apartats *a* i *c*.

PROBLEMES GENERALS

61 • Demostreu que a l'interior d'una tassa de cafè buida només és possible col·locar-hi un sol protó aïllat. Per fer-ho, suposeu primerament que el protó queda fixat al fons de la tassa. A continuació, determineu la distància entre aquest protó i la posició on hauríeu de col·locar un segon protó perquè hi hagués equilibri. Finalment, compareu aquesta distància amb l'alçària habitual d'una tassa de cafè. SSM

62 •• Col·loquem tres càrregues puntuals de −5,00 μC, +3,00 μC i +5,00 μC sobre l'eix x en els punts $x = -1{,}00$ cm, $x = 0$ i $x = +1{,}00$ cm, respectivament. Calculeu el camp elèctric en l'eix x per a $x = 3{,}00$ cm i $x = 15{,}0$ cm. Hi ha algun punt de l'eix x en què el mòdul del camp elèctric sigui zero? Si és així, quins són aquests punts?

63 •• Col·loquem dues càrregues puntuals de −5,00 μC i +5,00 μC sobre l'eix x, en els punts $x = -1{,}00$ cm i $x = +1{,}00$ cm, respectivament. *a*) Calculeu la intensitat del camp elèctric en $x = 10{,}00$ cm. *b*) Estimeu la intensitat del camp elèctric en $x = 10{,}00$ cm considerant el sistema de càrregues com un dipol elèctric localitzat en l'origen i partint de l'equació 21.10, $E = 2kp/|x|^3$. Compareu els resultats de cada apartat i expliqueu-ne la diferència.

64 •• Tres càrregues puntuals fixades, $+q$, $+2q$ i $+4q$, estan connectades per cordes, tal com s'indica en la figura 21.41. Determineu les tensions T_1 i T_2.

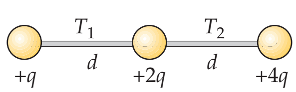


FIGURA 21.41 Problema 64

65 •• Dividim una càrrega positiva Q entre dues càrregues puntuals positives q_1 i q_2. Demostreu que, per a una separació determinada D, la força exercida per una càrrega sobre l'altra serà màxima si $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}Q$. SSM

66 •• Una càrrega puntual Q està situada en $x = 0$ i una altra càrrega $4Q$, en $x = 12{,}0$ cm. Si col·loquem una càrrega puntual de −2,00 μC en $x = 4{,}00$, aleshores la força a la qual està sotmesa és nul·la; en canvi, quan la situem en $x = 8{,}00$, la força és de 126 N en la direcció $+x$. Esbrineu el valor de la càrrega Q.

67 •• Dues càrregues puntuals estan separades una distància de 0,60 m i tenen una càrrega total de 200 μC. *a*) Si les dues càrregues es repel·leixen entre si amb una força de 80 N, quina és la càrrega de cada partícula? *b*) Si, en canvi, s'atreuen amb una força de 80 N, quina és la càrrega de cada partícula?

68 •• Una càrrega puntual de càrrega $+q$ i massa m cau lliurement i, des del repòs, des d'una altura h en una regió que té un camp elèctric uniforme $\vec{E}$ dirigit verticalment cap avall. La partícula col·lideix contra el terra a una velocitat $v = 2\sqrt{gh}$. Determineu m en funció de E, q i g.

69 •• Considerem una barra rígida d'1,00 m de llarg que pot girar al voltant d'un pivot situat al seu centre (figura 21.42). Col·loquem una càrrega $q_1 = 5{,}00 \times 10^{-7}$ C en un extrem de la barra i, a una distància $d = 10{,}0$ cm sobre la vertical cap avall, hi situem una altra càrrega $q_2 = -q_1$ igual en valor absolut, però de signe oposat. *a*) Quina força exerceix q_2 sobre q_1? *b*) Quin és el parell de forces (mesurat respecte de l'eix de rotació) degut a aquesta força? *c*) Per tal de compensar la força d'atracció entre les dues càrregues, pengem un bloc a 25,0 cm del pivot pel cantó oposat a les càrregues. Quant ha de valer m del bloc? *d*) Ara col·loquem el bloc a 25,0 cm, però en el mateix costat que la càrrega. Si mantenim els mateixos valors de q_1 i d, quant ha de valer q_2 per a mantenir l'equilibri? SSM

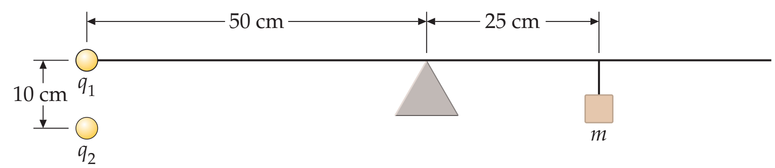


FIGURA 21.42 Problema 69

70 •• Considerem un sistema format per quatre càrregues puntuals: dues de 3,0 μC situades en $x = 0$, $y = 2{,}0$ m i en $x = 0$, $y = -2{,}0$ m; i les altres dues Q situades en $x = 4{,}0$ m, $y = 2{,}0$ m i en $x = 4{,}0$ m, $y = -2{,}0$ m (figura 21.43). El camp elèctric en $x = 0$, $y = 0$ degut a la presència de les quatre càrregues és $(4{,}0 \times 10^3\ \text{N/C})\hat{\imath}$. Determineu Q.

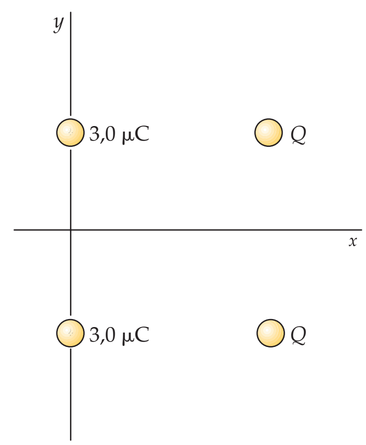


FIGURA 21.43 Problema 70

71 •• Dues càrregues puntuals tenen una càrrega total igual a 200 μC i estan separades 0,600 m. *a*) Determineu la càrrega de cadascuna si es repel·leixen amb una força de 120 N. *b*) Calculeu la força sobre cada càrrega si cadascuna val 100 μC. SSM

72 •• Dues càrregues puntuals tenen una càrrega total igual a 200 μC i estan separades 0,600 m. *a*) Determineu la càrrega de cadascuna si s'atreuen amb una força de 120 N. *b*) Calculeu la força sobre cada càrrega si cadascuna val 100 μC. SSM

73 •• Una càrrega de −3,00 μC es localitza en l'origen; una segona càrrega de 4,00 μC, en $x = 0{,}200$ m, $y = 0$, i una tercera càrrega Q, en $x = 0{,}320$ m, $y = 0$. La força elèctrica que actua sobre la càrrega de 4,00 μC és 240 N en la direcció $+x$. *a*) Determineu la càrrega Q. *b*) Amb aquesta configuració de tres càrregues, trobeu el punt o punts en què el camp elèctric és zero.

74 •• Dues esferes petites de massa m i càrrega q pengen d'un punt comú mitjançant cordes de longitud L. Cada corda forma un angle θ amb la vertical, tal com s'il·lustra en la figura 21.44. *a*) Demostreu que la càrrega q s'expressa $q = 2L\sin\theta\sqrt{(mg/k)\tan\theta}$, en què k és la constant de Coulomb. *b*) Determineu q sabent que $m = 10{,}0$ g, $L = 50{,}0$ cm i $q = 10{,}0°$.

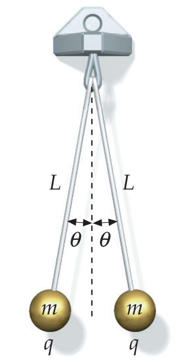


FIGURA 21.44 **Problema 74**

75 •• Considerem que en el sistema que es descriu en el problema 74, $L = 1{,}5$ m i $m = 0{,}010$ kg. *a*) Trobeu l'angle de cada corda amb la vertical quan $q = 0{,}75$ µC. *b*) Esbrineu l'angle de cada corda amb la vertical quan una càrrega és de 0,50 µC i l'altra és d'1,0 µC.

76 •• Col·loquem quatre càrregues amb el mateix mòdul ens els vèrtexs d'un quadrat de costat L, tal com s'indica en la figura 21.45. *a*) Calculeu el mòdul i la direcció de la força exercida sobre la càrrega situada en el vèrtex inferior a l'esquerra per les altres tres càrregues. *b*) Demostreu que el camp elèctric en el punt mitjà d'un dels costats del quadrat va dirigit cap a la càrrega negativa i que té un mòdul

$$E = k\frac{8q}{L^2}\left(1 - \frac{1}{5\sqrt{5}}\right).$$

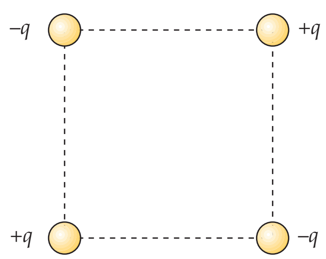


FIGURA 21.45 **Problema 76**

77 •• La figura 21.46 mostra una palanca formada per dues masses idèntiques m subjectades als extrems d'una barra fina (i sense massa) de longitud a amb un pivot al seu centre. Les masses tenen càrregues $+q$ i $-q$, i el sistema està localitzat en un camp elèctric uniforme $\vec{E}$. Demostreu que, per a valors petits de l'angle θ entre la direcció del dipol i el camp elèctric, el sistema segueix un moviment harmònic simple i deduïu l'expressió del període d'aquest moviment. SSM

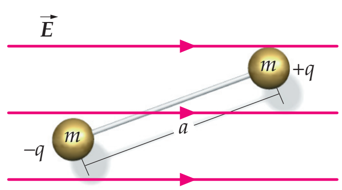


FIGURA 21.46 **Problemes 77 i 78**

78 •• Suposem que la palanca de la figura 21.46 té una massa $m = 0{,}0200$ kg, una longitud $a = 0{,}300$ m i està sotmesa a un camp elèctric $\vec{E} = (600\ \text{N/C})\hat{i}$. Inicialment, la palanqueta està en repòs i forma un angle de 60° amb l'eix x. La deixem anar de manera que, quan està temporalment alineada amb el camp elèctric, té una energia cinètica de $5{,}00 \times 10^{-3}$ J. Determineu el mòdul de q.

79 •• Un electró (càrrega $-e$, massa m) i un positró (càrrega $+e$, massa m) giren al voltant de llur centre de masses comú sotmesos a la força atractiva de Coulomb. Trobeu la velocitat v de cada partícula en funció de e, m, k i llur distància de separació L. SSM

80 ••• Col·loquem un pèndol simple d'1,0 m de longitud i 5×10^{-3} kg de massa en un camp elèctric uniforme $\vec{E}$ dirigit verticalment cap amunt. El contrapès del pèndol té una càrrega de $-8{,}0$ µC i té un període d'1,2 s. Esbrineu el mòdul i la direcció de $\vec{E}$?

81 ••• Una petita massa puntual m de càrrega q està obligada a moure's verticalment a l'interior d'un cilindre estret i sense fricció (figura 21.47). Al fons del cilindre, hi ha una càrrega puntual Q que té el mateix signe que q. *a*) Demostreu que la partícula de massa m assolirà l'equilibri a una altura $y_0 = (kqQ/mg)^{1/2}$. *b*) Demostreu que si desplacem lleugerament la massa m de la seva posició d'equilibri i la deixem anar, efectuarà un moviment harmònic simple de freqüència angular $\omega = (2g/y_0)^{1/2}$.

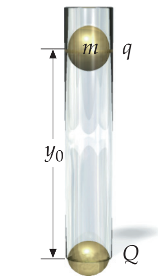


FIGURA 21.47 **Problema 81**

82 ••• Considerem dues molècules neutres situades sobre l'eix x i que s'atreuen entre si. Cadascuna té un moment dipolar $\vec{p}$, alineat al llarg de l'eix $+x$ i separats una distància d. Deduïu una expressió per a la força d'atracció en funció de p i d.

83 ••• Dues càrregues puntuals positives iguals Q es troben sobre l'eix x en $x = \frac{1}{2}a$ i $x = -\frac{1}{2}a$. *a*) Obteniu una expressió per al camp elèctric en funció de y sobre l'eix y. *b*) Una partícula de massa m i càrrega q es mou sobre una barra fina i sense fricció al llarg de l'eix y. Determineu la força que actua sobre la càrrega q en funció de y i el signe de q perquè aquesta força apunti sempre allunyant-se de l'origen. *c*) Inicialment, la partícula està en repòs en l'origen. Li donem una petita empenta. Quina velocitat tindrà quan la força neta sobre la partícula sigui màxima? (Considereu negligibles els efectes gravitatoris.)

84 ••• Considerem un nucli d'or situat a 100 fm (1 fm $= 10^{-15}$ m) d'un protó que inicialment està en repòs. Si deixem anar el protó, s'accelera a causa de la repulsió exercida pel nucli d'or. Trobeu la velocitat del protó a distàncies grans (és a dir, a l'infinit). Considereu que el nucli d'or es manté sempre en repòs.

85 ••• L'any 1919, Ernest Rutherford va fer el seu famós experiment que consistia a fer incidir nuclis d'heli (partícules α) doblement ionitzats contra una làmina d'or. Va descobrir que pràcticament tota la massa dels àtoms resideix en un nucli extremament compacte. Suposem que durant aquest experiment, una partícula α lluny de la làmina té una energia cinètica de 5,0 MeV. Si la partícula α es dirigeix cap a un nucli d'or de la làmina i l'única força que hi actua és la força de repulsió entre la partícula i el nucli, trobeu la distància d'apropament màxim entre la partícula i el nucli abans que la partícula no giri cua (és a dir, la separació mínima entre els centres de la partícula α i el nucli d'or). SSM

86 ••• L'experiment de Millikan, que permet mesurar la càrrega de l'electró, consisteix a carregar una microesfera de poliestirè i deixar-la anar en l'aire en un camp elèctric vertical conegut. Així, la microesfera carregada s'accelera en la direcció de la força neta fins que assoleix una velocitat límit, a partir de la qual podem calcular la càrrega de la microesfera. Suposem que el radi de la microesfera és $r = 5{,}50 \times 10^{-7}$ m i la intensitat del camp és $E = 6{,}00 \times 10^4$ N/C. La força de fricció de l'aire sobre l'esfera és $F_D = 6\pi\eta r v$, en què v és la velocitat de l'esfera, η és la viscositat de l'aire ($\eta = 1{,}8 \times 10^{-5}$ N · s/m²) i la densitat del poliestirè és $1{,}05 \times 10^3$ kg/m³. *a*) Si el camp elèctric està dirigit cap avall i la velocitat límit amb què puja l'esfera és $v = 1{,}16 \times 10^{-4}$ m/s, quant val la càrrega de l'esfera? *b*) Quin és l'excés d'electrons de l'esfera? *c*) Si invertim el sentit del camp elèctric mantenint-ne constant el mòdul, quina serà la nova velocitat límit?

