Topologie

von

Wolfgang Franz

II
Algebraische Topologie

Zweite, verbesserte Auflage

1974

Walter de Gruyter · Berlin · New York

SAMMLUNG GÖSCHEN 7182

Dr. *Wolfgang Franz*
o. Professor der Mathematik an der Universität Frankfurt

Die Darstellung umfaßt folgende Bände:

Band I: Allgemeine Topologie
Band II: Algebraische Topologie

© Copyright 1974 by Walter de Gruyter & Co., vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung, Georg Reimer, Karl J. Trübner, Veit & Comp., 1 Berlin 30 — Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie der Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden — Printed in Germany — Satz: Walter de Gruyter, 1 Berlin 30 — Druck: Mercedes-Druck, 1 Berlin 61 — Buchbinder: Lüderitz & Bauer, 1 Berlin 61

ISBN 3 1100 5710 7

Inhaltsverzeichnis

Seite

Literaturverzeichnis 5

Einleitung

§ 1 Analytische und Algebraische Topologie 7
§ 2 Probleme und Beispiele 11

I. Teil

Simplizialkomplexe

Kap. 1. Geometrie des Simplizialkomplexes

§ 3 Hülle und Stern 17
§ 4 Baryzentrische Sterne 20
§ 5 Simpliziale Abbildungen 22
§ 6 Benachbarte Abbildungen 27

Kap. 2. Homologie- und Kohomologiegruppen

§ 7 Orientierung, Inzidenzzahlen 30
§ 8 Homologiegruppen 32
§ 9 Beispiele und Anwendungen 36
§ 10 Kohomologiegruppen 43
§ 11 Homotope Abbildungen 49

II. Teil

Kettenkomplexe und ihre Anwendungen

Kap. 3. Allgemeine Theorie

§ 12 Homologiegruppen von Kettenkomplexen 52
§ 13 Teil- und Faktorkomplexe 55
§ 14 Der Randoperator 60

Kap. 4. Freie Kettenkomplexe

§ 15 Moduln und Dualmoduln 62
§ 16 Abbildungen und duale Abbildungen 64
§ 17 Freie Kettenkomplexe, kanonische Basen 70

III. Teil

Zellkomplexe, Invarianz

Kap. 5. Zellkomplexe

§ 18 Zellzerlegungen 79
§ 19 Die Homologiegruppen von Zellzerlegungen 84
§ 20 Normalunterteilungen 87

Kap. 6. Invarianz der Homologiegruppen

§ 21 Invarianzbeweis 91
§ 22 Ergänzungen, Verallgemeinerungen 94
§ 23 Ergebnisse und Anwendungen 98
§ 24 Lokale Homologiegruppen 107

IV. Teil

Ausbau der Theorie

Kap. 7. Produkte in Polyedern

§ 25 Der Kohomologiering 113
§ 26 Das cap-Produkt 121

Kap. 8. Mannigfaltigkeiten

§ 27 Definitionen 126
§ 28 Komplementäre Zellzerlegungen 130
§ 29 Der Poincarésche Dualitätssatz 133

Kap. 9. Der Homologiering einer Mannigfaltigkeit

§ 30 Produkte in Mannigfaltigkeiten 141
§ 31 Produktmatrizen 146

Index 153

Literaturverzeichnis

Es werden nur die wichtigsten Werke genannt, die zur Ergänzung und Vertiefung des in diesem Bändchen behandelten Stoffes dienen können, soweit sie noch nicht im Literaturverzeichnis von Bd. I vorkommen.

