G. Eisenreich

Lineare Algebra
und analytische Geometrie

Mathematische Lehrbücher und Monographien
Herausgegeben von der Akademie der Wissenschaften der DDR
Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik

I. Abteilung
Mathematische Lehrbücher
Band 33

Lineare Algebra
und analytische Geometrie

von G. Eisenreich

Lineare Algebra und analytische Geometrie

von Prof. Dr. Günther Eisenreich
Karl-Marx-Universität Leipzig

Mit 107 Abbildungen und 2 Tabellen

Akademie-Verlag Berlin
1980

Erschienen im Akademie-Verlag, DDR-1080 Berlin,
Leipziger Straße 3–4
© Akademie-Verlag Berlin 1980
Lizenznummer: 202 · 100/406/79
Gesamtherstellung: IV/2/14 VEB Druckerei »Gottfried Wilhelm Leibniz«,
4450 Gräfenhainichen · 5300
Einbandgestaltung: Rolf Kunze
Bestellnummer: 762 455 8 (6435) · LSV 1024
Printed in GDR
DDR 48,– M

Vorwort

Das vorliegende Buch ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die ich für Mathematikstudenten des ersten Studienjahres an der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig gehalten habe. Im Hinblick auf sein Anliegen, anschließend an das aus der Schule bekannte Wissen dem Studenten eine Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra zu bieten, wurde an der durch seine Entstehungsweise bedingten Diktion möglichst wenig geändert. Ich habe mich bemüht, Definitionen, Sätze und Beweise nicht einfach in den Raum zu stellen, sondern Wert auf Motivierungen und die Herausarbeitung der tragenden Ideen gelegt, auch wenn dadurch die Darstellung umfangreicher geworden ist als sonst üblich. Daher lag mir auch nicht daran, einen Aufbau in größtmöglicher Allgemeinheit zu geben, wenn auch die Darstellung so gehalten ist, daß Verallgemeinerungen (z. B. auf andere Körper als den der reellen Zahlen) keine Schwierigkeiten bereiten. Auch habe ich nicht danach gestrebt, Wiederholungen um jeden Preis zu vermeiden, sondern führe durchaus auch bewußt dieselbe Überlegung mehrfach durch, wenn auch unter verschiedenen Blickwinkeln; ich glaube, daß eine derartige Redundanz dem Anfänger mehr dienlich ist als ein abstrakter „LANDAU-Stil".

Nun ein paar Worte zum Inhalt des Buches! Ich habe die geometrische Seite sehr betont; ich habe danach getrachtet, analytische Geometrie nicht einfach als Benennung für das Rechnen mit n-Tupeln von Zahlen einzuführen, sondern an die geometrischen Begriffe anzuschließen, die von der Schule her bekannt sind. Daher auch der Abschnitt über den synthetischen Aufbau der Geometrie zu Beginn, auf den alles Weitere, wenigstens im Prinzip, aufbaut. Hieran schließt sich die analytische Geometrie des ein-, zwei- und dreidimensionalen Raumes an. Großen Wert lege ich hierbei auf die saubere Herausarbeitung des Begriffs der Orientierung des Raumes. Mit den dabei gewonnenen Erfahrungen können später in ganz natürlicher Weise der n-dimensionale Vektorraum und affine Raum axiomatisch eingeführt werden.

Nach der Definition des Skalarprodukts (in den niederen Dimensionen auf geometrische Weise, später im n-dimensionalen Raum mittels der metrischen Fundamentalform) werden neben die bisherigen (kontravarianten) Koordinaten die kovarianten Koordinaten gestellt und verwendet. Da von vornherein mit beliebigen Parallelkoordinatensystemen gearbeitet wird (Längen- und Winkelmessung gibt es anfangs noch gar nicht), liegt diese allgemeine Betrachtungsweise auch völlig auf der Hand. Großen Wert lege ich übrigens auf das Arbeiten mit baryzentrischen Koordinaten, womit gleichzeitig auch recht früh ein Beispiel für homogene Koordinaten zur Verfügung steht.

Die geometrischen Begriffe spielen auch bei der Behandlung der linearen Algebra eine wesentliche Rolle. So dienen Matrizen zur Beschreibung linearer Abbildungen, so daß zum Beispiel das Assoziativgesetz für die Matrizenmultiplikation sofort klar ist.

Die lineare Algebra wird zunächst möglichst weitgehend determinantenfrei aufgebaut (Transformation der Matrizen auf Trapezform, allgemeine Sätze über Lösbarkeit und Struktur der Lösungen). Behandelt wird hierbei auch die Elementarteilertheorie von Matrizen und später im Rahmen der Transformationen von Matrizen hieran anschließend die JORDANsche Normalform. Die Einführung der Determinanten wird durch die Auflösungsformel für lineare Gleichungssysteme motiviert. Es wird gezeigt, daß die explizite Determinantendefinition die hieraus entspringenden abstrakten Forderungen an einen Determinantenbegriff erfüllt. Diese Charakterisierung wird übrigens auch beispielsweise zum Beweis des LAPLACEschen Entwicklungssatzes herangezogen.

Nach der Bereitstellung der aus der linearen Algebra benötigten Hilfsmittel können dann auch Koordinatentransformationen, affine und lineare Abbildungen betrachtet werden. Auch hier wird die geometrische Seite in den Vordergrund gestellt.

Mit der Einführung einer Metrik wird es möglich, auch u. a. Bewegungen, insbesondere Drehungen und orthogonale Matrizen zu untersuchen. In Zusammenhang damit steht auch die Behandlung quadratischer Formen, wobei neben der obligatorischen Hauptachsentransformation auch Definitheitskriterien gegeben und das SYLVESTERsche Trägheitsgesetz bewiesen werden.

Das Buch schließt mit einem Abschnitt über Kurven und Flächen zweiter Ordnung ab. Neben elementaren Betrachtungen kommen hier auch mehr theoretische Fragen zur Sprache. Durch die Beseitigung von Ausnahmefällen wird die Einführung des projektiven Raumes motiviert. Es werden in diesem Zusammenhang die Grundbegriffe der projektiven Geometrie eingeführt und auf die Behandlung der Kegelschnitte und Quadriken angewendet.

Immer nach mehreren Abschnitten sind Aufgaben in den Text eingestreut, die sich auf den in den letzten Abschnitten behandelten Stoff beziehen und dem Leser Gelegenheit geben, sein Verständnis zu überprüfen; gelegentlich dienen sie auch dazu, einige im Haupttext nicht behandelte Begriffe einzuführen oder Zusammenhänge anzugeben. Auf die Angabe von Lösungen wurde aus praktischen Gründen bewußt verzichtet.

Es liegt auf der Hand, daß es bei einem Lehrbuch der vorliegenden Art, in dem ein abgeklärtes Stoffgebiet behandelt wird, in der Regel weder sinnvoll noch möglich ist, spezielle Quellen anzugeben; außerdem wäre dem Anfänger damit wenig gedient. So ist denn auch die im einleitenden Abschnitt gegebene wertende Literaturzusammenstellung nicht als Quellenverzeichnis aufzufassen (das es gar nicht geben kann), sondern als Hinweis auf Bücher, die mir unter gewissen Aspekten dem Leser (vor allem dem Anfänger) als besonders empfehlenswert erscheinen.