87 ••• En el problema 86, es descriu l'experiment de Millikan que té com a objectiu mesurar la càrrega de l'electró. Mitjançant una font d'alimentació commutable, podem invertir el sentit del camp elèctric mantenint-ne constant el mòdul, de manera que és possible mesurar les velocitats límit tant si tenen el mateix sentit del camp com si tenen sentit oposat. Suposem que v_{am} i v_{av} són les velocitats límit quan la partícula es mou cap amunt i cap avall, respectivament. *a*) Si prenem $u = v_{am} + v_{av}$, demostreu que $q = 3\pi\eta r u/E$, en què q és la càrrega neta de la microesfera. Tenint en compte que l'objectiu és esbrinar q, quins avantatges presenta el fet de mesurar tant v_{am} com v_{av} en comptes de mesurar-ne només una? *b*) Com que la càrrega està quantitzada, u només pot variar de manera discreta amb variacions de $N\Delta$, en què N és un nombre enter. Feu servir les dades del problema 86 per a calcular Δ. SSM

CAPÍTOL 22

ELS LLAMPS SÓN FENÒMENS ELÈCTRICS. QUAN ES PRODUEIX UN LLAMP, ES TRANSFEREIXEN CÀRREGUES ENTRE ELS NÚVOLS I EL TERRA. EL CENTELLEIG LLUMINÓS S'ORIGINA PERQUÈ LES MOLÈCULES DE L'AIRE QUE ESTAVEN EN ESTATS EXCITATS DAVALLEN A ESTATS D'ENERGIA INFERIOR. (*Photo Disc.*)

Camp elèctric (II): distribucions contínues de càrrega

? Com podem calcular la càrrega de la superfície de la Terra? (Vegeu l'exemple 22.15.)

A escala microscòpica, la càrrega elèctrica està quantitzada. Tanmateix, sovint es presenten situacions en què un gran nombre de càrregues són tan pròximes entre elles que la càrrega total es pot considerar distribuïda de manera contínua en l'espai. Per a descriure la càrrega, ens podem valer del mateix concepte de *densitat* que utilitzem per a descriure la matèria.

A més de les distribucions contínues de càrrega, analitzarem la importància de la simetria a l'hora de calcular el camp elèctric. Els avenços matemàtics de Carl Friedrich Gauss van permetre demostrar que tot camp elèctric té propietats de simetria. En molts casos, identificar les distribucions de càrrega i llurs simetries simplifica el càlcul del camp elèctric que creen.

En aquest capítol analitzarem uns quants exemples de l'ús de la llei de Coulomb per a calcular el camp elèctric produït per diversos tipus de distribucions contínues de càrrega. A continuació, estudiarem la llei de Gauss i l'aplicarem per determinar el camp elèctric en diverses distribucions de càrrega simètriques.

22.1 CÀLCUL DEL CAMP ELÈCTRIC $\vec{E}$ MITJANÇANT LA LLEI DE COULOMB

La figura 22.1 mostra un element de càrrega $dq = r\, dV$ prou petit per a poder considerar-lo una càrrega puntual. L'element de càrrega dq és la quantitat de càrrega compresa en el volum dV i ρ és la càrrega per unitat de volum. El camp elèctric $d\vec{E}$ produït per aquest element de càrrega en un punt del camp P és determinat per la llei de Coulomb:

$$d\vec{E} = dE_r\, \hat{r} = \frac{k\, dq}{r^2}\, \hat{r} \qquad 22.1a$$

en què $\hat{r}$ és un vector unitari que apunta des de l'element de càrrega dq fins al punt P i dE_r (el component de $d\vec{E}$ en la direcció de $\hat{r}$) és determinada per kdq/r^2.
El camp total $\vec{E}$ en P es determina integrant aquesta expressió per a tota la distribució de càrrega. És a dir,

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{k\hat{r}}{r^2}\, dq \qquad 22.1b$$

CAMP ELÈCTRIC DEGUT A UNA DISTRIBUCIÓ CONTÍNUA DE CÀRREGA

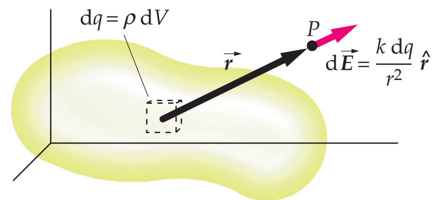


FIGURA 22.1 Un element de càrrega dq produeix un camp $d\vec{E} = (k\, dq/r^2)\hat{r}$ en el punt P. El camp en P degut a la càrrega total s'obté integrant aquesta expressió per a tota la distribució de càrrega.

Considerar distribucions contínues de càrrega per a descriure un gran nombre de càrrega puntuals és anàleg a descriure l'aire com una distribució contínua de massa, quan en realitat és constituït per un gran nombre d'àtoms i molècules discrets. En tots dos casos, podem definir un element de volum ΔV prou gran per a contenir una gran quantitat de partícules carregades, però prou petit per a poder-lo substituir per un diferencial dV, de manera que l'error en el càlcul sigui negligible. Si la càrrega està distribuïda sobre una superfície o sobre una línia, utilitzarem $dq = \sigma\, dA$ o $dq = \lambda\, dL$ i integrarem per a tota la superfície o línia (en aquests casos, σ i λ representen la càrrega per unitat de superfície i per unitat de longitud, respectivament). Habitualment, expressem el càlcul de la integral com $\hat{r}$ en termes dels seus components cartesians i aleshores integrem component per component.

> **!** El component x de $\hat{r}$ és $\hat{r} \cdot \hat{i} = \cos\theta$, en què θ és l'angle entre $\hat{r}$ i $\hat{i}$.[a] Els components y i z es calculen d'una manera anàloga.

ESTRATÈGIA DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

Càlcul de $\vec{E}$ utilitzant les equacions 22.1a i 22.1b

ANÀLISI Traceu un diagrama de configuració de càrregues que inclogui el punt de camp P (punt en el qual volem calcular $\vec{E}$). També, afegiu-hi un increment de càrrega dq en un punt font arbitrari S.

RESOLUCIÓ

1r. Dibuixeu els eixos de coordenades escollits tenint en compte les propietats simètriques de la configuració de càrregues. Per exemple, si la càrrega està distribuïda sobre una línia recta, escollirem aquesta línia com un dels eixos. Fem que el segon eix passi pel punt P. Situem P i S juntament amb la distància r entre P i S i dibuixem un vector unitari $\hat{r}$ dirigit des de S cap a P.

2n. Per calcular el camp elèctric $\vec{E}$ usant l'equació 22.1b, descomponeu l'expressió $d\vec{E} = dE_r\, \hat{r}$ en components. El component x de $d\vec{E}$ és $dE_x = dE_r\, \hat{r} \cdot \hat{i} = dE_r \cos\theta$, en què θ és l'angle que hi ha entre $\hat{r}$ i $\hat{i}$ (vegeu la figura 22.2) i el component y de $d\vec{E}$ és $dE_y = dE_r\, \hat{r} \cdot \hat{j} = dE_r \sin\theta$.

---

a. El component d'un vector en una direcció determinada és igual al producte escalar entre el vector i el vector unitari de la direcció corresponent. En el capítol 6 (secció 3) analitzem el producte escalar.

3r. Expresseu $\vec{E}$ en termes dels seus components x i y en l'equació 22.1*b*:

$$E_x = \int dE_x = \int dE_r \cos\theta = \int \frac{k\,dq}{r^2}\cos\theta$$

$$E_y = \int dE_y = \int dE_r \sin\theta = \int \frac{k\,dq}{r^2}\sin\theta$$

4t. Per trobar E_x, expresseu dq com $\rho\,dV$ o $\sigma\,dA$ o $\lambda\,dL$ (segons el que convingui) i integreu. Per determinar E_y seguiu un procediment semblant a l'usat per a calcular el component E_x.

5è. Els raonaments de simetria a vegades s'utilitzen per a demostrar que un o més components de $\vec{E}$ són nuls. Així, en l'exemple 22.5 fem servir la simetria per a demostrar que $E_y = 0$.)

COMPROVACIÓ Si la distribució de càrrega se situa en una regió finita de l'espai, l'expressió del camp elèctric en punts allunyats de la distribució de càrrega s'aproximarà a la d'una càrrega puntual localitzada al centre de la distribució. (I, si la configuració de càrrega és prou simètrica, la posició d'aquest centre es podrà determinar a primera vista observant el dibuix.)

Per a més informació sobre **trigonometria**, *consulteu la* **Guia de matemàtiques**

Exemple 22.1 Camp elèctric degut a una càrrega lineal de longitud finita

Determineu el camp elèctric en un punt arbitrari P produït per una barra prima de longitud L i càrrega Q distribuïda uniformement amb una densitat de càrrega lineal $\lambda = Q/L$.

ANÀLISI Escollirem com a eix x la recta que comprèn la barra, de manera que aquesta quedi confinada entre els punts $x = x_1$ i $x = x_2$, i com a eix y el que passi pel punt de camp P. Suposem que y és la distància radial de P a l'eix x. Per trobar el camp elèctric $\vec{E}$ en P, calcularem E_y i E_x de manera separada. Farem ús de les equacions 22.1*a* i 22.1*b* per a determinar, primerament, l'increment $d\vec{E}$ en P degut a un increment arbitrari dq de la distribució de càrrega i, a continuació, per a calcular la integral de cada component de $d\vec{E}$ sobre tota la distribució de càrrega. (Com que Q està distribuïda uniformement, la densitat de càrrega lineal λ serà Q/L.)

RESOLUCIÓ

1r. Dibuixem la configuració de càrrega del sistema, un punt de camp P, l'eix x que contingui el segment i l'eix y que passi pel punt P. Hi indiquem un increment *arbitrari* de longitud centrat en un punt S del segment (localitzat en $x = x_S$) de longitud dx_s i càrrega dq. Tracem el vector de camp elèctric $d\vec{E}$ considerant que dq *és* positiu (figura 22.2):

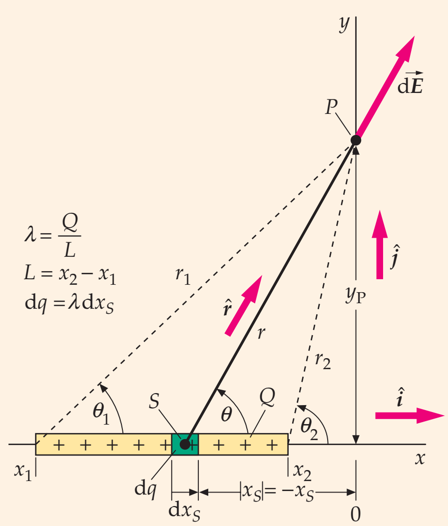


FIGURA 22.2 Geometria per al càlcul del camp elèctric en un punt P produït per un segment lineal carregat uniformement.

2n. $\vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j}$. Obtenim les expressions de dE_x i dE_y en termes de dE_r i θ, en què dE_r és el component de $d\vec{E}$ en la direcció del vector que va des de S cap a P:

$$d\vec{E} = dE_r\,\hat{r}$$

és a dir,

$$dE_x = dE_r\,\hat{r}\cdot\hat{i} = dE_r\cos\theta$$

$$dE_y = dE_r\,\hat{r}\cdot\hat{j} = dE_r\sin\theta$$

3r. Comencem resolent el component E_x. Expressem dE_r utilitzant l'equació 21.1*a*, en què r és la distància des del punt font S fins al punt de camp P. De la figura 22.2 deduïm que $\cos\theta = |x_S|/r = -x_S/r$. D'altra banda, tenim que $dq = \lambda\,dx_S$:

$$dE_r = \frac{k\,dq}{r^2} \text{ i } \cos\theta = \frac{-x_S}{r}$$

per tant,

$$dE_x = \frac{k\,dq}{r^2}\cos\theta = \frac{k\cos\theta\,\lambda\,dx_S}{r^2}$$

4t. Integrem el resultat del tercer pas:

$$dE_x = \int_{x_1}^{x_2}\frac{k\cos\theta\,\lambda\,dx_S}{r^2} = k\lambda\int_{x_1}^{x_2}\frac{\cos\theta\,dx_S}{r^2}$$

5è. Fem un canvi de variable, passant de x_S a θ. A partir de la figura 22.2, trobem la relació entre x_S i θ i entre r i θ:

$$\tan\theta = \frac{y_P}{|x_S|} = \frac{y_P}{-x_S}, \quad \text{per tant,} \quad x_S = -\frac{y_P}{\tan\theta} = -y_P\cot\theta$$

$$\sin\theta = \frac{y_P}{r} \quad \text{per tant,} \quad r = \frac{y_P}{\sin\theta}$$

6è. Diferenciem el resultat del cinquè pas per tal d'obtenir l'expressió de dx_S. Com que el punt de camp P és fix, y_P és constant:

$$dx_S = -y_P\frac{d\cot\theta}{d\theta} = y_P\csc^2\theta\, d\theta$$

7è. Substituïm $y_P\csc^2\theta\, d\theta$ per dx_S i $y_P/\sin\theta$ per r en la integral del quart pas i ho simplifiquem:

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\cos\theta\, dx_S}{r^2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\cos\theta\, y_P\csc^2\theta\, d\theta}{y_P^2/\sin^2\theta} = \frac{1}{y_P}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\, d\theta \qquad (y_P \neq 0)$$

8è. Resolem la integral i aïllem E_x:

$$E_x = k\lambda\frac{1}{y_P}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\, d\theta = \frac{k\lambda}{y_P}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) = \frac{k\lambda}{y_P}\left(\frac{y_P}{r_2} - \frac{y_P}{r_1}\right)$$

$$= k\lambda\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \qquad (r_1 > 0 \text{ i } r_2 > 0)$$

9è. Podem trobar E_y seguint el procediment usat en els passos del tercer al setè per a calcular E_x (per a determinar E_y vegeu el problema 22.21):

$$E_y = -\frac{k\lambda}{y_P}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) = -k\lambda\left(\frac{\cot\theta_2}{r_2} - \frac{\cot\theta_1}{r_1}\right) \qquad (y_P \neq 0)$$

i

$$E_y = 0 \qquad (y_P = 0)$$

10è. Per a obtenir el camp elèctric total en P, combinem els passos vuitè i novè:

$$\vec{E} = \boxed{E_x\hat{i} + E_y\hat{j}}$$

COMPROVACIÓ Considerem que el pla és perpendicular al segment i que hi passa pel centre. Per simetria, observem que $\vec{E}$ apunta allunyant-se de la barra, és a dir, que $E_x = 0$ al llarg d'aquest pla. En tots els punts d'aquest pla es compleix que $r_1 = r_2$. El resultat del vuitè pas dóna $E_x = 0$ quan $r_1 = r_2$, tal com podíem esperar.

AMPLIACIÓ La primera expressió de E_y en el novè pas és vàlida en qualsevol punt del pla xy, excepte en els punts que pertanyen a l'eix x. Les dues funcions cotangents en l'expressió de E_y, són determinades per

$$\cot\theta_1 = \frac{-x_1}{y_P} \quad \text{i} \quad \cot\theta_2 = \frac{-x_2}{y_P}$$

i cap d'aquestes no és definida en l'eix x (en què $y_P = 0$). La segona expressió de E_y en el novè pas s'obté mitjançant l'equació 22.1*a*. Tenint en compte que, en l'eix x, $\hat{r} = \pm\hat{i}$, a partir de l'equació 22.1*a* deduïm que $d\vec{E} = \pm dE\hat{i}$, la qual cosa implica que $E_y = 0$.