1. P. S. Alexandroff, Einfachste Grundbegriffe der Topologie, Berlin 1932.
2. H. Seifert, W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Leipzig und Berlin 1934.
3. K. Reidemeister, Topologie der Polyeder, Leipzig 1938.
4. S. Lefschetz, Introduction to Topology, Princeton 1949.
5. S. Eilenberg, N. Steenrod, Foundations of Algebraic Topology, Princeton 1952.
6. P. S. Alexandroff, Combinatorial Topology, I—III, Rochester 1956, 1957, 1960. (Übersetzung aus dem Russischen.)
7. A. H. Wallace, An Introduction to Algebraic Topology, London 1957.
8. P. S. Alexandroff, Die topologischen Dualitätssätze, Berlin 1959. (Übersetzung aus dem Russischen.)
9. P. J. Hilton, S. Wylie, Homology Theory, Cambridge 1960.
10. J. Hocking, G. Young, Topology, London 1961.
11. H. Schubert, Topologie, Eine Einführung, Stuttgart 1964.
12. E. H. Spanier, Algebraic Topology. New York 1966.
13. S. S. Cairns, Introductory Topology. New York 1968.
14. M. J. Greenberg, Lectures on Algebraic Topology. New York, Amsterdam 1967.
15. W. S. Massey, Algebraic Topology, an Introduction, New York 1967.

Einleitung

§ 1. Analytische und Algebraische Topologie

In der „*Allgemeinen Topologie*", im Bändchen I, haben wir möglichst weit umfassende Klassen von Räumen behandelt und ihre Eigenschaften aus wenigen Axiomen deduktiv hergeleitet. Man bezeichnet diesen Zweig der Topologie daher auch als „Analytische Topologie". Die Aussagen der allgemeinen Topologie sind demgemäß sehr weitreichend und umfassend, dafür jedoch verhältnismäßig wenig konkret. Im vorliegenden Bändchen II behandeln wir den anderen Zweig der gegenwärtigen Topologie, die „*Algebraische Topologie*". Hier werden wir auch speziellere Probleme behandeln und besonderen Wert auf Begriffe und Sätze legen, die der unmittelbaren geometrischen Anschauung nahestehen. Dabei müssen wir allerdings innerhalb des hier gegebenen Rahmens den Bereich der zugrunde gelegten Räume wesentlich einschränken: Wir betrachten fast ausschließlich Polyeder.

Der eigentliche Unterschied zwischen den beiden Zweigen der Topologie besteht in der Methode. Der Name „Algebraische Topologie" deutet an, daß zur Behandlung topologischer Fragen algebraische Hilfsmittel herangezogen werden. Wir können das dabei anzuwendende Verfahren schon jetzt in groben Zügen erläutern. Wir betrachten eine sogenannte *Kategorie* $\mathfrak{R}$, die aus Räumen und stetigen Abbildungen besteht, und zwar aus den Räumen einer festen Klasse, etwa aus allen hausdorffschen Räumen oder allen Kompakten oder wie in unserem Fall aus allen Polyedern $R, S, \ldots$ und aus allen stetigen, nicht notwendig monomorphen oder epimorphen Abbildungen $f: R \to S$ unter ihnen. Jedem Raume R von $\mathfrak{R}$ werden wir mittels eines später zu entwickelnden Verfahrens für jede Dimension $q = 0, 1, 2 \ldots$ eine abelsche Gruppe $H_q(R)$ zuordnen, die sogenannte q-dimensionale Homologiegruppe von R. Weiter werden wir jeder stetigen Abbildung $f: R \to S$ für jedes q einen Homomorphismus $f_*: H_q(R) \to H_q(S)$, den sogenannten durch f induzierten Homomorphismus f_* der zugehörigen Homologie-