Zum Schluß möchte ich meinem Freund VOLKMAR WÜNSCH für die kritische Durchsicht des Manuskripts und eine Reihe nützlicher Verbesserungsvorschläge sowie dem Akademie-Verlag für die Aufnahme in die Reihe seiner Mathematischen Lehrbücher herzlich danken.

Leipzig, im November 1979 GÜNTHER EISENREICH

Inhaltsverzeichnis

A. Allgemeine Vorbemerkungen

Wir wollen uns in dieser Vorlesung mit Geometrie (insbesondere mit analytischer Geometrie) und mit linearer Algebra, einschließlich der Theorie der Matrizen und Determinanten, sowie in Zusammenhang damit mit den wichtigsten Dingen aus der Lehre von den quadratischen Formen befassen. Wir beginnen mit einigen allgemeinen Bemerkungen zur Abgrenzung des Untersuchungsgegenstandes.

1. Gegenstand der Untersuchung

Geometrie bedeutet Lehre vom Raum und von den räumlichen Objekten. Ursprünglich durch die Bedürfnisse der Landesvermessung entstanden, hat sie sich heute durch Axiomatisierung, Idealisierung und Verallgemeinerung von dieser empirischen Basis längst gelöst und behandelt zum Teil Fragen, die nur noch entfernt an diesen Ausgangspunkt erinnern. Als Beispiel für zwei Richtungen der Geometrie, auf deren allgemeine Einteilung wir hier nicht eingehen können, seien die Elementargeometrie und die Topologie genannt. In der *Elementargeometrie* werden diejenigen Eigenschaften geometrischer Objekte untersucht, die nicht von der Lage im Raum abhängen, also bewegungsinvariant sind, wie zum Beispiel Längen, Winkel, Flächeninhalte usw. Läßt man auch umkehrbar stetige Deformationen zu, so gelangt man zur *Topologie*. Der Begriff der Länge etwa hat hierin keinen Sinn, denn diese kann sich bei stetigen Deformationen (die man bis zu einem gewissen Grade durch die Verzerrung von Gummi ohne das Auftreten von Rissen veranschaulichen kann) ändern. Trotzdem gibt es Aussagen, die hierbei ungeändert bleiben. Beispielsweise gilt der *Eulersche Polyedersatz* für jedes (etwa konvexe) Polyeder: die Anzahl der Eckpunkte minus Anzahl der Kanten plus Anzahl der Seiten ist gleich 2; diese alternierende Summe bleibt also ungeändert, wenn das Polyeder durch eine (umkehrbar) stetige Abbildung in ein neues übergeführt wird, sogar dann, wenn dieses krummlinig ist. Ebenso bleibt bei derartigen Transformationen die Anzahl der Löcher, die ein Gebiet aufweist, ungeändert, desgleichen die Eigenschaft einer geschlossenen Kurve, sich stetig auf einen Punkt zusammenziehen zu lassen (die Kurve C_1 der Abbildung 1 hat diese Eigenschaft, die Kurve C_2 nicht). Derartige Eigenschaften (topologische Eigenschaften) sind natürlich erst recht auch elementargeometrische Eigenschaften, d. h. Eigenschaften, die bei Bewegungen ungeändert bleiben, aber nicht umgekehrt.

Durch Einführung von *Koordinaten* gelingt es, geometrische Beziehungen auf Beziehungen zwischen Zahlen zurückzuführen. Anliegen der analytischen Geometrie im weitesten Sinne ist es, die geometrischen Objekte mittels der zwischen ihren Koordinaten bestehenden Beziehungen zu untersuchen. In diesen allgemeinen Rahmen würde

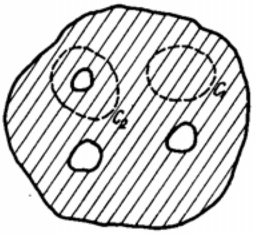

Abb. 1

zum Beispiel auch die algebraische Geometrie fallen, die sich unter anderem mit Mannigfaltigkeiten befaßt, deren Punkte (d. h. ihre Koordinaten) gewisse algebraische Gleichungen befriedigen. Es hat sich allerdings historisch eine engere Auffassung von analytischer Geometrie herausgebildet, der wir uns im folgenden anschließen wollen. Es werden hierin in der Regel nur solche Gebilde behandelt, die sich durch lineare oder quadratische Gleichungen beschreiben lassen. Damit haben wir es einerseits mit Punkten, Geraden, Ebenen und den Beziehungen zwischen ihnen zu tun, andererseits mit Kurven und Flächen zweiter Ordnung. Parallel dazu werden die hierfür benötigten algebraischen Hilfsmittel – auch unabhängig von der Geometrie – untersucht, nämlich einerseits lineare Gleichungen und Gleichungssysteme und im Zusammenhang damit die Lehre von den Matrizen und Determinanten sowie den Vektorräumen und andererseits die Theorie der quadratischen Formen. Wir werden es uns aber nicht nehmen lassen, dort, wo es sich anbietet, auch auf etwas allgemeinere algebraische Strukturen (das betrifft vornehmlich Gruppen) einzugehen.

2. Erkenntnistheoretisches. Axiomatisierung

Wie bereits gesagt, war die Geometrie ursprünglich eine empirische Wissenschaft, im Grunde genommen also ein spezieller Zweig der Physik. Damit war zunächst jede einzelne geometrische Aussage für sich empirisch zu bestätigen, galt also nur im Rahmen der Meßgenauigkeit. Es zeigte sich aber, daß es relativ wenige und dabei leicht verifizierbare Aussagen gibt, aus denen man alle anderen ohne neuerlichen Bezug auf die Wirklichkeit auf rein logischem Wege herleiten kann. Indem man diese Aussagen als Axiome an die Spitze der Betrachtung stellte, wurde die Geometrie erst als eine eigentliche mathematische Wissenschaft möglich.

Dieser Zug zur *Axiomatisierung* beherrscht heutzutage die gesamte Mathematik, darüber hinaus aber beispielsweise auch die theoretische Physik. Durch die Axiomatisierung wird eine Trennung der wissenschaftlichen Betrachtung in einen empirisch leeren Teil, in dem man rein verstandesmäßig schließen kann und von Fragen der Meßgenauigkeit und dergleichen unabhängig ist, und in einen sozusagen physikalisch-empirischen Teil bewirkt, in dem nur wenige Grundannahmen empirisch überprüft werden müssen. Damit wird eine exakte Wissenschaft überhaupt erst möglich. Darüber hinaus bietet der axiomatische Aufbau den entscheidenden Vorteil, daß man nicht auf die Deutung der Axiome, von der man ausgegangen ist, angewiesen ist, sondern daß man durch eine andere Interpretation auch auf anderen Gebieten zu neuen Einsichten gelangen kann.

Wir werden im folgenden keinen rein axiomatischen Aufbau der Geometrie geben können, wollen aber doch wenigstens deutlich werden lassen, wie sich die analytische Geometrie an den axiomatischen Aufbau der Geometrie anschließen läßt.

3. Literatur

Wir wollen im folgenden ein paar Hinweise zur einschlägigen Literatur geben, ohne dabei in irgendeiner Hinsicht Vollständigkeit anzustreben.