EXERCICI 22.1 Useu l'expressió de E_x obtinguda en el vuitè pas per a demostrar que $E_x > 0$ en tots els punts de l'eix x en la regió $x > x_2$.

El camp elèctric en un punt P de l'eix z degut a una barra carregada uniformement (vegeu la figura 22.3) és determinat per $\vec{E} = E_z\hat{k} + E_R\hat{R}$, en què

$$E_z = \frac{k\lambda}{R}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) = k\lambda\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \qquad (r_1 \neq 0) \text{ i } (r_2 \neq 0) \qquad 22.2a$$

$$E_R = -\frac{k\lambda}{R}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) = -k\lambda\left(\frac{\cot\theta_2}{r_2} - \frac{\cot\theta_1}{r_1}\right) \qquad (R \neq 0) \qquad 22.2b$$

Aquestes equacions es poden deduir de l'exemple 22.1. Les expressions de E_z (equació 22.2*a*) no estan ben definides en els extrems de la barra i les expressions de E_R (equació 22.2*b*) no ho estan en cap dels punts de l'eix z (en què $R = 0$). No obstant això, $E_R = 0$ en tots els punts en què $R = 0$.

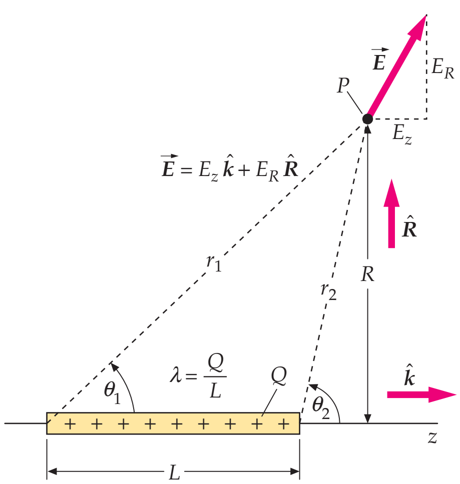
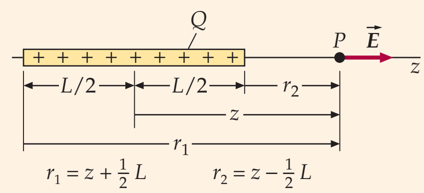


FIGURA 22.3 Camp elèctric degut a una barra prima carregada uniformement.

Exemple 22.2 $\vec{E}$ degut a una càrrega lineal finita en punts allunyats de la càrrega

Una càrrega Q és distribuïda uniformement al llarg de l'eix z i compresa entre els punts $z = -\frac{1}{2}L$ i $z = +\frac{1}{2}L$. Demostreu que, per a punts sobre l'eix z allunyats de l'eix, l'expressió del camp elèctric s'aproxima a la del camp elèctric degut a una càrrega puntual Q situada en l'origen.



F I G U R A 22.4 Geometria per al càlcul del camp elèctric sobre l'eix d'una càrrega lineal uniforme Q de longitud L i densitat de càrrega lineal $\lambda = Q/L$.

ANÀLISI Usarem l'equació 22.2*a* per a demostrar que per a valors grans de z, l'expressió del camp elèctric del segment carregat s'aproxima a la del camp creat per una càrrega puntual Q situada en l'origen.

RESOLUCIÓ

1r. El camp elèctric en l'eix z només té component z, i és determinat per l'equació 22.2*a*:

$$E_z = k\lambda\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

2n. Dibuixem el segment carregat sobre l'eix z i hi col·loquem el punt de camp P, r_1 i r_2 (figura 22.4):

3t. Substituïm $r_1 = z + \frac{1}{2}L$ i $r_2 = z - \frac{1}{2}L$ en el resultat del primer pas i ho simplifiquem:

$$E_z = k\lambda\left(\frac{1}{z - \frac{1}{2}L} - \frac{1}{z + \frac{1}{2}L}\right) = \frac{kQ}{L}\frac{L}{z^2 - \left(\frac{1}{2}L\right)^2} = \frac{kQ}{z^2 - \left(\frac{1}{2}L\right)^2} \qquad \left(z > \tfrac{1}{2}L\right)$$

4t. Quan $z \gg L$ podem considerar que, en l'expressió del tercer pas, $(\frac{1}{2}L)^2$ és negligible en comparació de z^2 i obtenim així una expressió aproximada de E_z.

$$\boxed{E_z \approx \frac{kQ}{z^2} \qquad (z \gg L)}$$

COMPROVACIÓ L'expressió aproximada (quart pas) és inversament proporcional al quadrat de z, que és la distància a l'origen. Aquesta expressió és la mateixa que per al camp elèctric d'una càrrega puntual Q situada en l'origen.

EXERCICI 22.2 El resultat del tercer pas és vàlid per a la regió $L/2 > z > \infty$. Ho és també per a la regió $-L/2 < z < L/2$? Raoneu la resposta.

Exemple 22.3 $\vec{E}$ degut a una càrrega lineal infinita

Determineu el camp elèctric degut a una recta infinita, carregada uniformement i que té una densitat de càrrega lineal λ.

ANÀLISI Una recta carregada es considera infinita si les distàncies entre els extrems de la recta i el punt de camp són molt més grans que les distàncies radials entre P i la mateixa recta. Per calcular el camp elèctric degut a la recta carregada (vegeu la figura 22.2), prendrem els límits $x_1 \to -\infty$ i $x_2 \to +\infty$. En la figura, observem que també cal prendre els límits per als angles $\theta_1 \to 0$ i $\theta_2 \to \pi$. Vegeu les equacions 22.2*a* i 22.22*b* per a consultar les expressions del camp elèctric.

RESOLUCIÓ

1r. Partim de la primera expressió del camp elèctric en cadascuna de les equacions 22.2*a* i 22.2*b*:

$$E_z = \frac{k\lambda}{R}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$E_R = -\frac{k\lambda}{R}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

2n. Prenem els límits $\theta_1 \to 0$ i $\theta_2 \to \pi$:

$$E_z = \frac{k\lambda}{R}(\sin\pi - \sin 0) = \frac{k\lambda}{R}(0 - 0) = 0$$

$$E_R = -\frac{k\lambda}{R}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{k\lambda}{R}(-1 - 1) = 2\frac{k\lambda}{R}$$

3r. Expressem el camp elèctric en forma vectorial:

$$\vec{E} = E_z\hat{k} + E_R\hat{R} = 0\hat{k} + \frac{2k\lambda}{R}\hat{R} = \boxed{\frac{2k\lambda}{R}\hat{R}}$$

COMPROVACIÓ El camp elèctric és en la direcció radial, tal com podíem esperar a causa de la simetria de la configuració. (La càrrega lineal està distribuïda de manera uniforme al llarg de la recta infinita.)

AMPLIACIÓ El mòdul del camp elèctric disminueix d'una manera inversament proporcional amb la distància radial respecte de la recta carregada.

El camp elèctric degut a una recta carregada uniformement i infinita és determinat per

$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{R}\hat{\boldsymbol{R}} \qquad 22.3$$

en què λ és la densitat de càrrega lineal, R és la distància radial de la recta carregada al punt de camp i $\hat{\boldsymbol{R}}$ és el vector unitari en la direcció radial. L'equació 22.3 s'obté en l'exemple 22.3.

EXERCICI 22.3

Demostreu que si k, λ i R es mesuren en unitats del sistema internacional (SI), de l'equació 22.3 en resulta el camp elèctric en newtons per coulomb.

Normalment, la constant de Coulomb, k, s'expressa en funció d'una altra constant ϵ_0, anomenada **constant elèctrica** (permitivitat elèctrica del buit):

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \qquad 22.4$$

Utilitzant aquesta notació, la llei de Coulomb per a $\vec{E}$ (equació 21.7) s'escriu

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \qquad 22.5$$

i $\vec{E}$ per a una recta infinita carregada uniformement amb una densitat de càrrega lineal λ (equació 22.3) s'expressa

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{R}\hat{\boldsymbol{R}} \qquad 22.6$$

El valor de ϵ_0 en unitats SI és

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/(N\cdot m^2)} \qquad 22.7$$

Exemple 22.4 Aproximació de les equacions 22.2*a* i 22.2*b* en el pla de simetria

Una càrrega Q està distribuïda uniformement al llarg de l'eix z, entre $z = -\frac{1}{2}L$ i $z = +\frac{1}{2}L$. *a*) Trobeu una expressió per al camp elèctric en funció de R en el pla $z = 0$, en què R és la distància radial entre el punt de camp i l'eix z. *b*) Demostreu que per a $R \gg L$, l'expressió obtinguda en l'apartat *a* es pot aproximar a la del camp creat per una càrrega puntual Q situada en l'origen. *c*) Demostreu que per a $R \ll L$, l'expressió de l'apartat *a* es pot aproximar a la del camp creat per una recta infinita carregada situada sobre l'eix z i amb una densitat de càrrega lineal igual a $\lambda = Q/L$.

ANÀLISI La configuració de càrrega és la mateixa que la de l'exemple 22.2 i la densitat de càrrega lineal és Q/L. Representarem la recta carregada sobre l'eix z i situarem el punt de camp en el pla $z = 0$. Les equacions 22.2*a* i 22.2*b* ens permetran obtenir l'expressió del camp elèctric que se'ns demana en l'apartat *a*. El camp elèctric degut a una càrrega puntual disminueix d'una manera inversament proporcional amb el quadrat de la distància a la càrrega. Analitzarem el resultat de l'apartat *a* per tal d'estudiar com, per als punts $R \gg L$, s'aproxima al resultat obtingut per una càrrega puntual situada en l'origen. El camp elèctric degut a una recta infinita carregada és inversament proporcional a la distància radial a la recta (equació 22.3). Examinarem el resultat de l'apartat *a* i comprovarem que, per als punts $R \ll L$, s'aproxima al creat per una recta carregada infinita.

RESOLUCIÓ

a) 1r. Escollim la primera expressió per al camp elèctric en cadascuna de les equacions 22.2*a* i 22.2*b*:

$$E_z = \frac{k\lambda}{R}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$E_R = -\frac{k\lambda}{R}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

2n. Dibuixem la configuració del sistema situant la càrrega lineal sobre l'eix z entre els punts $z = -\frac{1}{2}L$ i $z = +\frac{1}{2}L$. Situem el punt P en el pla $z = 0$ a una distància R de l'origen (figura 22.5):

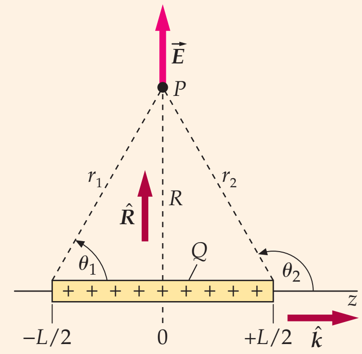


FIGURA 22.5

3r. En la figura apreciem que $\theta_2 + \theta_1 = \pi$, de manera que $\sin\theta_2 = \sin(\pi - \theta_1) = \sin\theta_1$ i $\cos\theta_2 = \cos(\pi - \theta_1) = -\cos\theta_1$. Substituïm aquests valors en el resultat del primer pas:

$$E_z = \frac{k\lambda}{R}(\sin\theta_1 - \sin\theta_1) = 0$$

$$E_R = -\frac{k\lambda}{R}(-\cos\theta_1 - \cos\theta_1) = \frac{2k\lambda}{R}\cos\theta_1$$

4t. Expressem $\cos\theta_1$ en funció de R i L i ho substituïm en el resultat del tercer pas:

$$\cos\theta_1 = \frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2}L\right)^2}}$$

per tant,

$$E_R = \frac{2k\lambda}{R}\frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2}L\right)^2}} = \frac{k\lambda L}{R\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2}L\right)^2}}$$

5è. Escrivim el camp elèctric en forma vectorial i substituïm Q per λL:

$$\vec{E} = E_z\hat{k} + E_R\hat{R} = 0\hat{k} + E_R\hat{R}$$

per tant, $$\vec{E} = E_R\hat{R} = \boxed{\frac{kQ}{R\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2}L\right)^2}}\hat{R}}$$

b) 1r. Fixem-nos en el resultat del cinquè pas. Si $R \gg L$, aleshores $R^2 + (\frac{1}{2}L)^2 \approx R^2$. Substituïm $R^2 + (\frac{1}{2}L)^2$: per R^2:

$$\vec{E} \approx \frac{kQ}{R\sqrt{R^2}}\hat{R} = \frac{kQ}{R^2}\hat{R} \qquad (R \gg L)$$

2n. En aquesta aproximació veiem que el camp elèctric disminueix d'una manera inversament proporcional amb el quadrat de la distància en l'origen, tal com succeeix en el camp creat per una càrrega puntual Q en l'origen:

$$\vec{E} \approx \boxed{\frac{kQ}{R^2}\hat{R} \qquad (R \gg L)}$$

c) 1r. Fixem-nos novament en el resultat del cinquè pas de l'apartat *a*. Si $R << L$, aleshores $R^2 + (\frac{1}{2}L)^2 \approx (\frac{1}{2}L)^2$. Substituïm $(\frac{1}{2}L)^2$ per $R^2 + (\frac{1}{2}L)^2$. D'aquesta aproximació deduïm que el camp elèctric varia de manera inversament proporcional a la distància radial a la recta carregada, tal com succeeix en el camp creat per una recta carregada de longitud infinita (equació 22.3):

$$\vec{E} \approx \frac{k\lambda L}{R\sqrt{\left(\frac{1}{2}L\right)^2}}\hat{R} = \boxed{\frac{2k\lambda}{R}\hat{R}} \qquad (R \ll L)$$

COMPROVACIÓ Els apartats *b* i *c* demostren que el resultat de l'apartat *a* és versemblant i confirmen la validesa d'aquest resultat en els casos extrems $R \gg$ L i $R \ll$ L.

AMPLIACIÓ La figura 22.6 representa el resultat exacte per a una recta carregada de longitud $L = 10$ cm i una densitat de càrrega $\lambda = 4{,}5$ nC/m. També s'hi representen els casos límit d'una recta carregada de longitud infinita amb la mateixa densitat de càrrega i d'una càrrega puntual $Q = \lambda L$.

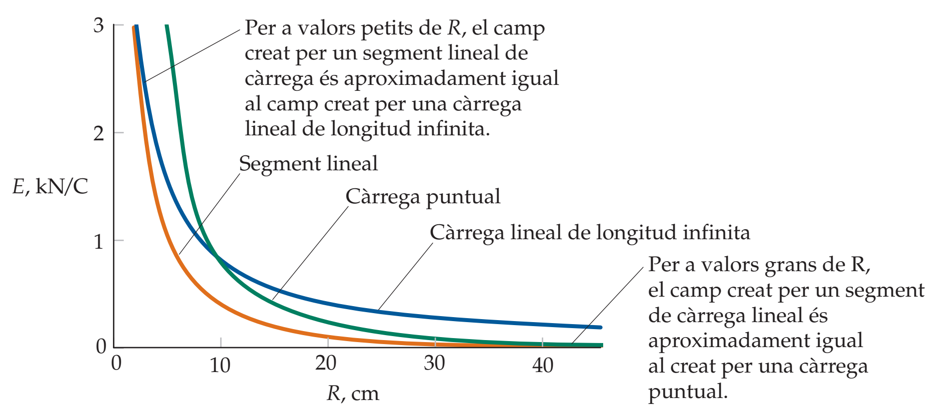


FIGURA 22.6 Representació del mòdul del camp elèctric en funció de la distància d'un segment de càrrega lineal de 10 cm de longitud, d'una càrrega puntual i d'una càrrega lineal de longitud infinita.