gruppen zuordnen. Diese doppelte Zuordnung — Gruppen zu Räumen, Homomorphismen zu Abbildungen — hat folgende Eigenschaften: (I) Ist $i: R \to R$ die identische Abbildung, die jedem Punkt von R ihn selbst zuordnet, so ist i_* für jedes q der identische Homomorphismus von $H_q(R)$, der jedes Gruppenelement in sich selbst überführt. (II) Sind $f: R \to S$ und $g: S \to T$ stetige Abbildungen von Räumen aus $\mathfrak{R}$ und ist $gf: R \to T$ die zusammengesetzte Abbildung, so ist $(gf)_* = g_* f_*$; der zusammengesetzten Abbildung entspricht also der zusammengesetzte Homomorphismus. Man faßt die Klasse aller abelschen Gruppen $H, G, \ldots$ samt allen ihren Homomorphismen $\varphi: H \to G$ ebenfalls als eine *Kategorie* $\mathfrak{H}$ auf. Eine Abbildung von $\mathfrak{R}$ nach $\mathfrak{H}$, die jedem Raum $R \in \mathfrak{R}$ eine Gruppe $H \in \mathfrak{H}$ und jeder Abbildung $f \in \mathfrak{R}$ einen Homomorphismus $f_* \in \mathfrak{H}$ derart zuordnet, daß die Eigenschaften (I) und (II) erfüllt sind, nennt man einen *Funktor von* $\mathfrak{R}$ *nach* $\mathfrak{H}$. Die von uns beschriebene Zuordnung ist von dieser Art, man nennt sie den *Homologiefunktor* H von $\mathfrak{R}$ nach $\mathfrak{H}$. H übersetzt topologische Fragen über Räume und Abbildungen der Kategorie $\mathfrak{R}$ in algebraische Fragen über Gruppen und Homomorphismen der Kategorie $\mathfrak{H}$. Die Definition und das Studium dieses Homologiefunktors H und seiner Verallgemeinerungen und Verfeinerungen ist der Inhalt der Homologietheorie, die ihrerseits der wichtigste Grundpfeiler der algebraischen Topologie ist. Das Studium von H bildet auch, innerhalb des hier gegebenen Rahmens, den Inhalt dieses Bändchens.

Die Methode der Algebraischen Topologie ähnelt in gewisser Weise der Analytischen Geometrie, in der ebenfalls geometrische Tatsachen in algebraische übersetzt werden. Ein wesentlicher Unterschied besteht jedoch darin, daß die Abbildung durch den Homologiefunktor H nicht treu ist. Verschiedene Räume R haben nicht notwendig verschiedene Homologiegruppen $H_q(R)$, verschiedenen stetigen Abbildungen f entsprechen nicht notwendig verschiedene von f induzierte Homomorphismen f_*. Man kann dieses als einen Nachteil ansehen, da auf diese Weise nicht alle topologischen Eigenschaften durch entsprechende algebraische Eigenschaften wiedergegeben werden. Es ist aber auch ein Vorteil insofern, als man

auf diese Weise schwierige, im Augenblick vielleicht weniger interessierende oder gar zur Zeit unlösbare geometrische Probleme in einfachere, dafür aber lösbare algebraische Fragen übersetzen und so jedenfalls zu Teilresultaten kommen kann. Insbesondere kann man hoffen, so zu feststellbaren oder sogar nachrechenbaren Kriterien zu gelangen. Jedenfalls hat man damit zu rechnen, daß der Funktor H bei der Untersuchung topologischer Fragen im allgemeinen nur zu notwendigen, aber nicht immer zu hinreichenden algebraischen Kriterien führt. Es hängt von dem jeweiligen geometrischen Problem ab, ob man durch schrittweise Verfeinerung der algebraischen Methoden schließlich zur vollständigen Lösung und zu hinreichenden Kriterien gelangt; in jüngster Zeit sind in dieser Richtung einige bemerkenswerte Erfolge erzielt worden. — Bei der Ausbildung der algebraischen Hilfsmittel für die Topologie haben sich gelegentlich auch Methoden von selbständigem algebraischen Interesse ergeben, die eine Zusammenfassung in der „Homologischen Algebra" gefunden haben; ihre Methoden und Ergebnisse sind in vielen Teilgebieten der Mathematik unentbehrlich geworden. Wir weisen aber, ebenso wie in der Einleitung von Bd. I auch hier besonders darauf hin, daß es uns hier ausschließlich um die Gewinnung geometrisch-topologischer Erkenntnisse zu tun ist.