Die meisten Bücher über analytische Geometrie enthalten zugleich eine Einführung in die lineare Algebra. Als schöne Einführung, in der neben dem axiomatischen Standpunkt auch die geometrische Anschauung zu ihrem Recht kommt, empfehlen wir die beiden Bände von E. Sperner „Einführung in die analytische Geometrie und Algebra" (Göttingen 1957). Einen auf größere Allgemeinheit zugeschnittenen systematischen Aufbau auf axiomatischer Grundlage findet man bei G. Pickert, „Analytische Geometrie und lineare Algebra" (Leipzig 1953). Eine leichtverständliche Einführung in das Gebiet bietet die „Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra" von S. Brehmer und H. Belkner (Berlin 1966). Hinsichtlich einer stärkeren Betonung des Geometrischen sei auf das Buch von O.-H. Keller („Analytische Geometrie und lineare Algebra", Berlin 1957) verwiesen. Das unumgänglich notwendige Rüstzeug bieten die „Elemente der analytischen Geometrie" von G. Bol (Göttingen 1948–49); dieses Buch kann als Vorbereitung zum Studium anspruchsvollerer Werke benutzt werden. Reich an mathematischen Leckerbissen, für den Anfänger aber etwas schwer zugänglich ist die „Analytische Geometrie" von W. Blaschke (Wolfenbüttel/Hannover 1948; Basel/Stuttgart 1954); aus dem gleichen Grunde ist auch die in der gleichen Reihe erschienene „Projektive Geometrie" desselben Verfassers erwähnenswert. Den Anschluß der analytischen Geometrie an das Hilbertsche Axiomensystem der Grundlagen der Geometrie, der meist nicht vollzogen wird, ist in den beiden älteren Büchern von L. Heffter („Grundlagen und analytischer Aufbau der Geometrie", Leipzig 1950, sowie „Die Grundlagen der Geometrie", Leipzig 1921) durchgeführt. Eine ältere lesenswerte klassische Darstellung bietet die „Einführung in die analytische Geometrie" von A. Schönflies (Berlin 1925). Als kurzgedrängte, aber gut lesbare Übersicht über die Geometrie, wenn auch in der Regel ohne Beweise, sei auf den Artikel „Geometrie" von H. Tietz im 2. Band des Handbuchs der Physik (Berlin 1955) hingewiesen. Darüber hinaus sei noch das Buch „Einführung in die Geometrie" von G. Hajós (Leipzig 1970) genannt, das neben einer Einführung in die elementare analytische Geometrie der Ebene und des Raumes und in die elementare Vektorrechnung eine ausführliche Behandlung der Elementargeometrie mit genauen Beweisen bietet, die gut zur Ergänzung bzw. zur Auffrischung des Mathematikunterrichts in der Schule herangezogen werden kann, und das sich darüber hinaus durch eingehende Motivierungen und Hinweise auf mögliche Fehlschlüsse auszeichnet. Schließlich möchten wir noch speziell zur weiterführenden Beschäftigung mit der Vektorrechnung auf das 1971 vom Autor im Teubner-Verlag Leipzig erschienene Büchlein „Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung" aufmerksam machen.

Speziell zur linearen Algebra seien noch die „Einführung in die lineare Algebra" von H.-J. Kowalsky (Berlin 1971), die „Determinanten und Matrizen" von R. Kochendörffer (Leipzig; Stuttgart 1970), das Büchlein von H. W. E. Jung über „Matrizen und Determinanten" (Leipzig 1948) sowie das entsprechende Buch von F. Neiss „Determinanten und Matrizen" (Berlin 1971) genannt. Hinweisen möchten wir insbesondere auf das schöne Büchlein von W. Gröbner „Matrizenrechnung" (Mannheim 1966).

Wer sich tiefere Kenntnisse aus der Mengenlehre aneignen will, von der wir hier freilich nur die Grundbegriffe benötigen, kann dazu die beiden Bände „Allgemeine Mengenlehre“ von D. Klaua (Berlin 1970 und 1969) heranziehen; eine kürzere Einführung ist vom gleichen Verfasser in der Reihe Wissenschaftliche Taschenbücher beim Akademie-Verlag Berlin erschienen. (Eine kurze Darstellung findet man auch in dem Göschenheft „Mengenlehre“ von E. Kamke [Berlin 1962].)

B. Logische Grundbegriffe. Mengen. Abbildungen. Relationen

Bevor wir zur eigentlichen Geometrie übergehen, müssen wir erst noch einige immer wieder gebrauchte Grundbegriffe und Sprechweisen kennenlernen. Wir beginnen mit einigen logischen Grundbegriffen.

1. Logische Grundbegriffe

In der Mathematik haben wir es fortwährend mit *Aussagen* zu tun, sprachlichen Sätzen, die entweder wahr oder falsch sind. Aus derartigen Aussagen werden nach den Regeln des logischen Schließens neue hergeleitet. Diese Regeln gründen sich nur auf den Wahrheitsgehalt der Aussagen, nicht auf die speziellen Behauptungen, die darin ausgesprochen werden.

Wenn A und B Aussagen sind und mit A stets auch B wahr ist, so sagen wir, die *Aussage B folgt aus der Aussage A*, oder, *B ist notwendige Bedingung für A* (wenn B falsch ist, kann nämlich A nicht wahr sein), oder auch, *A ist hinreichende Bedingung für B* (die Wahrheit von A reicht aus, um auf die Wahrheit von B schließen zu können). Zur Abkürzung wollen wir diesen Sachverhalt formal durch einen Pfeil kennzeichnen und $A \Rightarrow B$ oder auch $B \Leftarrow A$ hierfür schreiben.

Ist A sowohl hinreichend als auch notwendig für B, ist also mit A gleichzeitig auch B wahr und mit B gleichzeitig auch A wahr, so sagen wir, A sei *notwendig und hinreichend* für B, oder, A gilt *dann und nur dann, wenn* B gilt, oder auch, A ist (dem Wahrheitsgehalt nach) *gleichbedeutend* mit B. Statt *dann und nur dann* sagen wir kürzer auch *genau dann.* In Zeichen drücken wir diesen Sachverhalt durch einen Doppelpfeil aus: $A \Leftrightarrow B$.

Beispielsweise ist dafür, daß eine reelle Zahl Quadrat einer natürlichen Zahl ist, notwendig, daß sie positiv ist, aber dies ist nicht hinreichend; für das Verschwinden eines Produkts zweier reeller Zahlen ist notwendig und hinreichend, daß einer der Faktoren Null ist.

Aus zwei Aussagen A, B lassen sich durch Verknüpfung mit *und* bzw. *oder* neue Aussagen gewinnen. Unter *A und B* (in Zeichen $A \wedge B$) verstehen wir die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn sowohl A als auch B wahr ist, in jedem anderen Falle also falsch ist. Unter *A oder B* (in Zeichen $A \vee B$) wird die Aussage verstanden, die genau dann wahr ist, wenn wenigstens eine der beiden Aussagen A, B wahr ist; kurz, $A \vee B$ ist genau dann wahr, wenn A oder B wahr ist, wobei *oder* im nichtausschließenden

Sinne gebraucht wird (das Zeichen $\vee$ ist die Abkürzung für die lateinische Übersetzung *vel* des nichtausschließenden Oder). Schließlich wollen wir durch Überstreichen die Negation einer Aussage ausdrücken: $\bar{A}$ (*nicht A* oder auch *non A*) ist eine Aussage, die genau dann wahr ist, wenn A falsch ist.