Exemple 22.5 $\vec{E}$ en l'eix d'una càrrega anular

Un anell prim (una circumferència) de radi a està carregat uniformement amb una càrrega total Q. Esbrineu el camp elèctric degut a aquesta càrrega en tots els punts de l'eix perpendicular al pla que passa pel centre de l'anell.

ANÀLISI Per a calcular el camp elèctric en un punt qualsevol de l'eix, partirem de $d\vec{E} = (k\,dq/r^2)\hat{r}$ (equació 22.1*a*). Dibuixarem l'anell carregat i en farem coincidir l'eix amb l'eix z, que es troba en el pla $z = 0$. Indicarem el punt de camp P sobre l'eix $+z$ i un punt S sobre l'anell.

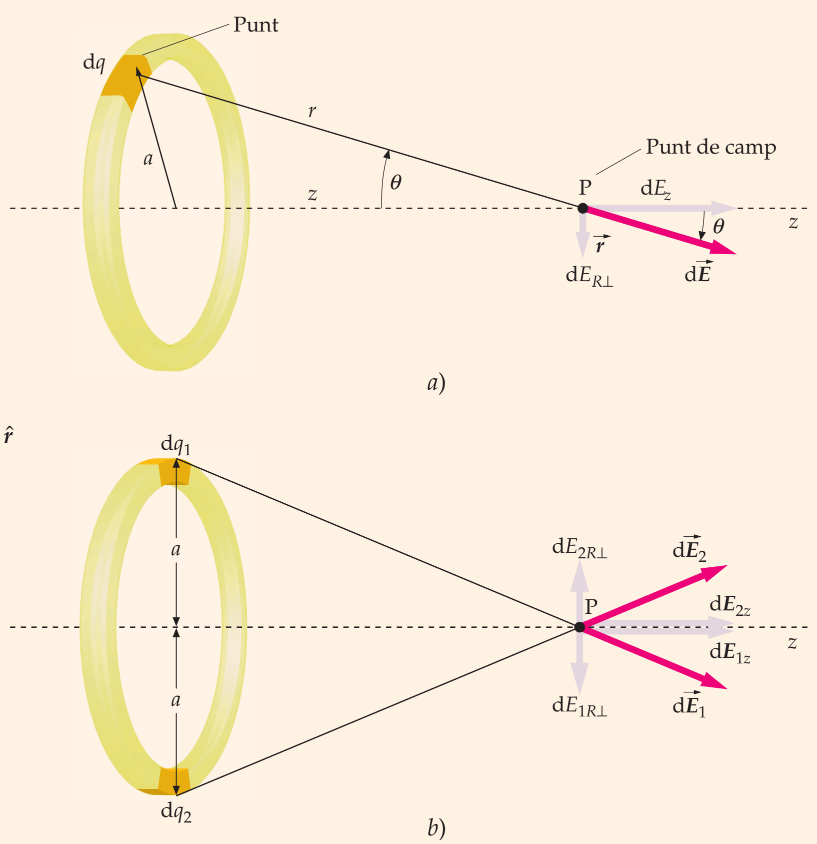


FIGURA 22.7 *a*) Anell carregat de radi a. El camp elèctric en el punt P de l'eix z degut a l'element de càrrega dq té un component al llarg de l'eix z i un de perpendicular a aquest mateix eix. *b*) Per a cada element de càrrega dq_1 n'existeix un altre de simètric oposat al primer dq_2, de manera que la suma dels components del camp perpendiculars a l'eix z, generats per tots els elements de l'anell, val zero.

RESOLUCIÓ

1r. Escrivim l'equació 22.1*a*, que ens dóna el camp elèctric degut a un element de càrrega dq:

$$d\vec{E} = \frac{k\,dq}{r^2}\hat{r}$$

2n. Dibuixem l'anell (figura 22.7*a*) amb el seu eix (eix z) i representem el vector de camp elèctric en el punt P degut a un increment de la càrrega dq situada en el punt font S:

3r. Dibuixem l'anell (figura 22.7*b*) i hi representem els components axial i radial de $\vec{E}$ per a elements de càrrega idèntics situats ens punts oposats de l'anell. El component radial es cancel·la per a cada parell d'elements, de manera que només queda el component axial:

$$E_R = 0$$

4t. Expressem el component z del camp elèctric a partir del resultat del primer pas:

$$dE_z = \frac{k\,dq}{r^2}\cos\theta = \frac{k\,dq}{r^2}\frac{z}{r} = \frac{k\,dq\,z}{r^3}$$

5è. Integrem a banda i banda de l'igual en el resultat del quart pas:

$$E_z = \int \frac{kz\,dq}{r^3} = \frac{kz}{r^3}\int dq = \frac{kz}{r^3}Q$$

6è. Apliquem el teorema de Pitàgores i obtenim que $r = \sqrt{z^2 + a^2}$:

$$\vec{E} = E_z\hat{k} + E_R\hat{R} = E_z\hat{k} + 0 = \boxed{\frac{kQz}{(z^2 + a^2)^{3/2}}\hat{k}}$$

COMPROVACIÓ Cal esperar que, per a $Q > 0$, la direcció del camp elèctric en punts de l'eix z s'allunyi de l'origen. Si prenem que z és positiva per a $+z$ i negativa, per a $-z$, el resultat del sisè pas coincideix amb aquesta previsió. A més a més, quan $z >> a$ cal esperar que E decreixi amb el quadrat de la distància a l'origen. El resultat del sisè pas concorda amb aquesta previsió, ja que quan a^2 és negligible respecte de z^2 obtenim que $E_z \approx kQ/z^2$.

EXERCICI 22.4 La figura 22.8 representa el camp E_z en funció de z al llarg de l'eix. Calculeu el punt de l'eix de l'anell en què el valor de E_z és màxim. *Pista*: $dE_z/dz = 0$, *en què el valor de* E_z *assoleix el seu màxim.*

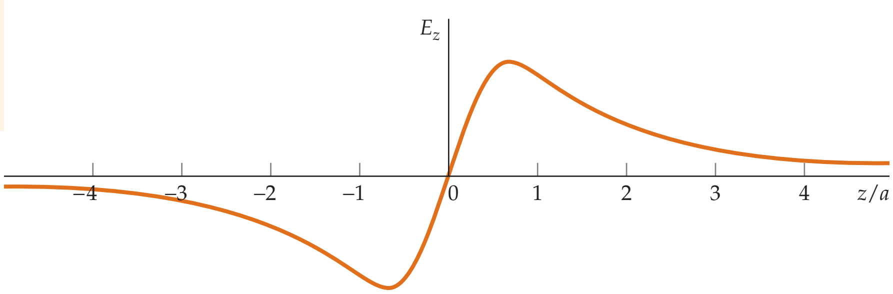


FIGURA 22.8

Exemple 22.6 Camp elèctric $\vec{E}$ en l'eix d'un anell carregat

Conceptes

En el cas de l'anell carregat de l'exemple 22.5, expliqueu per què el mòdul del camp elèctric és més petit en punts propers a l'origen, fins i tot quan l'origen és el punt de l'eix z més proper a l'anell (vegeu la figura 22.9).

ANÀLISI La clau per a solucionar aquest problema és en la figura 22.7*b*. Tornarem a dibuixar, doncs, aquesta figura amb el punt de camp P sobre l'eix z i, aquest cop, situat a prop de l'origen.

RESOLUCIÓ

1r. Dibuixem la figura 22.7*b* situant el punt de camp P a prop de l'origen:

2n. Els camps elèctrics en punts propers a l'origen deguts a cadascun dels elements simètrics (representats en la figura 22.9) són grans, però com que tenen el mateix mòdul i sentits gairebé oposats, pràcticament es cancel·len:

A prop de l'origen, el camp elèctric resultant és petit i axial.

COMPROVACIÓ En l'origen, els dos camps elèctrics són grans però de sentits oposats, de manera que llur suma és zero. Lluny de l'origen ($|z| \gg a$), els dos camps elèctrics (figura 22.7*b*) tenen pràcticament la mateixa direcció i sentit i, en conseqüència, llur suma no és nul·la.

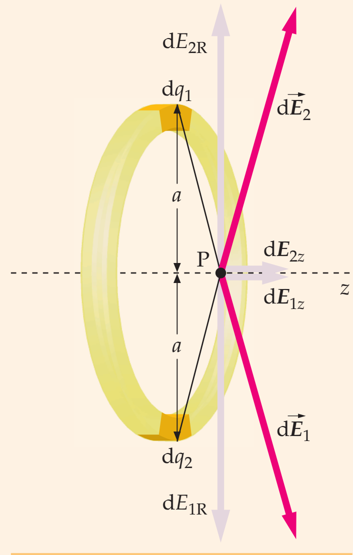


FIGURA 22.9

El camp elèctric en l'eix causat per una càrrega uniformement distribuïda sobre un anell circular de radi a i càrrega total Q és determinat per $\vec{E} = E_z\hat{k}$, en què

$$E_z = \frac{kQz}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \tag{22.8}$$

L'equació 22.8 prové de l'exemple 22.5.

Per a més informació sobre **desenvolupament binomial,** *consulteu la* **Guia de matemàtiques**

Exemple 22.7 Camp elèctric $\vec{E}$ en l'eix d'un disc carregat

Considerem un disc carregat uniformement de radi b i densitat de càrrega superficial σ. *a*) Esbrineu el camp elèctric en tots els punts de l'eix del disc. *b*) Demostreu que, per a punts sobre l'eix i allunyats del disc, el camp elèctric es pot aproximar al camp generat per una càrrega puntual igual a la del disc i situada en el seu centre. *c*) Demostreu que, per a un disc carregat uniformement de radi infinit, el camp elèctric és uniforme al llarg dels dos semiespais a banda i banda del disc.

ANÀLISI Per a calcular el camp en l'eix del disc, considerarem el disc un conjunt d'anells concèntrics carregats uniformement.

RESOLUCIÓ

a) 1r. Calculem el camp en l'eix del disc considerant el disc un conjunt d'anells concèntrics carregats. El camp d'un anell carregat uniformement amb càrrega Q i radi a es descriu en l'equació 22.8:

$$\vec{E} = E_z\hat{k}, \text{ en què } E_z = \frac{kQz}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

2n. Dibuixem el disc (figura 22.10) i el camp elèctric $d\vec{E}$ sobre el seu eix degut a un anell elemental de càrrega dq, radi a i gruix da:

3r. Substituïm dq per Q i dE_z per E_z en el resultat del primer pas. Integrem a banda i banda de l'igual per a trobar el camp resultant corresponent al disc sencer. El punt en què calculem el camp és fix, de manera que z és constant:

$$dE_z = \frac{kz\,dq}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\text{per tant, } E_z = \int \frac{kz\,dq}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = kz\int \frac{dq}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

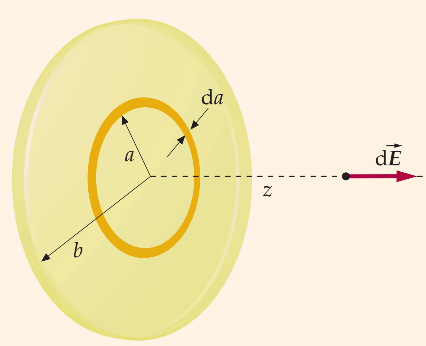


FIGURA 22.10 Un disc amb càrrega uniforme pot ser considerat una sèrie de càrregues anulars, cadascuna de radi a.

4t. Per a resoldre aquesta integral, fem un canvi de variable de q per a. La càrrega $dq = \sigma\, dA$, en què $dA = 2\pi a\, da$ correspon a l'àrea d'un anell de radi a i gruix da:

$$dq = \sigma\, dA = \sigma 2\pi a da$$

per tant, $$E_z = \pi k z \sigma \int_0^b \frac{2a da}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \pi k z \sigma \int_{z^2+0^2}^{z^2+b^2} u^{-3/2}\, du$$

en què $u = z^2 + a^2$; i $du = 2a da$

5è. Resolem la integral i en simplifiquem el resultat:

$$E_z = \pi k z \sigma \left.\frac{u^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}\right|_{z^2}^{z^2+b^2} = -2\pi k z \sigma \left(\frac{1}{\sqrt{z^2+b^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}}\right)$$

$$= \boxed{\text{signe}(z)\cdot 2\pi k \sigma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{z^2}}}\right)}$$

en què signe$(z) = z/|z|$. Per definició:[a]

$$\text{signe}\,(z) = \begin{cases} +1 & z > 0 \\ 0 & z = 0 \\ -1 & z < 0 \end{cases}$$

b) 1r. Per a $z \gg b$ (sobre l'eix $+z$ i allunyats del disc) el camp elèctric disminueix d'una manera inversament proporcional a z^2, igual que el camp degut a una càrrega puntual. Per a demostrar-ho fem servir el desenvolupament binomial:

El primer ordre del desenvolupament binomial és: $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ per a $|x| \ll 1$.

2n. Apliquem el desenvolupament binomial al resultat de dins l'arrel del cinquè pas:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{z^2}}} = \left(1 + \frac{b^2}{z^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{z^2} \qquad z^2 \gg b^2$$

3r. Substituïm aquest resultat en el cinquè pas i ho simplifiquem. [Per a $z \gg b$, signe $(z) = 1$.] Així, el resultat aproximat per al camp quan $z \gg b$ coincideix amb el del camp degut a una càrrega puntual $Q = \sigma\pi b^2$ situada en l'origen.

$$E_z \approx 2\pi k \sigma \left(1 - \left[1 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{z^2}\right]\right) = 2\pi k \sigma \frac{1}{2}\frac{b^2}{z^2} = \boxed{\frac{kQ}{z^2}} \qquad z \gg b$$

en què $Q = \sigma \pi b^2$

c) 1r. Prenem el límit en el resultat del cinquè pas de l'apartat *a* quan $b \to \infty$. El resultat que obtenim en aquest cas per a E_z és uniforme, tant en la regió $z > 0$ com en la regió $z < 0$:

$$E_z = \text{signe}\,(z)\cdot 2\pi k \sigma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\infty}}\right) = \boxed{\text{signe}(z)\cdot 2\pi k\sigma}$$

COMPROVACIÓ El camp elèctric hauria d'anar en la direcció oposada a cada costat del disc. El resultat del cinquè pas de l'apartat *a* concorda amb aquest fet.

AMPLIACIÓ Tenint en compte el resultat de l'apartat *c*, el camp elèctric és discontinu per a $z = 0$ (figura 22.11), ja que quan travessa aquest pla el camp fa un salt des de $-2\pi k\sigma\hat{\imath}$ fins a $+2\pi k\sigma\hat{\imath}$. En conseqüència, hi ha una discontinuïtat en E_z que és $4\pi k\sigma = \sigma/\epsilon_0$.