Ordnet man topologischen Räumen oder allgemeiner irgendwelchen topologischen Gebilden algebraische Begriffe zu, wie es z. B. durch den Homologiefunktor H geschieht, so tritt stets die Frage nach der *Invarianz* dieser Begriffe auf. Wir erläutern diese Frage am Beispiel der Homologiegruppen $H_q = H_q(R)$, die wir einem Polyeder R zuordnen werden. Die Konstruktion von $H_q(R)$ wird an einer speziellen Darstellung des Raumes R als Polyeder vor sich gehen. Die Konstruktion muß aber so geschehen, daß bei Zugrundelegung eines anderen, zu R homöomorphen Raumes R' und bei Anwendung derselben Konstruktionsmethode auf R' anstelle von R dieselbe oder jedenfalls eine isomorphe Homologiegruppe $H_q(R) \approx H_q(R')$ herauskommt. Erst damit ist erreicht, daß H_q dem topologischen Raumtypus von R invariant, d. h.

unabhängig von der speziellen Darstellung von R zugeordnet ist, oder daß $H_q(R)$, wie man sagt, eine *Invariante* des Raumtypus von R ist. Schon in der allgemeinen Topologie haben wir invariante Bildungen kennengelernt, z. B. die Begriffe hausdorffsch, regulär, normal und kompakt. Auch die Dimension dim R eines Kompaktums R haben wir in Bd. I, § 32, ausdrücklich als Invariante des Raumtypus R erkannt.

In der Theorie der Polyeder spielt die Frage nach der Invarianz eine besondere Rolle. Ein Polyeder R ist mit Hilfe eines Simplizialkomplexes K, nämlich als dessen Körper $R = |\mathsf{K}|$ erklärt. Die Bausteine von K, die Simplexe, lassen sich ohne weiteres übersehen. Alle topologischen Eigenschaften des Raumes müssen sich daher in der Art und Weise widerspiegeln, wie diese endlich vielen Bausteine zusammengefügt sind, mit anderen Worten in den Inzidenzbeziehungen zwischen diesen Simplexen. Da es sich dabei nur um endlich viele Inzidenzen handelt, ergibt sich so ein gewissermaßen kombinatorisches Problem. Die *Kombinatorische Topologie* stellt sich die ebenso reizvolle wie schwierige Aufgabe, aus dem endlichen kombinatorischen Schema der Inzidenzen von K die Eigenschaften des Polyeders $R = |\mathsf{K}|$ abzuleiten. Die Hauptschwierigkeit liegt dabei in der Invarianzfrage. Ist nämlich K' eine andere Simplizialzerlegung des Polyeders $R = |\mathsf{K}| = |\mathsf{K}'|$, so ist die gegenseitige Lage der beiden Simplizialkomplexe K und K', worauf wir schon in Bd. I, § 30 hinweisen, im allgemeinen so kompliziert, daß ein Schluß von der einen auf die andere große Schwierigkeiten macht. Die sogenannte „Hauptvermutung der kombinatorischen Topologie" behauptete zwar, daß es Unterteilungen K_1 von K und K_1' von K' gäbe, derart daß K_1 und K_1' isomorph sind. Aber diese Vermutung hat sich zum mindesten in dieser Form nicht bestätigt. Sie kann keinesfalls zur Grundlage der Kombinatorischen Topologie gemacht werden. Man ist daher darauf angewiesen, solche Eigenschaften von K aufzusuchen, die Invarianten des Polyeders $R = |\mathsf{K}|$ sind, d. h. solche Eigenschaften, die sich in gleicher Weise aus jeder anderen Simplizialzerlegung K' von R ablesen lassen. Die Frage, ob eine gegebene Eigenschaft von K invariant ist oder nicht und gegebenenfalls der Beweis für die Invarianz, wird

auch in unserem Aufbau eine wichtige Rolle spielen und bisweilen einen erheblichen Aufwand erfordern.