2. Mengen

2.1. Mengenbegriff

Wir werden es im folgenden immer wieder mit Mengen von gewissen Objekten zu tun haben. Wir stellen uns auf den Standpunkt der naiven Mengenlehre und sehen den Begriff der Menge als einen Grundbegriff an, der nicht weiter definiert, sondern höchstens umschrieben werden kann (auf eine axiomatische Charakterisierung des Mengenbegriffs verzichten wir). Unter einer *Menge* wollen wir also eine Gesamtheit gewisser Objekte verstehen, die wir *Elemente* der Menge nennen. Wir können also beispielsweise von der Menge der Äpfel in einem Korb, der Menge der reellen Zahlen, der Menge der Punkte im Raum oder der Menge der Punkte und Geraden in der Ebene sprechen. Entscheidend ist für uns nur, daß von jedem möglichen Objekt der Betrachtung feststeht, ob es der Menge angehört oder nicht. Außerdem ist natürlich zu fordern, daß von zwei Objekten [1]) feststeht, ob sie gleich oder verschieden sind (die Objekte müssen also unterscheidbar sein). (Es sei darauf hingewiesen, daß es wegen dieser Forderung der Unterscheidbarkeit zum Beispiel problematisch sein kann, von der Menge der Elektronen eines Atoms oder Moleküls zu sprechen.) Die Tatsache, daß x Element der Menge M ist, drücken wir aus durch $x \in M$ ($\in$ ist das *Zeichen der Elementbeziehung*).

Eine Menge können wir dadurch angeben, daß wir ihre Elemente durch eine (geschweifte) Klammer zusammenfassen. So ist beispielsweise $\{x, y\}$ die aus den Elementen x und y bestehende Menge, $\{x\}$ die einelementige Menge, die nur aus einem Element x besteht. Diese Bezeichnung läßt sich sinngemäß verallgemeinern; so ist z. B. $\{1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge aller natürlichen Zahlen, $\{1, 2, \ldots, n\}$, worin n eine natürliche Zahl ist, die Menge der natürlichen Zahlen, die kleiner oder gleich n sind.

Zwei Mengen M und M' heißen genau dann *gleich*, wenn sie im naiven Sinne gleich sind (aus genau denselben Elementen bestehen), d. h., wenn jedes Element der einen Menge auch Element der anderen Menge ist und umgekehrt, in Zeichen:

$$(M = M') \Leftrightarrow [(x \in M) \Leftrightarrow (x \in M')] .$$

Eine Menge A heißt *Untermenge* (oder *Teilmenge*) der Menge B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist, wenn also aus $x \in A$ stets $x \in B$ folgt (s. Abb. 2). Dabei

Abb. 2

[1]) Wenn wir von zwei Objekten oder dergleichen sprechen, so ist in der Regel zugelassen, daß es sich zweimal um dasselbe Objekt handelt. Ein analoger Sprachgebrauch ist in allgemeineren Fällen üblich.

ist die Gleichheit der beiden Mengen nicht ausgeschlossen. Die Tatsache, daß A Untermenge von B ist, drücken wir dadurch aus, daß wir $A \subset B$ oder auch $B \supset A$ schreiben. Wir können also sagen, daß die Menge A genau dann gleich der Menge B ist, wenn A Untermenge von B und gleichzeitig B Untermenge von A ist, in Zeichen:

$$(A = B) \Leftrightarrow [(A \subset B) \wedge (B \subset A)] .$$

Ist A Untermenge von B, aber nicht gleich B (gibt es also in B ein nicht in A enthaltenes Element), so sprechen wir von A als von einer *echten Untermenge* von B.

Wir erwähnen, daß neben der Bezeichnung $A \subset B$ zur Bezeichnung dessen, daß A Untermenge von B (in B *enthalten*) ist, auch die Bezeichnungen $A \subseteq B$ oder $A \subseteqq B$ üblich sind, während dann das Zeichen $\subset$ die Gleichheit ausschließt, also zur Kennzeichnung der echten Untermengen dient. Wir ziehen unsere Bezeichnungswahl vor, einmal deshalb, weil dadurch die häufiger vorkommende Situation mit dem einfacheren Zeichen versehen wird, zum anderen auch deshalb, weil sie dem Sprachgebrauch Untermenge entspricht, bei dem ja auch die Gleichheit nicht ausgeschlossen ist. Um zu kennzeichnen, daß A echte Untermenge von B ist, müssen wir dann gegebenenfalls zusätzlich das Ungleichheitszeichen $\neq$ verwenden.

2.2. Operationen mit Mengen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, aus gegebenen Mengen neue zu bilden. Wenn A und B zwei Mengen sind, so versteht man unter der *Vereinigungsmenge* $A \cup B$ von A und B die Menge derjenigen Objekte, die Elemente von A oder (im nicht ausschließenden Sinne) von B sind (Abb. 3):

$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow [(x \in A) \vee (x \in B)] ,$$

und allgemeiner unter $\bigcup_i M_i$ die Menge der Objekte, die wenigstens einer der Mengen M_i angehören.

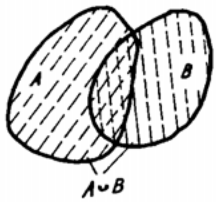

Abb. 3

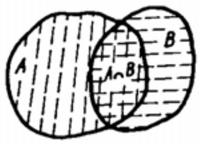

Abb. 4

Unter dem *Durchschnitt* $A \cap B$ der Mengen A und B versteht man die Menge derjenigen Elemente, die sowohl A als auch B angehören (Abb. 4); in Zeichen:

$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \in B)] .$$

Allgemeiner versteht man unter dem Durchschnitt mehrerer Mengen M_i die Menge derjenigen Elemente, die gleichzeitig allen M_i angehören, was analog zur Vereinigung etwa für $i = 1, \ldots, n$ mit $\bigcap_{i=1}^{n} M_i$ bezeichnet wird.

Bei der Bildung des Durchschnitts zweier Mengen A, B kann nun ein Fall eintreten, den wir bislang nicht bedacht haben; es kann nämlich sein, daß kein Element von A zugleich Element von B ist, so daß wir im ursprünglichen (naiven) Sinne nicht von einer *Menge* $A \cap B$ sprechen können. Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, führt man ganz formal den Begriff der *leeren Menge* ein, die kein einziges Element enthält und mit $\emptyset$ (oder auch mit Λ) bezeichnet wird, und sagt im vorliegenden Fall, der Durchschnitt von A und B sei leer (gleich der leeren Menge): $A \cap B = \emptyset$ (A und B heißen dann auch *disjunkt* oder *elementefremd*). Da der Durchschnitt von Mengen stets in jeder der beteiligten Mengen enthalten ist, hat man die leere Menge $\emptyset$ als Untermenge jeder Menge anzusehen.[1])

Bildet man die Menge derjenigen Elemente der Menge A, die nicht zugleich der Menge B angehören, so erhält man die *Differenz* $A \setminus B$ von A und B (Abb. 5):

$$(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \notin B)]$$

(das Zeichen $\notin$ stellt die Negation von $\in$ dar, drückt also aus, daß etwas nicht Element von einer gewissen Menge ist). Wir haben zur Bezeichnung der Differenz den schrägen Strich und nicht das Minuszeichen – gewählt, weil es sich bei den Mengen zum Beispiel um reelle Zahlen handeln kann und dann unter der Differenzmenge nicht etwa die Menge der aus den reellen Zahlen bildbaren Differenzen gemeint ist.