EXERCICI 22.5 En l'apartat *c* hem obtingut el valor del camp elèctric degut a una càrrega superficial uniforme en el pla complet $z = 0$. Quina fracció del camp sobre l'eix z i en el punt $z = a$ és deguda a la càrrega superficial compresa dins el cercle de radi $r = 5a$ centrat en l'origen? *Pista*: *Dividiu el resultat del cinquè pas de l'apartat a entre el resultat de l'apartat c i, a continuació, substituïu* 5a *per* r *i* a *per* z.

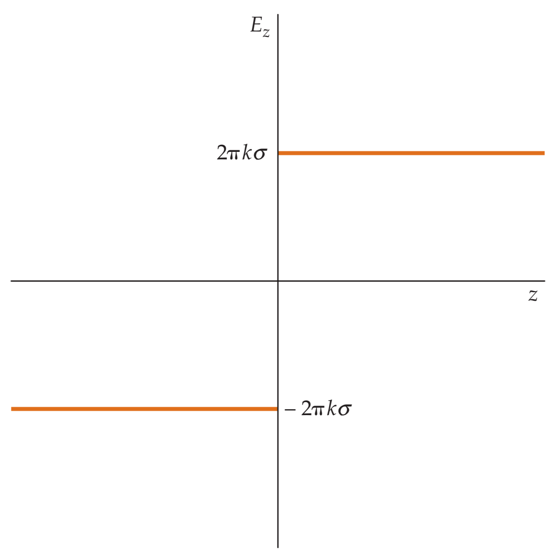


FIGURA 22.11 Gràfica que mostra la discontinuïtat de $\vec{E}$ en un pla carregat. En què s'assemblen aquesta gràfica i la de la figura 22.8?

a. Tant el programa Excel com Mathematica utilitzen la definició de la funció de *signe* tal com es proposa aquí. No obstant això, Texas Instruments la defineix de manera que signe(0) = ±1, en comptes de 0.

La resposta a l'exercici 22.5 no depèn de a sinó del quocient $r/a = 5$. Si ens situem a una distància a del pla amb càrrega superficial uniforme, el 80 % del camp és degut a la càrrega compresa a l'interior d'una circumferència de radi $5a$.

La fórmula per al camp elèctric en l'eix d'un disc circular carregat uniformement, obtinguda en l'exemple 22.7, és

$$E_z = \text{signe}(z)\cdot 2\pi k\sigma\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}}\right) \qquad 22.9$$

CAMP ELÈCTRIC EN L'EIX D'UN DISC CARREGAT UNIFORMEMENT

en què signe(z) es defineix com en el cinquè pas de l'apartat a de l'exemple 22.7 i R és el radi del disc. El camp d'un pla elèctric carregat uniformement s'obté a partir de l'equació 22.9 fent que el límit R/z tendeixi a infinit. Aleshores,

$$E_z = \text{signe}(z)\cdot 2\pi k\sigma = \text{signe}\ (z)\cdot\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \qquad 22.10$$

CAMP ELÈCTRIC D'UN PLA CARREGAT UNIFORMEMENT

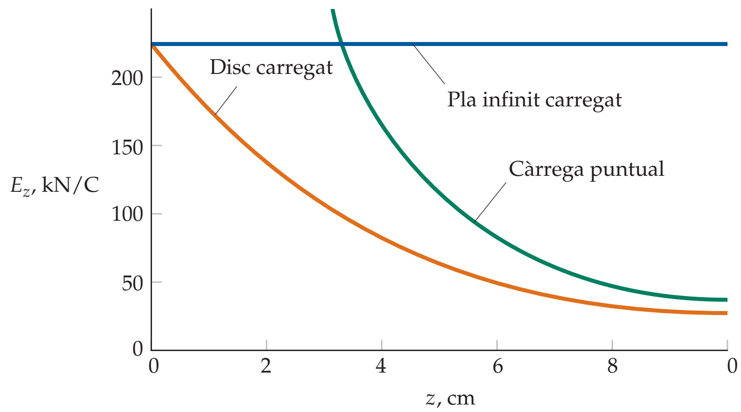


FIGURA 22.12 Considerem un disc i un punt amb càrregues equivalents, i un pla infinit i el disc amb densitats superficials de càrrega uniformes iguals. Fixem-nos que quan z tendeix a infinit, aleshores el camp generat pel disc convergeix amb l'originat per una càrrega puntual, mentre que quan z tendeix a zero, convergeix amb el causat per un pla infinit.

La figura 22.12 mostra el camp elèctric degut a una càrrega puntual, un disc amb càrrega uniforme i un pla infinit carregat, tot en funció de la posició.

A mesura que ens desplacem sobre l'eix z, el camp elèctric salta de $-2\pi k\sigma\hat{\imath}$ a $+2\pi k\sigma\hat{\imath}$ en travessar el pla $z = 0$ (figura 22.11). Així, doncs, hi ha una discontinuïtat de E_z en $z = 0$ que val $4\pi k\sigma$.

Exemple 22.8 Camp elèctric degut a dos plans infinits

En la figura 22.13, considerem dos plans infinits. L'un té una densitat de càrrega superficial $\sigma = +4{,}5\ \text{nC/m}^2$ i se situa en el pla $z = 0{,}00$ m; l'altre té una densitat $\sigma = -4{,}5\ \text{nC/m}^2$ i està situat en el pla $z = 2{,}00$ m. Determineu el camp elèctric en a) $x = 1{,}80$ m i b) $x = 5{,}00$ m.

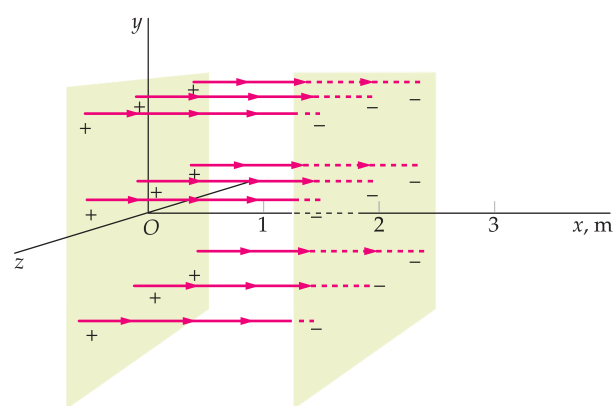


FIGURA 22.13

ANÀLISI Cada pla produeix un camp elèctric uniforme $E = \sigma/(2\epsilon_0)$. Per trobar el camp total utilitzarem la superposició. En els punts situats entre els dos plans, els camps creats per cada pla se sumen i produeixen així un camp net de σ/ϵ_0 la direcció $+x$. Per a $x > 2{,}00$ i $x < 0$, els camps creats per cada pla tenen sentits oposats i, per tant, llur suma és nul·la.

RESOLUCIÓ

a) 1r. Calculem el mòdul de E produït per cada pla:

$$E = |\sigma|/(2\epsilon_0) = (4{,}50\times 10^{-9}\ \text{N/C})/(2\cdot 8{,}85\times 10^{-12}) = 254\ \text{N/C}$$

2n. En $x = 1{,}80$ m, entre els dos plans, el camp produït per cada pla apunta en la direcció $+x$:

$$E_{x\,\text{net}} = E_1 + E_2 = 254\ \text{N/C} + 254\ \text{N/C} = \boxed{508\ \text{N/C}}$$

b) En $x = 5{,}00$ m, els camps deguts a cadascun dels plans tenen sentits oposats: $E_{x\,\text{net}} = E_1 - E_2 = \boxed{0{,}00\ \text{N/C}}$

COMPROVACIÓ Com que els dos plans tenen densitats de càrrega del mateix valor, però signe diferent, les línies de camp elèctric s'originen en el pla de càrrega positiva i acaben en el de càrrega negativa. $\vec{E}$ val zero en tots els punts tret dels que estan situats en la regió compresa entre els dos plans.

AMPLIACIÓ Fixem-nos que $E_{x\,\text{net}} = 508$ N/C no solament en el punt $x = 1{,}8$ m, sinó també en qualsevol punt situat entre els dos plans. La configuració de càrrega d'aquest exemple és la d'un condensador de plaques paral·leles, que veurem en el capítol 24.

22.2 LA LLEI DE GAUSS

La descripció qualitativa del camp elèctric mitjançant les línies de camp elèctric, que hem estudiat en el capítol 21, està relacionada amb una equació matemàtica anomenada *llei de Gauss*. La llei de Gauss és una de les equacions de Maxwell, —les equacions fonamentals de l'electromagnetisme— que analitzarem en el capítol 30. En electrostàtica, la llei de Gauss i la llei de Coulomb són equivalents. Aquesta llei permet calcular fàcilment els camps elèctrics resultants de distribucions simètriques de càrrega, com ara una escorça esfèrica o una línia infinita carregades uniformement. En aquesta secció argumentarem la validesa de la llei de Gauss basant-nos en les propietats de les línies de camp elèctric. En la secció 22.6, formularem una deducció rigorosa de la llei de Gauss.

Una superfície tancada (com, per exemple, una bombolla de sabó) és una superfície que divideix l'espai en dues regions diferents, la interior i l'exterior a aquesta superfície. La figura 22.14 representa una superfície tancada amb una forma arbitrària i un dipol a l'interior. El nombre de línies de camp elèctric que s'originen en la càrrega positiva i surten a l'exterior de la superfície depèn de la localització de la superfície. Ara bé, qualsevol línia que creua la superfície per a sortir-ne, la torna a creuar per a entrar-hi. Per tal de comptar el nombre net de línies que surten de la superfície, assignem el valor +1 a tota línia que en surti i −1, a les que hi entrin. Així, doncs, en la superfície de la figura 22.14, el balanç total de línies que creuen la superfície és zero. En les superfícies que comprenen altres distribucions de càrrega com la de la figura 22.15, *el nombre net de línies que surt de qualsevol superfície tancada és proporcional a la càrrega neta compresa a l'interior de la superfície*. Aquesta afirmació constitueix un enunciat qualitatiu de la llei de Gauss.

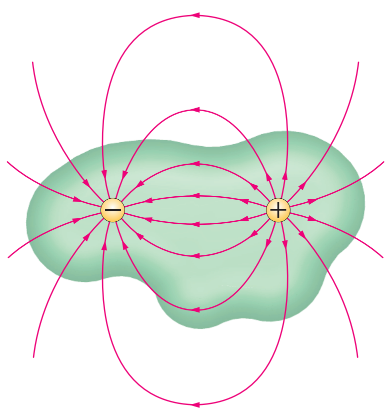


FIGURA 22.14 Dipol elèctric comprès en una superfície de forma arbitrària. El nombre de línies que surten de la superfície és exactament igual al nombre de línies que hi entren, i és indiferent on es dibuixi la superfície, sempre que totes dues càrregues s'hi incloguin a dins.

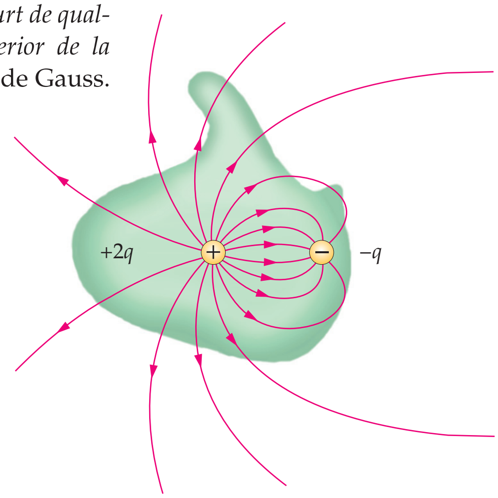


FIGURA 22.15 Superfície de forma arbitrària que inclou les càrregues $+2q$ i $-q$. Les línies de camp que acaben en $-q$, o bé no passen a través de la superfície o bé en surten i hi tornen a entrar. El nombre net de les línies que surten és el mateix que correspondria a una sola càrrega $+q$ de valor igual a la càrrega neta dins la superfície.

FLUX ELÈCTRIC

La magnitud matemàtica relacionada amb el nombre de línies de camp que travessa una superfície rep el nom de **flux elèctric**, ϕ. Per a una superfície perpendicular a $\vec{E}$ (figura 22.16) definim el flux elèctric com el producte del mòdul del camp E multiplicat per l'àrea A:

$$\phi = EA$$

Les unitats del flux elèctric són $\mathrm{N \cdot m^2/C}$. Com que el camp elèctric és proporcional al nombre de línies per unitat d'àrea, el flux elèctric serà proporcional al nombre de línies de camp que travessen la superfície.

En la figura 22.17, la superfície d'àrea A_2 no és perpendicular al camp elèctric $\vec{E}$. Tot i això, el nombre de línies que travessen la superfície d'àrea A_2 és el mateix que travessa la superfície d'àrea A_1, que sí que és perpendicular a $\vec{E}$. Les àrees estan relacionades per

$$A_2 \cos\theta = A_1 \qquad 22.11$$

en què θ és l'angle entre $\vec{E}$ i el vector unitari $\hat{n}$ perpendicular a la superfície A_2, tal com s'indica en la figura. El flux elèctric a través d'una superfície és definit per

$$\phi = \vec{E} \cdot \hat{n} A = EA\cos\theta = E_n A \qquad 22.12$$

en què $E_n = \vec{E} \cdot \hat{n}$ és el component de $\vec{E}$ perpendicular, o normal, a la superfície.

La figura 22.18 mostra una superfície corba en la qual el camp $\vec{E}$ pot variar. Si l'element d'àrea ΔA_i que escollim és prou petit, el podem considerar un pla i negligir així la variació de camp elèctric a través de l'element. Aleshores el flux de camp elèctric a través d'aquest element és

$$\Delta\phi_i = E_{ni}\,\Delta A_i = \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i\,\Delta A_i$$

en què $\hat{n}_i$ és el vector unitari perpendicular a l'element d'àrea i $\vec{E}_i$ és el camp elèctric en l'element d'àrea. Si la superfície és corba, els vectors unitaris dels diferents elements d'àrea tindran direccions diferents. El flux total a través de la superfície és la suma de $\Delta\phi_i$ estesa a tots els elements. En el límit, quan el nombre d'elements tendeix a infinit i l'àrea de cada element tendeix a zero, la suma esdevé una integral. Així, la definició general del flux elèctric és

$$\phi = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i\,\Delta A_i = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n}\,\mathrm{d}A \qquad 22.13$$

DEFINICIÓ: FLUX ELÈCTRIC

en què S és la superfície d'integració.[a] El signe del flux depèn de l'elecció que fem de la direcció del vector unitari $\hat{n}$. En escollir $\hat{n}$, dirigit cap a l'exterior de la superfície, estem determinant el signe de $\vec{E} \cdot \hat{n}$, i, en conseqüència, el signe del flux a través de la superfície.

Com que ens interessa el flux elèctric a través d'una superfície *tancada*, per convenció definim el vector normal unitari, $\hat{n}$ dirigit cap a l'exterior en cada punt. La integral estesa a una superfície tancada s'indica amb el símbol $\oint$. El flux net o total a través d'una superfície tancada S és determinat, per tant, per

$$\phi_{\text{net}} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\,\mathrm{d}A = \oint_S E_n\,\mathrm{d}A \qquad 22.14$$

a. El flux elèctric d'un vector a través d'una superfície és una operació matemàtica que s'usa per a descriure les velocitats de flux dels fluids i la transferència de calor. A més, també s'utilitza per a relacionar el camp elèctric amb les càrregues que el produeixen.