Man kann den Begriff der topologischen Invarianz noch von einer anderen, etwas spezielleren Seite her beleuchten. Sei etwa der topologische Raum R Teilraum eines euklidischen R^n. R werde durch eine isotope Deformation innerhalb von R^n in den Raum R' übergeführt, d. h. durch eine Deformation, bei der das Bild von R auch bei allen Zwischenlagen homöomorph zu R bleibt. Die topologischen Invarianten von R sind natürlich auch Invarianten von R', sie erscheinen jetzt als Invarianten gegenüber isotoper Deformation. Man könnte danach versucht sein, die Topologie als Theorie der Invarianten gegenüber isotopen Deformationen zu charakterisieren, sie gewissermaßen als Geometrie der elastischen Deformationen oder als „Kautschuk-Geometrie" aufzufassen. Diese Auffassung ist allerdings nach dem zuvor Gesagten etwas zu eng und in ihrer Vergröberung nicht ganz zutreffend. Sie gibt aber nichtsdestoweniger ein anschauliches und für die erste Orientierung förderndes Bild von der Tendenz topologischer Untersuchungen.

In diesem Bändchen kann nur ein kleiner Abriß der Algebraischen Topologie gegeben werden. Es handelt sich im wesentlichen um die Grundlagen der *Homologietheorie*, die den ältesten und am weitesten entwickelten Zweig der Algebraischen Topologie darstellt und die heute für viele Teile der Mathematik unentbehrlich ist. Im folgenden § 2 der Einleitung geben wir eine Einführung in eine Reihe von wichtigen topologischen Problemen und erläutern sie an Beispielen, auf die wir später vom Standpunkt der Homologietheorie aus zurückkommen.

§ 2. Probleme und Beispiele

Wir betrachten Abbildungen $f: R \to S$ eines topologischen Raumes R in einen topologischen Raum S, die, ohne daß es stets besonders gesagt wird, als stetig vorausgesetzt sind. R und S werden später als Polyeder angenommen. Die Abbildungen f brauchen weder monomorph noch epimorph (Bd. I, § 5) zu sein. Unter ihnen spielen die *konstanten Abbildungen* eine besondere Rolle, die jeden Punkt von R in ein und denselben Punkt $q \in S$ abbilden. Die Abbildungen $f: R \to R$ heißen

Selbstabbildungen von R. Unter ihnen spielt die *identische Abbildung* $i = i_R$ eine besondere Rolle, die jeden Punkt von R in sich selbst abbildet. Ist $A \subset R$ ein Teilraum von R, so nennt man die Abbildung $f: A \to R$, die jeden Punkt von A in sich abbildet, die *Inklusionsabbildung* von A in R; sie ist von $i_A : A \to A$ wohl zu unterscheiden. — Wir nennen zunächst die beiden wichtigsten allgemeinen Probleme für topologische Räume, das Homöomorphieproblem und das Homotopieproblem.

A. Das Homöomorphieproblem. Zwei Räume R und S heißen homöomorph, in Zeichen $R \approx S$ (Bd. I, Def. 5.1), wenn es eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Punkten von R und den Punkten von S gibt, die die topologische Struktur von R, etwa die offenen Mengen oder Umgebungen in R, in die topologische Struktur von S überführt. Es gilt der Satz (Bd. I, Satz 5.6), daß R und S dann und nur dann homöomorph sind, wenn es eine umkehrbar eindeutige, d. h. monomorphe und epimorphe Abbildung $f: R \to S$ gibt, die samt ihrer Umkehrung $f^{-1}: S \to R$ stetig ist. Wenn R ein Kompaktum, speziell ein Polyeder ist, kann auf die zuletzt genannte Forderung über f^{-1} verzichtet werden, sie ist in diesem Falle eine Folgerung aus den übrigen Forderungen (Bd. I, Satz 18.2).