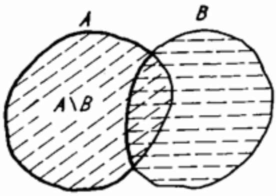

Abb. 5

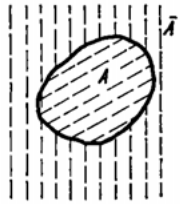

Abb. 6

Die von uns betrachteten Mengen sollen stets als Untermengen in einer fest vorgegebenen Obermenge M_0 aufgefaßt werden, die wir dann als *Allmenge* bezeichnen. Das kann z. B. die Menge der reellen Zahlen, die Menge der Punkte des Raumes o. ä. sein. Gewöhnlich können wir auf die explizite Angabe der Allmenge verzichten, da diese in der Regel aus dem Zusammenhang hervorgehen wird.

Die Differenzmenge $M_0 \setminus A$ heißt dann auch die *Komplementärmenge* der Menge A (Abb. 6) und wird von uns mit $\bar{A}$ bezeichnet werden (üblich sind auch die Bezeichnungen A' und $\complement A$). $\bar{A}$ besteht also aus genau denjenigen Elementen (der Allmenge), die nicht in A enthalten sind:

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A \,.$$

[1]) Diese Konvention steht in Einklang mit der Verabredung, einen Satz als richtig anzusehen, wenn er gegenstandslos ist, d. h., wenn es kein Objekt gibt, das die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Die Aussage, daß ein Element der leeren Menge einer gegebenen Menge angehört, ist aber gegenstandslos, da es kein solches Element gibt, also ist jedes Element der leeren Menge in der gegebenen Menge enthalten, die leere Menge selbst also Untermenge jeder anderen Menge.

Als letzte Möglichkeit, von einer Menge A zu einer neuen Menge zu gelangen, wollen wir den Übergang zur Menge aller Untermengen von A nennen. Diese Menge stellt die sog. *Potenzmenge* von A dar und wird mit $\mathfrak{P}A$ oder auch mit 2^A bezeichnet. Ist beispielsweise A die zweielementige Menge $\{1, 2\}$, so besteht $\mathfrak{P}A$ aus 4 Elementen: der leeren Menge $\emptyset$ (die ja in jeder Menge als Untermenge enthalten ist), den beiden einelementigen Mengen $\{1\}$ und $\{2\}$ (die begrifflich von den Elementen 1 und 2 zu unterscheiden sind) sowie der Menge A selbst als unechter Teilmenge.

2.3. Rechenregeln

Da weder beim Durchschnitt noch bei der Vereinigung eine bestimmte Reihenfolge der beiden Mengen ausgezeichnet ist, sind diese Verknüpfungen *kommutativ*, d. h., es gilt für beliebige Mengen A, B das *Kommutativgesetz*

$$A \cup B = B \cup A\,, \quad A \cap B = B \cap A\,.$$

$(A \cup B) \cup C$ besteht definitionsgemäß aus den Elementen, die in $A \cup B$ oder in C liegen, $A \cup B$ dagegen aus denen, die zu A oder B gehören. $(A \cup B) \cup C$ besteht also aus denjenigen, die zu A oder zu B oder zu C gehören, ist also gleich der Vereinigung von A, B und C. Zu demselben Resultat gelangt man offensichtlich, wenn man $A \cup (B \cup C)$ bildet. Analog kann man für den Durchschnitt schließen. Daher gelten die beiden *Assoziativgesetze* (die Durchschnitts- und Vereinigungsbildung sind *assoziativ*):

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)\,, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\,.$$

Etwas interessanter ist die Tatsache, daß für beliebige Mengen A, B, C auch die beiden *Distributivgesetze*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,,$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

gelten. (Wenn man vereinbart, daß das Zeichen $\cap$ analog wie die Multiplikation reeller Zahlen gegenüber der Addition stärker bindet als das Zeichen $\cup$, kann man auf der rechten Seite der ersten Gleichung und auf der linken Seite der zweiten Gleichung die Klammern weglassen. Damit steht in Einklang, daß man statt $A \cap B$ auch kürzer AB schreibt und den Durchschnitt auch als [mengentheoretisches] Produkt, die Vereinigungsmenge als [mengentheoretische] Summe bezeichnet.)

Wir begnügen uns hier mit dem Beweis der ersten Gleichung und überlassen den Beweis der zweiten Gleichung dem Leser als Übungsaufgabe. Der Beweis ist typisch für Beweise dieser Art und stützt sich auf die auf S. 19 gegebene Charakterisierung der Gleichheit zweier Mengen: um die Gleichheit zweier Mengen nachzuweisen, hat man lediglich zu zeigen, daß jede dieser Mengen in der anderen enthalten ist. Wir bezeichnen die linke Seite der Gleichung zur Abkürzung mit L, die rechte mit R und wählen ein beliebiges Element x aus L. Nach Definition des Durchschnitts ist dann

$$(x \in L) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B \cup C)\,,$$

und der zweiten Inklusion zufolge besteht auf alle Fälle eine der beiden Beziehungen $x \in B$ oder $x \in C$, während in jedem Falle $x \in A$ ist. Im ersten Falle ist also $x \in A \cap B$, im zweiten $x \in A \cap C$, auf jeden Fall demnach $x \in R$ und damit $L \subset R$.

Gehen wir umgekehrt von einem Element $x \in R$ aus, so muß der Definition der Vereinigung zufolge $x \in A \cap B$ oder $x \in A \cap C$ sein. Im ersten Falle ist also sowohl $x \in A$ als auch $x \in B$, im zweiten sowohl $x \in A$ als auch $x \in C$, auf alle Fälle also $x \in A$ und $x \in B \cup C$ und somit $x \in L$, also $R \subset L$. Daher muß $L = R$ sein.

In bezug auf die *Komplementärmengenbildung* gilt für beliebige Mengen M trivialerweise $\bar{\bar{M}} = M$ (zweimaliger Übergang zur Komplementärmenge gibt die ursprüngliche Menge wieder), denn nach Definition ist

$$x \in \bar{\bar{M}} \Leftrightarrow x \notin \bar{M} \Leftrightarrow x \in M \ .$$

In Zusammenhang mit dem *Durchschnitt* bzw. der *Vereinigung* gelten für beliebige Mengen A, B die sog. *de Morganschen Regeln*:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \ , \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \ .$$

Wir beweisen wieder nur die erste Gleichung und überlassen den Beweis der zweiten dem Leser. Wir bezeichnen die linke Seite der Gleichung mit L, die rechte mit R und wählen ein $x \in L$. Wegen der Äquivalenzen

$$\begin{aligned} x \in L \Leftrightarrow x \notin A \cap B &\Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \in \bar{A}) \vee (x \in \bar{B}) \Leftrightarrow x \in \bar{A} \cup \bar{B} = R \end{aligned}$$

ist dann x auch in R enthalten, also $L \subset R$. Umgekehrt folgt aus denselben Äquivalenzen, wenn man sie in der anderen Richtung liest, aus $x \in R$ wieder $x \in L$, also auch $R \subset L$. Daher muß $L = R$ sein.