NOTA DELS EDITORS:

Segons la IUPAC, el flux elèctric ϕ es representa: ψ.

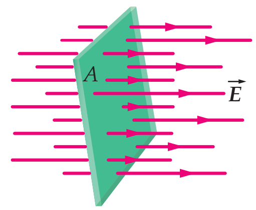


FIGURA 22.16 Línies de camp corresponents a un camp elèctric uniforme $\vec{E}$ que travessa una àrea A perpendicular al camp. El producte EA és el flux a través de la superfície.

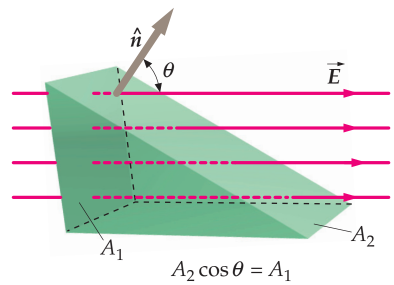


FIGURA 22.17 Línies de camp corresponents a un camp elèctric uniforme perpendicular a la de superfície d'àrea A_1, però que forma un angle θ amb el vector unitari $\hat{n}$ normal a la superfície d'àrea A_2. Quan $\vec{E}$ no és perpendicular a la superfície, el flux a través d'aquesta és E_nA, en què $E_n = E\cos\theta$ és el component de $\vec{E}$ perpendicular a la superfície. El flux que el que travessa A_2 és el mateix que el que travessa A_1.

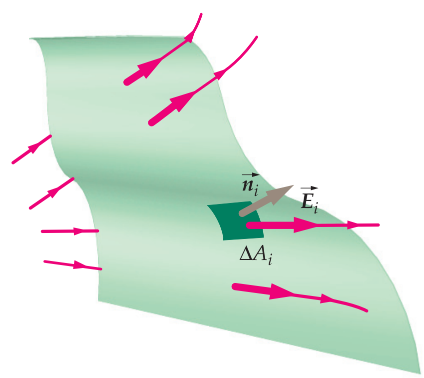


FIGURA 22.18 Quan E_n varia en el mòdul o en la direcció en cada punt de la superfície (tant perquè varia el mòdul E com perquè ho fa l'angle entre $\vec{E}$ i $\hat{n}$), l'àrea de la superfície es divideix en elements d'àrea petits ΔA_i. El flux a través de la superfície es calcula sumant $\vec{E}_i \cdot \hat{n}_i\,\Delta A_i$ per a tots els elements.

El flux net, ϕ_{net}, a través d'una superfície tancada és positiu o negatiu segons si $\vec{E}$ està dirigit predominantment cap enfora o cap endins de la superfície. En els punts de la superfície en què $\vec{E}$ està dirigit cap endins, E_n és negatiu.

ENUNCIAT QUANTITATIU DE LA LLEI DE GAUSS

La figura 22.19 mostra una superfície esfèrica de radi R centrada en la càrrega puntual Q. El camp elèctric en un punt qualsevol de la superfície és perpendicular a la superfície i val

$$E_n = \frac{kQ}{R^2}$$

El flux net de $\vec{E}$ que surt d'aquesta superfície esfèrica és

$$\phi_{net} = \oint_S E_n \, dA = E_n \oint_S dA$$

en què hem tret E_n fora de la integral, ja que és constant en tots els punts de la superfície. La integral de dA estesa a tota la superfície de radi R és precisament l'àrea total, igual a $4\pi R^2$. Amb aquest valor, i substituint kQ/R^2 per E_n, obtenim

$$\phi_{net} = \frac{kQ}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi kQ = Q/\epsilon_0 \qquad 22.15$$

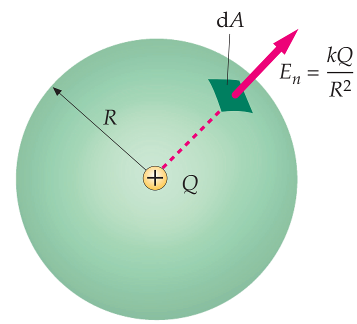


FIGURA 22.19 Superfície esfèrica que inclou la càrrega puntual Q. En superfícies esfèriques és fàcil calcular el flux net: equival al producte de E_n per l'àrea superficial, és a dir, $E_n 4\pi R^2$.

Així, doncs, el flux net a través d'una superfície esfèrica que té una càrrega puntual Q en el centre és independent del radi de l'esfera R i és igual a Q dividit entre ϵ_0. Aquest resultat concorda amb la nostra observació anterior, segons la qual el nombre net de línies que travessen una superfície tancada és proporcional a la càrrega neta que conté a l'interior. *Aquest nombre de línies és el mateix per a qualsevol superfície que inclogui la càrrega, independentment de la forma que tingui.* Per tant, el flux net a través d'una *superfície qualsevol* que encercli una càrrega puntual Q és igual a ϕ.

Podem extrapolar aquest resultat a sistemes de més d'una càrrega. En la figura 22.20, la superfície inclou dues càrregues puntuals, q_1 i q_2, i hi ha una tercera càrrega puntual q_3 fora de la superfície. Com que el camp elèctric en qualsevol punt de la superfície és el vector suma dels camps elèctrics produïts per cada una de les tres càrregues, el flux net $\phi_{net} = \oint_S (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3) \cdot \hat{n} \, dA$ a través de la superfície serà precisament la suma dels fluxos deguts a les càrregues individuals ($\phi_{net} = \Sigma\phi_i$, en què $\phi_i = \oint_S \vec{E}_i \cdot \hat{n} \, dA$). El flux ϕ_3 originat per la càrrega q_3 que és fora de la superfície) és zero, ja que cada línia de camp procedent de q_3 que entra a la superfície en un punt en surt per algun altre. El flux a través de la superfície degut a la càrrega q_1 és $\phi_1 = q_1/\epsilon_0$ i el produït per la càrrega q_2 és $\phi_2 = q_2/\epsilon_0$. El flux net a través de la superfície és igual a $\phi_{net} = (q_1 + q_2)/\epsilon_0$, i pot ser positiu, negatiu o zero, depenent dels signes i valors de les dues càrregues q_1 i q_2.

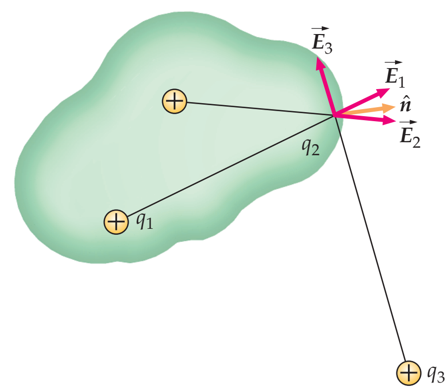


FIGURA 22.20 Superfície que inclou les càrregues puntuals q_1 i q_2, però no q_3. El flux net que surt d'aquesta superfície és $4\pi k(q_1 + q_2)$.

El flux net a través d'una superfície tancada és igual a la càrrega neta a l'interior de la superfície dividida per ϵ_0:

$$\phi_{net} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dA = \oint_S E_n \, dA = \frac{Q_{interior}}{\epsilon_0} \qquad 22.16$$

LLEI DE GAUSS

Aquest resultat és la **llei de Gauss**, de la qual es desprèn que el camp elèctric degut a una càrrega puntual aïllada varia de manera inversament proporcional al quadrat de la distància a la càrrega. Aquesta propietat del camp elèctric és la que permet dibuixar un nombre fix de línies de camp des d'una càrrega i fa que la densitat d'aquestes línies sigui proporcional a la intensitat del camp.

La llei de Gauss és vàlida per a totes les superfícies i distribucions de càrrega. Com veurem en la secció següent, es pot utilitzar per a calcular el camp elèctric en algunes distribucions especials de càrrega altament simètriques. Si bé, per a distribucions de càrrega estàtiques, la llei de Gauss i la llei de Coulomb són equivalents, la llei de Gauss és més general, ja que també es pot aplicar en distribucions de càrrega no estàtiques.

Exemple 22.9 Flux a través d'una superfície tancada que es pot descompondre en parts

Considerem un camp elèctric $\vec{E} = +(200\ \mathrm{N/C})\hat{k}$ per a $z > 0$ i $\vec{E} = -(200\ \mathrm{N/C})\hat{k}$ per a $z < 0$. Hi col·loquem una superfície cilíndrica imaginària de 20 cm de longitud i radi $R = 5{,}00$ cm centrada en l'origen i amb el seu eix al llarg de l'eix z, de manera que un dels extrems se situa en $z = +10$ cm i l'altre, en $z = -10$ cm (figura 22.21). *a*) Quant val el flux net del camp que surt de la superfície del cilindre? *b*) Quant val la càrrega neta continguda a l'interior del cilindre?

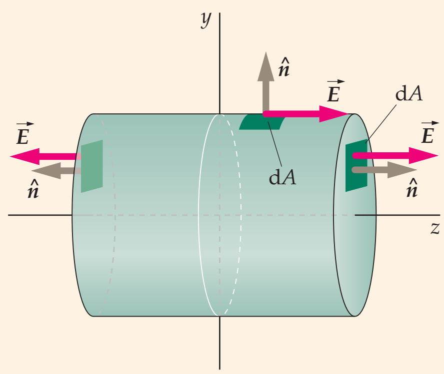


FIGURA 22.21

ANÀLISI Descompondrem la superfície cilíndrica en tres parts: dues bases planes i una superfície lateral. Calcularem el flux de $\vec{E}$ en cada part de manera separada. Per fer-ho, dibuixarem el vector normal $\hat{n}$ cap enfora en un punt arbitrari de la part i indicarem el vector $\vec{E}$ en aquest punt. Si $E_n = \vec{E} \cdot \hat{n}$ és el mateix en tots els punts d'aquesta part, aleshores el flux total d'aquesta part serà $E_n A$, en què A n'és l'àrea. El flux net a través de tota la superfície tancada s'obtindrà sumant els fluxos en les superfícies individuals. Mitjançant la llei de Gauss, relacionarem el flux net amb la càrrega neta interior (equació 22.16).

RESOLUCIÓ

a) 1r. Dibuixem la superfície cilíndrica tancada. Indiquem el vector normal $\hat{n}$ i el vector $\vec{E}$ en cadascuna de les parts de la superfície del cilindre (figura 22.21).

2n. Calculem el flux que surt de la base de la dreta del cilindre situada en $z = +10$ cm, el vector normal de la qual és $\hat{n} = \hat{k}$:

$$\phi_{\text{dreta}} = \vec{E}_{\text{dreta}} \cdot \hat{n}_{\text{dreta}} A = \vec{E}_{\text{dreta}} \cdot \hat{k}\pi R^2 = +(200\ \mathrm{N/C})\hat{k} \cdot \hat{k}(\pi)(0{,}050\,0\ \mathrm{m})^2$$
$$= 1{,}57\ \mathrm{N \cdot m^2/C}$$

3r. Determinem el flux que surt de la base esquerra del cilindre situada en $z = -10$ cm, de vector normal $\hat{n} = -\hat{k}$:

$$\phi_{\text{esquerra}} = \vec{E}_{\text{esquerra}} \cdot \hat{n}_{\text{esquerra}} A = \vec{E}_{\text{esquerra}} \cdot (-\hat{k})\pi R^2$$
$$= -(200\ \mathrm{N/C})\hat{k} \cdot (-\hat{k})(\pi)(0{,}050\,0\ \mathrm{m})^2$$
$$= 1{,}57\ \mathrm{N \cdot m^2/C}$$

4t. Determinem el flux que surt per la superfície lateral, de vector normal $\hat{n}$ en la direcció radial perpendicular a l'eix z:

$$\phi_{\text{lateral}} = \vec{E}_{\text{lateral}} \cdot \hat{n}_{\text{lateral}} A = 0$$

($\phi_{\text{lateral}} = 0$, perquè $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$, en tots els punts de la superfície lateral.)

5è. El flux net és la suma dels fluxos a través de totes les superfícies:

$$\phi_{\text{net}} = \phi_{\text{dreta}} + \phi_{\text{esquerra}} + \phi_{\text{lateral}} = 1{,}57\ \mathrm{N \cdot m^2/C} + 1{,}57\ \mathrm{N \cdot m^2/C} + 0$$
$$= \boxed{3{,}14\ \mathrm{N \cdot m^2/C}}$$

b) La llei de Gauss relaciona la càrrega interior amb el flux net:

$$Q_{\text{interior}} = \epsilon_0 \phi_{\text{net}} = (8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})(3{,}14\ \mathrm{N \cdot m^2/C})$$
$$= \boxed{2{,}78 \times 10^{-11}\ \mathrm{C} = 27{,}8\ \mathrm{pC}}$$

COMPROVACIÓ El flux a través de cadascuna de les bases del cilindre no depèn de la longitud que tingui. Aquest resultat és el que podíem esperar per a un camp elèctric que no varia amb la distància al pla $z = 0$.

AMPLIACIÓ El flux net no depèn de la longitud del cilindre, la qual cosa vol dir que tota la càrrega està situada en el pla $z = 0$.

22.3 CÀLCUL DEL CAMP ELÈCTRIC $\vec{E}$ MITJANÇANT LA LLEI DE GAUSS EN CONFIGURACIONS SIMÈTRIQUES

En configuracions de càrrega altament simètriques, normalment és més senzill calcular el camp elèctric mitjançant la llei de Gauss que no pas utilitzant la llei de Coulomb. Considerarem tres casos de simetria: **simetria cilíndrica** (o **lineal**), quan la densitat de càrrega depèn únicament de la distància a l'eix; **simetria plana**, quan la densitat de càrrega depèn només de la distància a un pla, i **simetria esfèrica** (o **puntual**), quan la densitat de càrrega depèn sols de la distància a un punt.

ESTRATÈGIA DE RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

Càlcul de $\vec{E}$ mitjançant la llei de Gauss

ANÀLISI Comprovarem si la configuració de càrrega compleix alguna de les tres simetries. Si no és així, caldrà trobar un altre mètode per a calcular el camp elèctric. Si en compleix alguna, en dibuixarem la distribució de càrrega i establirem el mòdul, la direcció i el sentit de $\vec{E}$ tenint en compte les propietats de simetria.

RESOLUCIÓ

1r. Dibuixeu la superfície imaginària tancada, anomenada **superfície gaussiana** (per exemple, el cilindre de l'exemple 22.9). Cal escollir aquesta superfície de manera que, en cada part de la superfície, el camp o bé valgui zero, o bé sigui normal a la superfície amb E_n igual en tots els punts de la part, o bé hi sigui paral·lel. Per a una configuració amb simetria cilíndrica (lineal), la superfície gaussiana és un cilindre coaxial respecte de l'eix de simetria; per a una de plana, la superfície gaussiana és un cilindre perpendicular al pla amb l'eix de simetria perpendicular al pla de simetria, i, per a la configuració esfèrica (puntual), la superfície gaussiana és una esfera centrada en el punt de simetria. Dibuixeu en cada punt de la superfície gaussiana l'element d'àrea dA, el vector normal $\hat{n}$ i el camp elèctric $\vec{E}$.