Das Homöomorphieproblem verlangt die Entscheidung darüber, ob zwei vorgelegte topologische Räume R und S homöomorph sind oder nicht. Rechnet man zwei homöomorphe Räume zum selben Raumtypus, so ist also zu entscheiden, ob R und S zum selben Raumtypus gehören oder nicht. Es wird ferner verlangt, für jeden Raumtypus einen speziellen Raum R als Repräsentanten, auch Normalform genannt, anzugeben. — In dieser Form ist das Homöomorphieproblem zur Zeit ungelöst, und es ist möglicherweise überhaupt unlösbar. Wir werden im folgenden mit Hilfe der Homologietheorie nur verhältnismäßig grobe notwendige Bedingungen für die Homöomorphie zweier Räume aufstellen können. Nur für die sehr spezielle Klasse der zweidimensionalen Flächen werden wir eine Lösung des Homöomorphieproblems einschließlich der Konstruktion von Normalformen angeben.

B. Das Homotopieproblem.

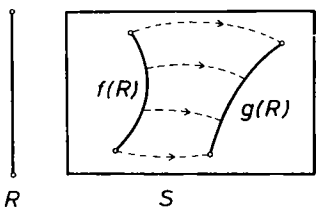
2.1 Definition: *Zwei stetige Abbildungen $f, g: R \to S$ heißen homotop, in Zeichen $f \simeq g$, ausführlicher $f \simeq g: R \to S$, wenn eine der beiden folgenden gleichwertigen Bedingungen erfüllt ist:*

(1) *Es gibt eine Schar von Abbildungen $F(p, t): R \to S$, die stetig von den beiden Variablen $p \in R$ und der reellen Zahl t aus dem Intervall $0 \leqq t \leqq 1$ abhängen, derart daß $F(p, 0) = f(p)$ und $F(p, 1) = g(p)$ ist.*

(2) *Es gibt eine stetige Abbildung $F: R \times I \to S$ des Produktraumes $R \times I$ von R und der Einheitsstrecke I des reellen Intervalls $0 \leqq t \leqq 1$ in den Raum S derart, daß für jeden Punkt $p \in R$ gilt $F(p \times 0) = f(p)$, $F(p \times 1) = g(p)$.*

Die Abbildungsschar $F(p, t)$ bzw. die Abbildung F heißt eine Homotopie, genauer eine f und g verbindende Homotopie.

Es ist zu beachten, daß unter (1) die simultane Stetigkeit in den beiden Variablen p und t gefordert wird. — Daß (1) und (2) gleichwertig sind, liegt auf der Hand. — Man sagt auch kurz, f sei stetig in g deformierbar. Die nebenstehende Figur gibt eine Skizze für den Fall, daß R eine Strecke und S ein Rechteck ist; die punktierten Linien deuten die Bahnkurven an, die das Bild $F(p, t)$ eines festen Punktes $p \in R$ beschreibt, wenn man t, etwa als Zeit gedeutet, von 0 bis 1 laufen läßt.



Figur 1

Beispiele: (a) $R = S = R^2$ sei die euklidische Ebene, $f = i_R$ sei die identische Abbildung, $g = g(x, y) = (0, 0)$ die konstante Abbildung in den Punkt $(0, 0)$. Es ist $f \simeq g$, eine verbindende Homotopie ist $F(x, y; t) = ((1 - t)x, (1 - t)y)$. — (b) $R = S = S^n$ sei die n-Sphäre ($n \geqq 1$), $f = i_R$ die identische Abbildung, g die Antipodenabbildung, die jeden Punkt von S^n, als Einheitssphäre im euklidischen R^{n+1} gedeutet, in seinen Gegenpunkt überführt. Für $n = 1$ ist offenbar $f \simeq g$. — *Gegenbeispiele:* (c) $R = S$ und ebenso f und g seien wie unter (b) definiert. Für $n = 2$ ist nicht $f \simeq g$, wie wir in § 23 sehen

werden. — Allgemeiner ist in (b) $f \simeq g$ für ungerade n, $f \not\simeq g$ für gerade n. — (d) Bei denselben Gegebenheiten wie unter (b) sei $f = i_R$ und g eine konstante Abbildung. Es ist $f \not\simeq g$.