Auf Grund der DE MORGANschen Regeln kann man, statt einen komplizierteren, aus Vereinigungen und Durchschnitten gebildeten Ausdruck vollständig zu überstreichen, auch bloß seine einzelnen Glieder überstreichen, wenn man dafür statt $\cap$ überall $\cup$ und statt $\cup$ überall $\cap$ schreibt. Wegen $\bar{\bar{M}} = M$ kommt man dabei mit höchstens einer Überstreichung aus. Auf Grund der Distributivgesetze kann man obendrein noch jeden nur mittels Durchschnitts- und Vereinigungsmengenbildung erzeugten Ausdruck als eine Vereinigung von lauter Durchschnitten oder als einen Durchschnitt von lauter Vereinigungen schreiben.

Den DE MORGANschen Regeln zufolge können wir uns übrigens beim Beweis der beiden Kommutativgesetze, der beiden Assoziativgesetze und der beiden Distributivgesetze auf jeweils eines beschränken. Wenden wir nämlich auf das Kommutativgesetz

$$A \cap B = B \cap A$$

die Operation des Überstreichens an, so folgt

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B} = \overline{B \cap A} = \bar{B} \cup \bar{A} \ ,$$

also das Kommutativgesetz für die Vereinigungsmengenbildung der Mengen $\bar{A}$ und $\bar{B}$, und da die Mengen A und B ganz beliebig waren, sind es auch die Mengen $\bar{A}$ und $\bar{B}$ (um ganz formal das Gesetz für A und B zu erhalten, brauchte man ja bloß von $\bar{A}$ und $\bar{B}$ statt von A und B auszugehen).

Ebenso erhält man aus dem Assoziativgesetz der Durchschnittsbildung

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

durch Überstreichen das Assoziativgesetz der Vereinigung:

$$(\bar{A}\cup\bar{B})\cup\bar{C}=\overline{(A\cap B)\cap C}=\overline{A\cap(B\cap C)}=\bar{A}\cup(\bar{B}\cup\bar{C})$$

und aus dem Distributivgesetz

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

das andere Distributivgesetz

$$\bar{A}\cup(\bar{B}\cap\bar{C})=\overline{A\cap(B\cup C)}=\overline{(A\cap B)\cup(A\cap C)}=(\bar{A}\cup\bar{B})\cap(\bar{A}\cup\bar{C})\,,$$

ausgesprochen für die gleichfalls beliebigen Mengen $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$.

Durch Anwendung der Operation des Überstreichens folgt, daß jede mittels der Zeichen $\cup$ und $\cap$ gebildete *allgemeingültige* (d. h. bei beliebiger Wahl der darin eingehenden Mengen richtige) Gleichung zwischen Mengen A_i wiederum in eine allgemeingültige Beziehung übergeht, wenn man darin überall die Zeichen $\cup$ und $\cap$ austauscht. Das ist das sog. *Dualitätsprinzip der Mengenlehre.* (Ein anderes Dualitätsprinzip werden wir später in der projektiven Geometrie kennenlernen (s. S. 279).)

Aufgaben

1. a) Beweise: Für beliebige Mengen M_1, M_2, M_3 gilt

$$M_1\cup(M_2\cap M_3)=(M_1\cup M_2)\cap(M_1\cup M_3)\,,$$
$$\overline{M_1\cup M_2}=\overline{M}_1\cap\overline{M}_2\,.$$

b) A, B, C seien Aussagen. Beweise, daß die Aussagen

$A\vee(B\wedge C)$ und $(A\vee B)\wedge(A\vee C)$,

$\overline{A\vee B}$ und $\bar{A}\wedge\bar{B}$

äquivalent sind (d. h., daß sie jeweils beide gleichzeitig wahr oder gleichzeitig falsch sind).

c) Beweise, daß a) bei geeigneter Interpretation der Aussagen A, B, C aus b) folgt.

2. a) Drücke die Differenz $A\backslash B$ durch $\cup$, $\cap$ und $^-$ aus.

b) Beweise: $A\Delta B=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$ (Δ bezeichnet dabei die sog. *symmetrische Differenz:*

$A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$).

3. a) Zeige, daß die Bildung der symmetrischen Differenz assoziativ $[(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)]$ und mit der Durchschnittsbildung distributiv ist $[(A\Delta B)\cap C=(A\cap C)\Delta(B\cap C)]$. Zeige, daß die symmetrische Differenz mehrerer Mengen gleich der Menge derjenigen Elemente ist, die genau in einer ungeraden Anzahl der Mengen enthalten sind.

b) $(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)\backslash(A_1A_2\cup A_1A_3\cup\ldots\cup A_{n-1}A_n)\cup$

$(A_1A_2A_3\cup A_1A_2A_4\cup\ldots\cup A_{n-2}A_{n-1}A_n)\backslash\ldots\backslash$ bzw. $\cup\ A_1A_2\ldots A_n=?$

(Den Durchschnitt haben wir hierbei kürzer als Produkt geschrieben; die Operationen $\backslash$ und $\cup$ zwischen den Klammern sind der Reihe nach auszuführen.)

4. Vergleiche die folgenden Mengen miteinander:

a) $(A\cup B)\cap(A\cup C\cup\bar{B})\cap\bar{C}$,

b) $(A\cap B)\cup(A\cap C\cap\bar{B})\cup\bar{C}$,

c) $(A\backslash B)\cap(B\cup C)$.

5. Charakterisiere die Elemente x, für die die folgenden Bedingungen zutreffen:

a) $x \notin ((A \setminus B) \cap C) \cup B$,

b) $x \notin \overline{((A \cap \bar{B}) \setminus C)} \cap A$,

c) $x \in \overline{(\bar{A} \cup B) \setminus \bar{C}} \cap A$ und gleichzeitig $x \notin A \cap B \cap C$,

d) $x \in (A \setminus B) \cap (B \setminus C)$.

6. Drücke die folgenden Mengen durch die Mengenoperationen aus:
a) die Menge der Elemente, die in genau einer der Mengen A, B, C enthalten sind,
b) die Allmenge,
c) die leere Menge,
d) die Menge der x, für die eine der folgenden Möglichkeiten zutrifft: $x \in A$ und $x \notin B$; $x \notin C$; $x \notin A$ und $x \in C$.

3. Abbildungen

3.1. Grundbegriffe

Wird jedem Element einer Menge A (genau) ein Element einer Menge B zugeordnet, so ist damit eine (eindeutige) *Abbildung* von A in B gegeben, die wir etwa mit f bezeichnen wollen. Symbolisch drücken wir dies durch einen Pfeil aus, indem wir schreiben:

$$f\colon A \to B \quad \text{oder auch} \quad A \xrightarrow{f} B .$$

Um anzugeben, daß bei der Abbildung f das Element $x \in A$ in das Element $y \in B$ übergeht, schreiben wir dann auch

$$f\colon x \mapsto y \quad \text{oder} \quad x \overset{f}{\mapsto} y .$$

Wenn es uns nicht auf den Namen der Abbildung (hier f) ankommt, können wir ihn auch weglassen. Die Menge A, die abgebildet wird, heißt *Definitionsbereich* oder *Vorbereich* der Abbildung, die Menge der Bilder, die bei der Abbildung erhalten wird (also Untermenge von B ist), der *Wertevorrat* oder *Nachbereich* der Abbildung.