2n. Les superfícies tancades cilíndriques són compostes per tres parts, mentre que les esfèriques només per una. El flux a través de cada part d'una superfície gaussiana escollida adequadament és igual a E_nA, en què E_n és el component de $\vec{E}$ normal a la superfície de la part i A n'és l'àrea. Per a trobar el flux total que surt de tota la superfície, només caldrà sumar els fluxos de cada part.

3r. Calculeu la càrrega total compresa a l'interior de la superfície gaussiana.

4t. Apliqueu la llei de Gauss per relacionar el camp E_n i les càrregues interiors i aïlleu E_n.

COMPROVACIÓ DE CONCEPTES 22.1

En la llei de Gauss, el camp elèctric $\vec{E}$ correspon només al que produeixen les càrregues interiors a la superfície gaussiana o correspon al que produeixen les càrregues tant internes com externes a aquesta superfície?

Exemple 22.10 Camp elèctric $\vec{E}$ degut a una làmina amb càrrega uniforme

Considerem una làmina de plàstic prou llarga per a ser considerada infinita, amb càrrega uniforme, gruix $2a$ i situada en la regió compresa entre els plans $z = -a$ i $z = +a$. Esbrineu el camp elèctric en tots els punts de l'espai degut a aquesta configuració. La càrrega per unitat de volum del plàstic és ρ.

ANÀLISI El sistema té simetria plana, amb $z = 0$ com a pla de simetria. Fent ús dels arguments de simetria esmentats anteriorment, trobarem la direcció i el sentit del camp elèctric en qualsevol punt de l'espai i tot seguit aplicarem la llei de Gauss per obtenir-ne el mòdul.

RESOLUCIÓ

1r. Utilitzem les propietats de simetria per a determinar la direcció de $\vec{E}$. Com que la làmina és infinita, no existeix cap direcció preferent paral·lela a la làmina:

Si $\rho > 0$, $\vec{E}$ apunta directament cap enfora del pla $z = 0$ i si $\rho < 0$, $\vec{E}$ es dirigeix cap al pla $z = 0$. En el pla $z = 0$, el camp és nul.

2n. Fem un esquema de la configuració de càrrega, la superfície gaussiana de la qual és un cilindre perpendicular al pla de simetria $z = 0$, de manera que el pla travessa el cilindre pel centre. El cilindre s'estén des de $-z$ fins a $+z$ (figura 22.22):

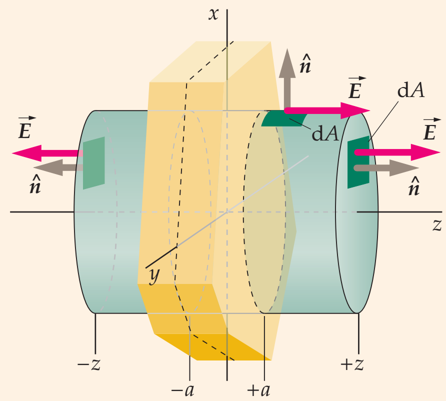


FIGURA 22.22 Superfície gaussiana per al càlcul del camp elèctric degut a un pla carregat infinit (només hi ha representat el segment del pla que és a l'interior de la superfície gaussiana). A les bases d'aquest cilindre, $\vec{E}$ és perpendicular a la superfície i de valor constant. En la superfície lateral, $\vec{E}$ és paral·lel a la superfície.

3r. Escrivim la llei de Gauss (equació 22.16):

$$\phi_{\text{net}} = \oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$$

4t. El flux que surt de la superfície equival a la suma dels fluxos de cada part de la superfície gaussiana. Dibuixem $\hat{n}$ i $\vec{E}$ en un element d'àrea de cada part de la superfície (figura 22.22):

$$\phi_{\text{net}} = \phi_{\text{base esquerra}} + \phi_{\text{base dreta}} + \phi_{\text{lateral}}$$

en què $\phi_{\text{base esquerra}} = \int_{\text{base esquerra}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA$

$$\phi_{\text{base dreta}} = \int_{\text{base dreta}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA$$

$$\phi_{\text{lateral}} = \int_{\text{lateral}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA$$

5è. Com que $\vec{E}\cdot\hat{n}$ és zero en tots els punts sobre la superfície lateral del cilindre, el flux en aquesta superfície també serà zero:

$$\phi_{\text{lateral}} = 0$$

6è. $\vec{E}$ és uniforme a la base dreta del cilindre, de manera que el podem treure fora de la integral i queda $\vec{E}\cdot\hat{n} = E_n$; A és l'àrea de la base dreta:

$$\phi_{\text{base dreta}} = \int_{\text{base dreta}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA = \int_{\text{base dreta}} E_n\,dA$$
$$= E_n \int_{\text{base dreta}} dA = E_n A$$

7è. Les dues bases del cilindre es troben a la mateixa distància del pla de simetria $z = 0$, de manera que $\vec{E}$ a l'esquerra serà igual i de sentit oposat que $\vec{E}$ a la dreta. Els vectors normals a la superfície de cada base també tenen sentits oposats. Així, $\vec{E}\cdot\hat{n} = E_n$ té el mateix valor en les dues bases i, per tant, el flux a través de les dues bases serà idèntic:

$\vec{E}\cdot\hat{n} = E_n$ és el mateix en les dues bases

$$\therefore\ \phi_{\text{base esquerra}} = \phi_{\text{base dreta}} = E_n A$$

8è. Sumem els fluxos individuals per obtenir el flux net de tota la superfície:

$$\phi_{\text{net}} = \phi_{\text{base esquerra}} + \phi_{\text{base dreta}} + \phi_{\text{lateral}} = E_n A + E_n A + 0 = 2E_n A$$

9è. Aïllem la càrrega a l'interior de la superfície gaussiana. El volum d'un cilindre és igual a la superfície de la secció transversal multiplicada per la longitud del cilindre. La longitud del cilindre és $2z$:

$$Q_{\text{interior}} = \rho A 2a \qquad (z \geq a)$$
$$Q_{\text{interior}} = \rho A 2z \qquad (z \leq a)$$

10è. Substituïm els resultats dels passos vuitè i novè en $\phi_{\text{net}} = Q_{\text{interior}}/\epsilon_0$ (el resultat del tercer pas) i aïllem E_n en la base de la dreta:

Per a $|z| \geq a$, $2E_n A = \rho A 2a/\epsilon_0$ per tant, $E_n = \rho a/\epsilon_0$.
Per a $-a \leq z \leq a$, $2E_n A = \rho A 2|z|/\epsilon_0$ per tant, $E_n = \rho|z|/\epsilon_0$.

11è. Determinem $\vec{E}$ en funció de z. En la regió $z < 0$, $\hat{n} = -\hat{k}$, de manera que $E_z = -E_n$, la qual cosa indica que $\vec{E}$ va en la direcció $-z$ i, per tant, E_z és negatiu:

$$\vec{E} = E_z\hat{k} = \boxed{\begin{cases} -(\rho a/\epsilon_0)\hat{k} & (z \leq -a) \\ (\rho z/\epsilon_0)\hat{k} & (-a \leq z \leq a) \\ +(\rho a/\epsilon_0)\hat{k} & (z \geq +a) \end{cases}}$$

o bé

$$\vec{E} = E_z\hat{k} = \boxed{\begin{cases} \text{sign}(z)\cdot(\rho a/\epsilon_0)\hat{k} & (|z| \geq a) \\ \text{sign}(z)\cdot(\rho |z|/\epsilon_0)\hat{k} & (|z| \leq a) \end{cases}}$$

COMPROVACIÓ El camp elèctric té unitats N/C. Del resultat de l'onzè pas, inferim que $\rho a/\epsilon_0$ s'hauria d'expressar amb les mateixes unitats. Efectivament, és així, ja que $\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)$, ρ es mesura en C/m^3 i a, en m.

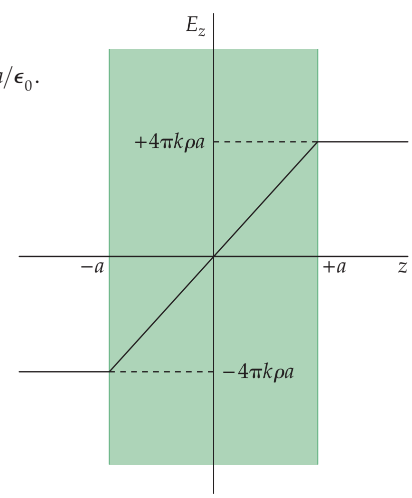


FIGURA 22.23 Representació gràfica de E_z en funció de z per a una làmina infinita de gruix $2a$ i amb una densitat de càrrega uniforme ρ.

AMPLIACIÓ A l'exterior de la làmina, el camp elèctric equival al d'un pla carregat uniformement (equació 22.10) amb $\sigma = 2\rho a$. La figura 22.23 representa E_z produït per la làmina en funció de z. Podem comparar aquesta gràfica amb la de la figura 22.12 que representa E_z en funció de z per a un pla carregat. Si tenim present que $2\pi k = 1/(2\epsilon_0)$, les dues gràfiques són perfectament comparables.

Podem fer servir la llei de Gauss per a deduir la llei de Coulomb. A aquest efecte, aplicarem la llei de Gauss per trobar el camp elèctric a una distància r d'una càrrega puntual q. Suposem que la càrrega se situa en l'origen i escollim una superfície gaussiana esfèrica de radi r i centrada en la càrrega. El vector normal a aquesta superfície $\hat{n}$ correspon al vector unitari $\hat{r}$. Per simetria, $\vec{E}$ és radial i està dirigit o bé cap enfora o bé cap endins de la superfície, de manera que $\vec{E} = E_r\hat{r}$. En conseqüència, el component de $\vec{E}$ normal a la superfície equivaldrà al component radial de $\vec{E}$. És a dir, $E_n = \vec{E}\cdot\hat{n} = \vec{E}\cdot\hat{r} = E_r$. Així, doncs, el mòdul de $\vec{E}$ pot dependre de la distància a la càrrega, però no pas del sentit del vector que l'uneix a aquesta. Per tant, E_n té el mateix valor en tota la superfície. El flux net de $\vec{E}$ a través de la superfície esfèrica de radi r és, doncs:

$$\phi_{\text{net}} = \oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA = \oint_S E_n\,dA = E_n\oint_S dA = E_r 4\pi r^2$$

en què $\oint_S dA = 4\pi r^2$ (l'àrea total de la superfície esfèrica). Com que la càrrega total a l'interior de la superfície es redueix només a la càrrega puntual q, la llei de Gauss ens dóna

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Aïllem E_r i queda

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

que és la llei de Coulomb. Així, doncs, hem deduït la llei de Coulomb a partir de la llei de Gauss. Tenint en compte que en la secció 22.6 hem deduït la llei de Gauss a partir de la llei de Coulomb, queda demostrat que per a càrregues estàtiques les dues lleis són equivalents.

Exemple 22.11 Camp elèctric $\vec{E}$ degut a una escorça esfèrica prima carregada

Calculeu el camp elèctric degut a una escorça esfèrica prima carregada uniformement de radi R i càrrega total Q.

ANÀLISI Aquesta configuració de càrrega depèn exclusivament de la distància al centre de l'escorça esfèrica i, per tant, té simetria esfèrica (o puntual), la qual cosa implica que $\vec{E}$ serà radial i el mòdul dependrà només de la distància r mesurada des del centre de l'esfera. Com a superfície gaussiana prendrem una superfície esfèrica de radi r i concèntrica amb l'esfera carregada inicial.

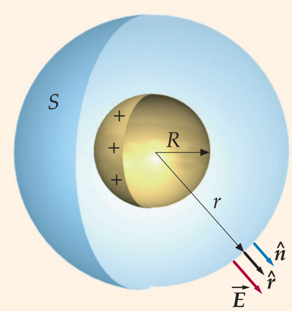


FIGURA 22.24 Superfície gaussiana esfèrica de radi $r > R$ per al càlcul del camp elèctric a l'exterior d'una escorça esfèrica prima de radi R carregada uniformement.

RESOLUCIÓ

1r. Dibuixem la configuració de càrrega i la superfície gaussiana esfèrica S de radi $r > R$. També hi indiquem un element d'àrea dA, la normal $\hat{n}$ i el camp elèctric $\vec{E}$ sobre l'element d'àrea (figura 22.24):

2n. Expressem la llei de Gauss (equació 22.16):

$$\phi_{\text{net}} = \oint_S E_n\,dA = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$$

3r. El valor de E_n és idèntic en tota la superfície S, de manera que el podem treure fora de la integral:

$$E_n\oint_S dA = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$$

4t. La integral de l'element d'àrea estesa sobre tota la superfície S és l'àrea de l'esfera, que val $4\pi r^2$:

$$E_n 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$$

5è. Per simetria, $E_n = E_r$. Així, substituïm E_n per E_r i aïllem E_n:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_{\text{interior}}}{r^2}$$

6è. Per a $r > R$, $Q_{\text{interior}} = Q$, mentre que, per a $r < R$, $Q_{\text{interior}} = 0$:

$$\vec{E} = E_r\hat{r}, \quad \text{en què} \quad \boxed{\begin{array}{ll} E_r = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} & r > R \\ E_r = 0 & r < R \end{array}}$$

COMPROVACIÓ En punts exteriors de l'escorça carregada, el camp elèctric equival al d'una càrrega puntual Q situada al centre, tal com podíem esperar per a $r \gg R$.

AMPLIACIÓ També podem obtenir el resultat del sisè pas integrant directament la llei de Coulomb, però el càlcul resulta molt més complex.

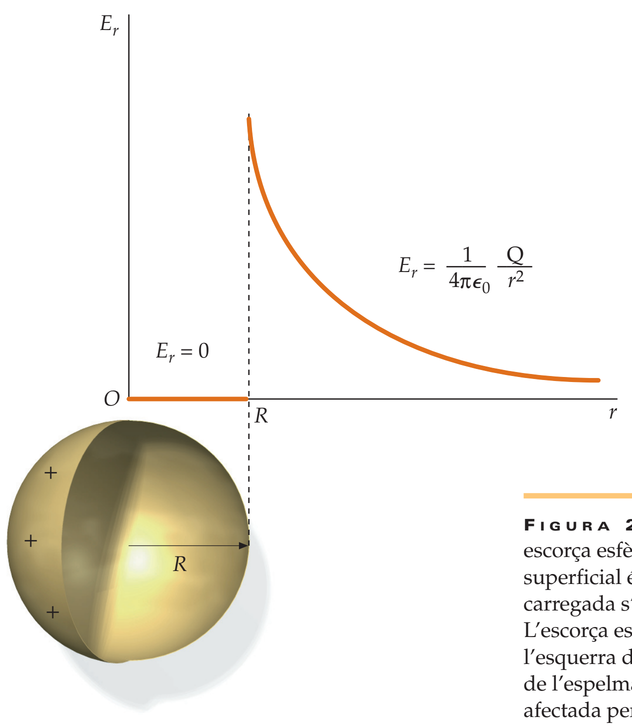
En la figura 22.25 es representa E_r en funció de r per a una distribució de càrrega d'una escorça esfèrica. Fixem-nos que, novament, en $r = R$ el camp elèctric és discontinu i la densitat de càrrega superficial és $\sigma = Q/(4\pi R^2)$. Just a fora de l'escorça, el camp elèctric és $E_r = Q/(4\pi\epsilon_0 R^2) = \sigma/\epsilon_0$, ja que $\sigma = Q/4\pi R^2$. Com que el camp a l'interior de l'escorça és nul, el camp elèctric és discontinu en $r = R$ amb un salt que val σ/ϵ_0.