2.2 Satz: *Die Beziehung der Homotopie unter den Abbildungen eines Raumes R in einen Raum S ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.*

Beweis: $F(p, t) = f(p)$ für alle Punkte $p \in R$ und alle $0 \leqq t \leqq 1$ ist eine $f: R \to S$ mit sich selbst verbindende Homotopie, es ist also $f \simeq f$. — Ist $F(p, t)$ eine $f: R \to S$ mit $g: R \to S$ verbindende Homotopie, so ist $F'(p, t) = F(p, 1 - t)$ eine g mit f verbindende Homotopie; aus $f \simeq g$ folgt also $g \simeq f$. — Sei nun $F(p, t)$ wie eben definiert, und $G(p, t)$ eine g mit h: $R \to S$ verbindende Homotopie. Dann verbindet die Homotopie

$$H(p, t) = \begin{cases} F(p, 2t) & \text{für } 0 \leqq t \leqq \frac{1}{2} \\ G(p, 2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leqq t \leqq 1, \end{cases}$$

wie man sofort nachprüft, f mit h. Aus $f \simeq g$, $g \simeq h$ folgt also $f \simeq h$. □ — Der Beweis läßt sich kurz so beschreiben: In der Zeiteinheit kann man f in g und ebenso g in h deformieren; daher kann man in der Zeiteinheit auch f in h deformieren, indem man mit doppelter Geschwindigkeit erst f in g und anschließend g in h deformiert.

Auf Grund dieses Satzes zerfallen bei gegebenem R und S die sämtlichen Abbildungen $f: R \to S$ in Klassen homotoper Abbildungen, die sogenannten *Homotopieklassen* oder *Abbildungsklassen*. Das Homotopieproblem verlangt, bei gegebenen R und S zu entscheiden, ob zwei Abbildungen $f, g: R \to S$ homotop sind, und ferner die sämtlichen Abbildungsklassen von R und S aufzuzählen, etwa durch Angabe von Normalformen. Das Problem ist in dieser Allgemeinheit, auch für Polyeder R und S, ungelöst. Nur in sehr speziellen Fällen, z. B. für Sphären $R = S = S^n$, kennt man alle Abbildungsklassen. Beispiele werden wir in § 23 kennenlernen. — Wir beweisen noch folgenden für später wichtigen Satz.

2.3 Satz: *Ist $f \simeq f': R \to S$ und $g \simeq g': S \to T$, so ist $gf \simeq g'f'$: $R \to T$.*

Beweis: Ist $F(p, t)$ eine f mit f' verbindende Homotopie, so ist $g(F(p, t))$ offenbar eine gf mit gf' verbindende Homotopie. Es ist also $gf \simeq gf'$. Analog ist $gf' \simeq g'f'$, woraus nach dem vorigen Satz die Behauptung folgt.□

C. Spezielle Homotopien. Unter den zahlreichen Anwendungen des Homotopiebegriffes greifen wir einige besonders einfache heraus und weisen auf die entsprechenden Probleme hin.

1. Unwesentliche Abbildungen.

2.4 Definition: *Eine Abbildung* $f: R \to S$ *heißt unwesentlich, wenn sie einer konstanten Abbildung* $c: R \to S$ *homotop ist. Andernfalls heißt sie wesentlich.*

Beispiele: (a) Eine Abbildung $f: R \to S^n$ eines Raumes R in die n-Sphäre, die nicht epimorph ist, ist unwesentlich. Ist nämlich $q \in S^n$ nicht Bild bei f, q' der Antipodenpunkt von q, so ist f der konstanten Abbildung in den Punkt q' homotop. Ist nämlich $p \in R$, so sind die Punkte $f(p)$ und q' nicht Antipodenpunkte, bestimmen also eindeutig einen Großkreis und einen kleinsten Großkreisbogen auf S^n; läßt man $f(p)$ gleichmäßig mit t diesen Bogen von $f(p)$ nach q' durchlaufen, so erhält man offenbar eine f mit c verbindende Homotopie. — (b) Die identische Abbildung der n-Sphäre ist wesentlich, wie wir später zeigen werden.