Wir erhalten beispielsweise eine Abbildung der Menge der reellen Zahlen in die Menge der reellen Zahlen, indem wir jeder Zahl ihr Quadrat als Bild zuordnen, was wir auch elementeweise durch die Pfeilschreibweise $x \mapsto x^2$ ausdrücken können. In diesem Falle ist die Menge aller reellen Zahlen der Definitionsbereich und die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen der Wertevorrat.

Statt Abbildung sagt man auch *Funktion*, diese beiden Begriffe sind also im Grunde genommen synonym; die Benennung Funktion wird vor allem gebraucht, wenn es sich um Abbildungen reeller oder komplexer Zahlen handelt, die Benennung Abbildung dagegen dann, wenn es um allgemeinere Mengen geht.

Zwei Abbildungen f und g in B heißen genau dann *gleich*, wenn sie denselben Definitionsbereich A haben und ihre Wirkung auf jedes Element von A dieselbe ist. Man beachte insbesondere, daß zur Gleichheit zweier Abbildungen (Funktionen) die Gleichheit der Definitionsbereiche gefordert wird. Betrachte ich zum Beispiel eine auf der Menge A definierte Funktion f nur auf einer (echten) Untermenge A' von A, so erhalte ich eine neue Funktion f', die die *Einschränkung* von f auf A' heißt und gewöhnlich mit $f\,|_{A'}$ bezeichnet wird. Wenden wir die für Funktionen gewohnte Schreibweise $f(x)$ für das Bild des Elements x bei der Abbildung f an, so ist also $f'(x)=f(x)$ für alle $x\in A'$ (und für andere x ist f' nicht definiert).

Eine Funktion ist erst dann definiert, wenn neben der Zuordnungsvorschrift ihr Definitionsbereich festgelegt ist. Das gilt auch für Abbildungen, die durch elementare Funktionen ausgedrückt werden können, beispielsweise $x\mapsto x^2$ oder $x\mapsto\sin x$. Die hierin auf der rechten Seite stehenden Ausdrücke x^2 oder $\sin x$ haben zwar für beliebige reelle Zahlen x einen Sinn, trotzdem gehört aber strenggenommen auch hier zur Definition der betreffenden Funktionen die Angabe des Definitionsbereiches hinzu. Häufig verzichtet man aber stillschweigend auf die explizite Angabe des Definitionsbereichs, wenn es wie in diesen Beispielen einen gewissermaßen „natürlichen" Definitionsbereich gibt, im vorliegenden Falle etwa die Menge der reellen Zahlen. (Überhaupt ist zu bedenken, daß die Definition einer Funktion nicht etwa an die Angabe eines analytischen Ausdrucks wie in den obigen Beispielen gebunden ist, sondern durch eine ganz „wilde" Zuordnungsvorschrift gegeben sein kann.)

3.2. Surjektive, injektive, bijektive Abbildungen

Ist bei der Abbildung f von A in B jedes Element von B Bild von wenigstens einem Element von A, so nennen wir f eine Abbildung von A auf B. Eine solche Abbildung heißt auch *surjektiv* oder eine *Surjektion.* Beispielsweise ist die oben betrachtete Abbildung $x\mapsto x^2$ eine Abbildung der Menge der reellen Zahlen auf die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen, dagegen lediglich eine Abbildung in die Menge aller reellen Zahlen.

Ist jedes Element von B Bild von höchstens einem Element von A (ein solches Element heißt *Urbild* seines Bildes in B), so sprechen wir von der (eindeutigen) Abbildung von A in B als von einer *eineindeutigen* Abbildung von A in B, einer *injektiven* Abbildung oder einer *Injektion* von A in B. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß das Wort injektiv also mehr verlangt, als es vermuten läßt, es handelt sich um mehr als um eine Abbildung in. Zum Beispiel ist die durch die Vorschrift $x\mapsto x^2$ gegebene Abbildung der Menge der positiven Zahlen in sich injektiv, dagegen nicht die durch dieselbe Vorschrift gegebene Abbildung der Menge aller reeller Zahlen auf die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen oder in die Menge der reellen Zahlen.

Ist eine (eindeutige) Abbildung f von A in B zugleich surjektiv und injektiv, handelt es sich also bei f um eine eineindeutige Abbildung von A auf B, so nennen wir f auch eine *bijektive* Abbildung oder eine *Bijektion.* So wird beispielsweise durch die Vorschrift $x\mapsto x^2$ eine bijektive Abbildung der Menge der nichtnegativen reellen Zahlen auf sich definiert. Eine bijektive Abbildung von A auf B ist dadurch charakterisiert, daß jedes Element von B genau ein Urbild in A besitzt.

Zu einer bijektiven Abbildung f von A auf B kann man eine Abbildung f^{-1} von B auf A finden, die die Wirkung von f gerade rückgängig macht, indem man $f^{-1}(y)$ bei beliebiger Wahl von y aus B gleich demjenigen (eindeutig bestimmten) x aus A setzt, für das $f(x)=y$ ist. Diese Abbildung ist dann offensichtlich eine Bijektion von B auf A. f^{-1} heißt *Umkehrabbildung* (*Umkehrfunktion*) oder *inverse Abbildung* zu f.

Da sich eine injektive Abbildung f von A in B nur darin von einer Bijektion unterscheidet, daß ihr Wertevorrat nicht mit ganz B übereinzustimmen braucht, handelt es sich bei einer Injektion von A in B stets um eine Bijektion von A auf eine gewisse Untermenge B' von B. Man kann daher auch in diesem Falle eine Umkehrabbildung

f^{-1} von f definieren, und zwar stellt f^{-1} eine Bijektion von B' auf A dar. (Eine derartige Abbildung einer *Untermenge* B' von B in eine Menge A nennt man auch eine Abbildung aus B in A.)

3.3. Zusammensetzung von Abbildungen. Diagramme

Es sei f eine Abbildung von A in B und g eine Abbildung von B in C, was wir kurz durch das *Diagramm*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

zum Ausdruck bringen können. Das Diagramm sagt aus, daß der Wertevorrat von f im Definitionsbereich von g enthalten ist. Durch die Nacheinanderausführung der Abbildungen f und g erhalten wir eine *zusammengesetzte Abbildung* $h: A \to C$, die wir in der Form eines Produkts von f und g mit einem Kringel $\circ$ als Verknüpfungszeichen schreiben: $h = g \circ f$ und durch ihre Wirkung

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{für} \quad x \in A$$

definieren. Dieses Verknüpfungsgesetz legt auch die gewählte Reihenfolge der „Faktoren" f und g nahe. (Hätten wir für das Bild eines Elements x bei einer Abbildung σ stattdessen die *exponentielle Schreibweise* x^σ gewählt, so wäre es besser gewesen, für die Zusammensetzung zweier Abbildungen σ und τ [erst σ, dann τ] $\sigma\tau$ zu schreiben, damit $x^{\sigma\tau} = (x^\sigma)^\tau$ wird; diese Schreibweise hat überdies den Vorteil, besser der Reihenfolge der Abbildungen in den Diagrammen zu entsprechen, die üblicherweise auch von links nach rechts gelesen werden.) Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, werden wir statt $g \circ f$ auch kürzer gf schreiben, wobei nur darauf zu achten ist, daß $(gf)(x)$ natürlich im allgemeinen nicht gleich dem Produkt der Funktionswerte $g(x)$ und $f(x)$ ist, falls diese Werte und ebenso ihr Produkt überhaupt definiert sind.