El camp elèctric d'una escorça esfèrica prima carregada uniformement és $\vec{E} = E_r\hat{r}$, en què

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad r > R \qquad 22.17a$$

$$E_r = 0 \qquad r < R \qquad 22.17b$$

a)



b)

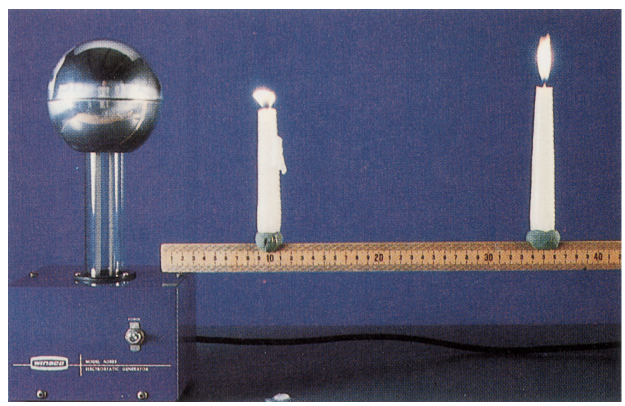


FIGURA 22.25 *a*) Gràfica de E_r en funció de r per a una distribució de càrrega d'una escorça esfèrica prima. El camp elèctric és discontinu en $r = R$, en què la densitat de càrrega superficial és σ. *b*) La disminució amb la distància del camp E_r degut a una escorça esfèrica carregada s'evidencia en observar l'efecte que té en les flames d'aquestes dues espelmes. L'escorça esfèrica del generador de Van der Graaff (que estudiarem en el capítol 23) situat a l'esquerra de la imatge, té una gran càrrega negativa que atreu els ions positius de la flama de l'espelma més propera. La flama de la dreta, més allunyada, no es veu sensiblement afectada per la presència del camp. (*Runk / Schoenberger de Grant Heilmann.*)

Exemple 22.12 Camp elèctric degut a una càrrega puntual i una escorça esfèrica carregada

Una escorça esfèrica de radi $R = 3{,}00$ m centrada en l'origen té una densitat de càrrega superficial $\sigma = 3{,}00\ \mathrm{nC/m^2}$. Considerem una càrrega puntual $q = 250$ nC situada sobre l'eix y en $y = 2{,}00$ m. Determineu el camp elèctric en l'eix x en *a*) $x = 2{,}00$ m i *b*) $x = 4{,}00$ m.

ANÀLISI Trobarem el camp degut a la càrrega puntual i el degut a l'escorça esfèrica de manera separada i els sumarem seguint el principi de superposició. En l'apartat *a*, el punt de camp se situa a l'interior de l'escorça, de manera que el camp total es deu únicament a la càrrega puntual (figura 22.26*a*). En l'apartat *b*, el punt de camp és fora de l'escorça, de manera que la podem considerar una càrrega puntual en l'origen. Així, només caldrà sumar els camps deguts a les dues càrregues puntuals (figura 22.26*b*).

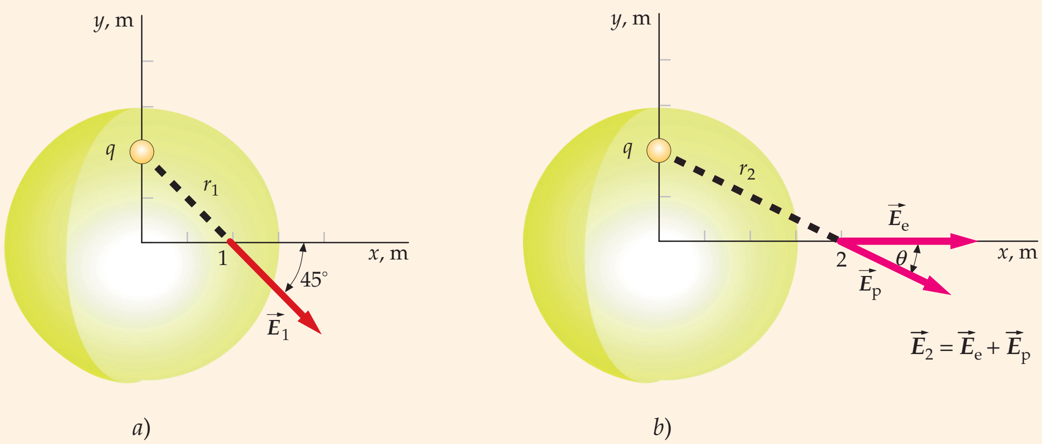


FIGURA 22.26

RESOLUCIÓ

a) 1r. A l'interior de l'escorça, $\vec{E}_1$ es deu únicament a la càrrega puntual:
$$\vec{E}_1 = \frac{kq}{r_1^2}\hat{r}_1$$

2n. Calculem el quadrat de la distància r_1:
$$r_1^2 = (2{,}00\ \mathrm{m})^2 + (2{,}00\ \mathrm{m})^2 = 8{,}00\ \mathrm{m^2}$$

3r. Utilitzem r_1 per a calcular el mòdul del camp:
$$E_1 = \frac{kq}{r_1^2} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})(250 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})}{8{,}00\ \mathrm{m^2}} = 281\ \mathrm{N/C}$$

4t. En la figura 22.26*a*, podem apreciar que el camp forma un angle de 45° amb l'eix x:
$$\theta_1 = 45{,}0°$$

5è. Expressem $\vec{E}_1$ en funció dels seus components:
$$\vec{E}_1 = E_{1x}\hat{i} + E_{1y}\hat{j} = E_1 \cos 45{,}0°\ \hat{i} - E_1 \sin 45{,}0°\ \hat{j}$$
$$= (281\ \mathrm{N/C}) \cos 45{,}0°\ \hat{i} - (281\ \mathrm{N/C}) \sin 45{,}0°\ \hat{j}$$
$$= \boxed{(199\hat{i} - 199\hat{j})\ \mathrm{N/C}}$$

b) 1r. Per a punts exteriors a l'escorça, podem considerar l'escorça una càrrega puntual situada en l'origen, de manera que la direcció del camp $\vec{E}_e$ serà al llarg de l'eix x:
$$\vec{E}_e = \frac{kQ}{x_2^2}\hat{i}$$

2n. Calculem la càrrega total Q sobre l'escorça:
$$Q = \sigma 4\pi R^2 = (3{,}00\ \mathrm{nC/m^2})4\pi(3{,}00\ \mathrm{m})^2 = 339\ \mathrm{nC}$$

3r. Utilitzem Q per a calcular el camp degut a l'escorça:
$$E_e = \frac{kQ}{x_2^2} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})(339 \times 10^{-9}\mathrm{C})}{(4{,}00\ \mathrm{m})^2} = 190\ \mathrm{N/C}$$

4t. El camp produït per la càrrega puntual és:
$$\vec{E}_p = \frac{kq}{r_2^2}\hat{r}_2$$

5è. Calculem el quadrat de la distància entre la càrrega puntual q situada sobre l'eix y i el punt de camp situat en $x = 4{,}00$ m:

$$r_2^2 = (2{,}00\text{ m})^2 + (4{,}00\text{ m})^2 = 20{,}0\text{ m}^2$$

6è. Calculem el mòdul del camp degut a la càrrega puntual:

$$E_\text{p} = \frac{kq}{r_2^2} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(250 \times 10^{-9}\text{ C})}{20{,}0\text{ m}^2} = 112\text{ N/C}$$

7è. Aquest camp forma un angle θ amb l'eix x, en què:

$$\tan\theta = \frac{2{,}00\text{ m}}{4{,}00\text{ m}} = 0{,}500 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}0{,}500 = 26{,}6°$$

8è. Els components x i y del camp elèctric net seran, per tant:

$$E_x = E_{\text{p}x} + E_{\text{e}x} = E_\text{p}\cos\theta + E_\text{e}$$
$$= (112\text{ N/C})\cos 26{,}6° + 190\text{ N/C} = 290\text{ N/C}$$
$$E_y = E_{\text{p}y} + E_{\text{e}y} = -E_\text{p}\sin\theta + 0$$
$$= -(112\text{ N/C})\sin 26{,}6° = -50{,}0\text{ N/C}$$
$$\vec{E}_2 = \boxed{(290\hat{\imath} - 50{,}0\hat{\jmath})\text{ N/C}}$$

COMPROVACIÓ El resultat del vuitè pas de l'apartat *b* concorda qualitativament amb la figura 22.26*b*. És a dir, E_x és positiu, E_y és negatiu i $|E_y| < E_x$.

AMPLIACIÓ Si coneixem els components x, y i z d'un vector, aquest queda determinat. En aquests casos, el component z és zero.

CAMP ELÈCTRIC $\vec{E}$ DEGUT A UNA ESFERA CARREGADA UNIFORMEMENT

Exemple 22.13 Camp elèctric $\vec{E}$ degut a una esfera massissa carregada uniformement

Determineu el camp elèctric dins i fora d'una esfera massissa de radi R i càrrega total Q distribuïda uniformement per tot el volum de l'esfera amb una densitat de càrrega $\rho = Q/V$, en què $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ és el volum de l'esfera.

ANÀLISI Aquesta configuració de càrrega presenta simetria esfèrica; per tant, el camp elèctric serà radial. Escollirem una superfície gaussiana esfèrica de radi r (figures 22.27*a* i 22.27*b*). Com que en aquesta superfície E_n és constant, $E_n = E_r$. La llei de Gauss ens relacionarà E_r amb la càrrega total interior a la superfície gaussiana.

RESOLUCIÓ

1r. Dibuixem una esfera carregada de radi R i una superfície gaussiana esfèrica de radi r (figura 22.27*a*, per a $r > R$, i figura 22.27*b*, per a $r < R$):

2n. Relacionem el flux que travessa la superfície gaussiana amb el camp elèctric E_r. En tots els punts de la superfície, $\hat{n} = \hat{r}$ i E_r té el mateix valor:

$$\phi_\text{net} = \vec{E}\cdot\hat{n}A = \vec{E}\cdot\hat{r}A = E_r 4\pi r^2$$

(L'àrea d'una superfície esfèrica de radi r és $4\pi r^2$.)

3r. Apliquem la llei de Gauss per relacionar el camp amb la càrrega total que hi ha a l'interior de la superfície:

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q_\text{interior}}{\epsilon_0}$$

4t. Determinem Q_interior per a tots els valors de r. La densitat de càrrega és $\rho = Q/V$, en què $V = \frac{4}{3}\pi R^3$:

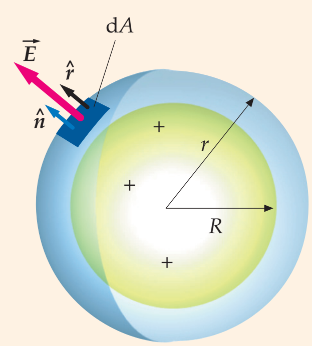
Per a $r \geq R$, $Q_\text{interior} = Q$

Per a $r \leq R$, $Q_\text{interior} = \rho V'$,

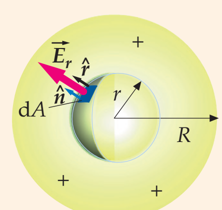
en què $V' = \frac{4}{3}\pi r^3$

per tant,

$$Q_\text{interior} = \frac{Q}{V}V' = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3 = Q\frac{r^3}{R^3}$$



a)



b)

FIGURA 22.27

5è. Substituïm el resultat en el tercer pas i aïllem $\vec{E}$:

$\vec{E} = E_r\hat{r}$, en què

$$\boxed{E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad r \geq R}$$

$$\boxed{E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{r^3}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}r \qquad r \leq R}$$

COMPROVACIÓ Al centre de l'esfera carregada, el camp elèctric és zero, tal com es dedueix de la simetria del sistema. I per a $r \gg R$, el camp és idèntic al creat per una càrrega puntual Q situada al centre de l'esfera, tal com podíem esperar.

AMPLIACIÓ En la figura 22.28 es representa E_r en funció de r per a la distribució de càrrega d'aquest exemple. En punts interiors a l'esfera carregada, E_r augmenta quan també ho fa r. Fixem-nos que E_r és continu en $r = R$. Per a descriure el camp elèctric d'un nucli atòmic sovint s'utilitza el model d'una esfera carregada uniformement.

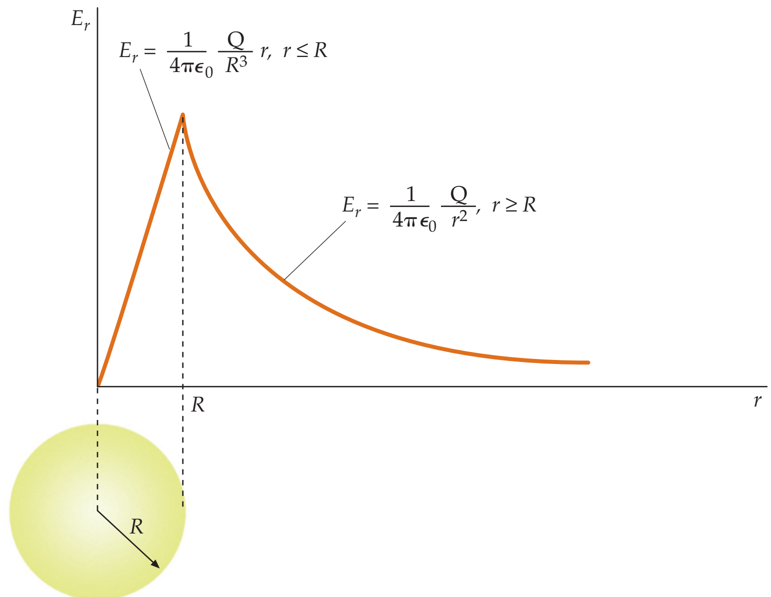


FIGURA 22.28

De l'exemple 22.13 concloem que el camp elèctric a una distància r del centre d'una esfera carregada uniformement de radi R és determinat per $\vec{E} = E_r\hat{r}$, en què

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad r \geq R \qquad 22.18a$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}r \qquad r \leq R \qquad 22.18b$$

i Q és la càrrega total de l'esfera.

Exemple 22.14 Camp elèctric degut a una càrrega lineal infinita

A partir de la llei de Gauss, determineu el camp elèctric en tots els punts de l'espai degut a una càrrega lineal infinitament llarga de densitat de càrrega uniforme λ. (En l'exemple 22.3 ja hem resolt aquest problema utilitzant la llei de Coulomb.)

ANÀLISI Per simetria, les línies de camp elèctric s'allunyaran o s'acostaran a la línia de càrrega segons si λ és positiva o negativa, respectivament. A més, el mòdul del camp depèn exclusivament de la distància radial a la línia de càrrega. Així, doncs, escollirem una superfície gaussiana cilíndrica coaxial amb la línia de càrrega. Calcularem el flux de $\vec{E}$ a través de cadascuna de les parts que componen la superfície i, mitjançant la llei de Gauss, relacionarem el flux total de $\vec{E}$ amb la càrrega a l'interior del cilindre.