2. Deformationen der Identität.

2.5 Definition: *Eine stetige Selbstabbildung* $f: R \to R$ *mit* $f \simeq i_R$ *heißt eine Deformation der Identität.*

Die Antipodenabbildungen der n-Sphäre bilden für ungerades n ein Beispiel für Deformationen der Identität, für gerades n jedoch ein Gegenbeispiel.

3. Zusammenziehbare Räume.

2.6 Definition: *Ein Raum* R, *dessen identische Abbildung* i_R *unwesentlich, also der konstanten Abbildung in einen Punkt* $p \in R$ *homotop ist, heißt zusammenziehbar, genauer nach* p *zusammenziehbar.*

Der euklidische R^n, ebenso ein Simplex $[\sigma]$, ist zusammenziehbar. Die n-Sphäre ist nicht zusammenziehbar.

4. Retrakte.

2.7 Definition: *Ein Teilraum $A \subset R$, der eine stetige Abbildung $r: R \to A$ mit $r(a) = a$ für alle $a \in A$ erlaubt, heißt ein Retrakt von R. r heißt Retraktion oder retrahierende Abbildung.*

Bezeichnet $j: A \to R$ die Inklusionsabbildung, so ist $rj = i_A$ gleich der identischen Abbildung von A. — *Beispiele:* (a) Ein einzelner Punkt $p \in R$ stellt stets einen Retrakt von R dar; retrahierende Abbildung ist die konstante Abbildung nach p. — (b) Der Produktraum $R \times S$ zweier Räume R und S hat R und S als Retrakte. Retrahierende Abbildungen sind die beiden Projektionen des Produktraumes auf R und S. — Ein *Gegenbeispiel* wird gebildet durch einen abgeschlossenen Vollkreis R der euklidischen Ebene und dessen eindimensionaler Randsphäre $A = S^1$; A ist nicht Retrakt von R, wie wir in § 23 sehen werden.

5. Deformationsretrakte

2.8 Definition: *Ein Retrakt $A \subset R$ mit der retrahierenden Abbildung $r: R \to A$ und der Inklusionsabbildung $j: A \to R$ heißt ein Deformationsretrakt von R, wenn die Selbstabbildung $r_0 = jr$ von R zur identischen Abbildung i_R von R homotop ist.*

Bei einem Deformationsretrakt ist also die retrahierende Abbildung r, genauer die Abbildung jr, eine Deformation der Identität. Es gelten also die Gleichungen $rj = i_A$ und $jr \simeq i_R$. — *Beispiele:* (a) Ein einzelner Punkt $p \in [\sigma]$ eines Simplexes stellt einen Deformationsretrakt von $[\sigma]$ dar. — (b) Ein einzelner Punkt $p \in S^1$ einer 1-Sphäre stellt einen Retrakt von S^1, nicht aber einen Deformationsretrakt von S^1 dar.

D. Homotopietypen

2.9 Definition: *Zwei Räume R und S heißen vom gleichen Homotopietypus, wenn es Abbildungen $f: R \to S$ und $g: S \to R$ gibt, so daß $gf \simeq i_R$ und $fg \simeq i_S$.*

Homöomorphe Räume gehören sicher zum gleichen Homotopietypus. Dagegen stellen ein Simplex $[\sigma^n]$ und ein aus einem einzelnen Punkt bestehender Raum zwei nicht homöomorphe Räume vom gleichen Homotopietypus dar. — Sind R und S vom gleichen Homotopietypus, ebenso S und T, so sind,