Handelt es sich bei der Abbildung f von A in B um eine Bijektion, so können wir demnach die inverse Abbildung f^{-1} von B in A als diejenige Abbildung g von B in A charakterisieren, für die $g \circ f$ die *identische Abbildung* id_A von A auf A ist, die alles festläßt:

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A\,, \quad \mathrm{id}_A(x) = x \quad \text{für alle} \quad x \in A\,.$$

Ebenso sieht man sofort, daß $f \circ f^{-1}$ die identische Abbildung id_B von B auf B ist. Wir erkennen hieran zugleich, daß die „Multiplikation" von Abbildungen im allgemeinen nicht kommutativ ist, denn schon $f^{-1} \circ f$ ist etwas anderes als $f \circ f^{-1}$. Außerdem kann man nicht beliebige Abbildungen miteinander multiplizieren, sondern nur solche, für die die eingangs genannte Bedingung erfüllt ist.

Dagegen *ist die Multiplikation von Abbildungen stets assoziativ*, d. h., wenn ein Diagramm von Mengen und Abbildungen vorliegt:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D\,,$$

so ist

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f\,.$$

Da es sich nämlich auf beiden Seiten dieser Gleichung um eine Abbildung von A in D handelt, haben wir zum Beweis dessen nur noch nachzuweisen, daß ihre Wirkungen auf ein beliebiges Element x von A gleich sind. Auf Grund der Produktdefinition ist aber (wir lassen die Kringel der Kürze halber weg):

$$[h(gf)](x) = h((gf)(x)) = h(g(f(x))) ,$$

und ebenso erhält man

$$[(hg)f](x) = (hg)(f(x)) = h(g(f(x))) ,$$

die beiden Bilder sind also in der Tat gleich. Wir können daher bei der Multiplikation von Abbildungen auf eine Beklammerung verzichten.

Wir merken noch die unmittelbar zu bestätigende Aussage an:

Existiert für gegebene Abbildungen f, g, h das Produkt $(hg)f$, so existiert auch das Produkt $h(gf)$ (und die beiden Produkte sind wegen der Assoziativität der Multiplikation von Abbildungen gleich). Außerdem bestätigt man sofort für umkehrbare Abbildungen die Aussage $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$.

Hat ein Diagramm von Mengen und Abbildungen die Eigenschaft, daß man auf verschiedenen Wegen, die von einer Menge in Richtung der Pfeile zu einer anderen führen, immer zum selben Ergebnis gelangt, so nennt man das *Diagramm kommutativ*. So ist zum Beispiel das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A' \arrow[r, "g'"'] & B' \end{tikzcd}$$

genau dann kommutativ, wenn $gf = g'f'$ ist. Bei komplizierteren Diagrammen kann man durch die Eigenschaft der Kommutativität eine ganze Reihe von Gleichungen zwischen zusammengesetzten Abbildungen zum Ausdruck bringen. Außerdem braucht man, wenn man diese Sprechweise verwendet, den im Diagramm auftretenden Abbildungen nicht notwendig Namen zu geben.

In der Sprache der kommutativen Diagramme können wir zum Beispiel sagen: Das Produkt gf zweier Abbildungen $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ ist diejenige Abbildung $h\colon A \to C$, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & C \end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Die Umkehrabbildung f^{-1} einer bijektiven Abbildung $f\colon A \to B$ ist diejenige Abbildung $g\colon B \to A$, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\iota"'] & & A \end{tikzcd}$$

kommutativ macht, worin $\iota = \mathrm{id}_A$ die identische Abbildung von A auf A ist.

3.4. Graph einer Funktion. Kartesisches Produkt

Von der Schule her ist der Begriff der graphischen Darstellung (des Graphen) einer Funktion bekannt. Man erhält sie dadurch, daß man in der Ebene nach Wahl eines senkrechten Achsenkreuzes, der x-Achse und der y-Achse, über jedem Punkt x auf der x-Achse in der Höhe $f(x)$ (die gleich dem Wert der Funktion f an der Stelle x ist) einen Punkt aufträgt; die Menge dieser Punkte bildet dann eine „Kurve", das Kurvenbild, die graphische Darstellung oder den *Graphen* der Funktion f (Abb. 7). In Kenntnis des Kurvenbildes kann man offenbar umgekehrt sofort wieder die Funktion rekonstruieren.

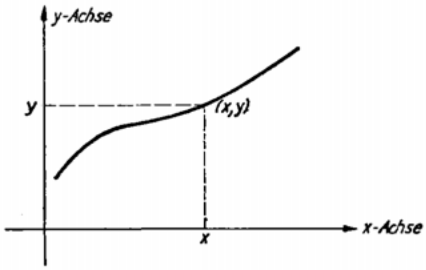

Abb. 7

Wenn wir von der anschaulichen Darstellung des Graphen absehen und die ganze Konstruktion auf ihren logischen Kern reduzieren, so stellen wir folgendes fest. Jeder Kurvenpunkt wird durch seine beiden *Koordinaten* x und y eindeutig bestimmt und bestimmt umgekehrt diese Koordinaten eindeutig, er kann also durch das Paar (x, y) eindeutig charakterisiert werden. Ferner gehört zu jedem Paar reeller Zahlen (x, y), als x- bzw. y-Koordinate aufgefaßt, ein Punkt der Ebene. Die Kurve (und damit die Funktion) ist also eindeutig bestimmt, wenn man die Menge derjenigen Paare (x, y) kennt, die Kurvenpunkten entsprechen.

Damit ist nahegelegt, wie man den Begriff der graphischen Darstellung auf beliebige (eindeutige) Abbildungen f einer Menge A in eine Menge B verallgemeinern kann. Man bildet dazu die Menge aller *geordneten Paare* (a, b) von Elementen a aus A und b aus B (geordnet heißt dieses Paar deshalb, weil es auf die Reihenfolge der Elemente ankommt: man muß wissen, was das erste Element und was das zweite Element des Paares ist). Zwei solche Paare (a, b) und (a', b') sehen wir genau dann als gleich an: $(a, b) = (a', b')$, wenn sie fürs Auge gleich sind, d. h., wenn $a = a'$ und zugleich $b = b'$ ist. Die Menge dieser Paare heißt das *kartesische Produkt* von A mit B und wird mit $A \times B$ bezeichnet.

In dem kartesischen Produkt $A \times B$ zeichnen wir nun die Untermenge derjenigen Paare (a, b) aus, für die $a \overset{f}{\mapsto} b$, also $b = f(a)$ gilt. Diese Untermenge heißt dann der *Graph der Funktion* f. Es ist offensichtlich, daß das eine Verallgemeinerung des klassischen Begriffs der graphischen Darstellung einer Funktion darstellt. Insbesondere wird der Graph der identischen Abbildung $\mathrm{id}_A\colon A \to A$ durch die Untermenge aller Paare der Form (a, a) mit $a \in A$ gegeben.

Umgekehrt ist *jede Untermenge F von $A \times B$ Graph einer Funktion, wenn sie die folgende Eigenschaft hat: Zu jedem $a \in A$ gibt es genau ein* (d. h. ein und nur ein) *$b \in B$ mit der Eigenschaft* $(a, b) \in F$. Die dadurch bestimmte Funktion f wird dann gerade dadurch festgelegt, daß sie jedem $a \in A$ dasjenige $b \in B$ zuordnet, für das $(a, b) \in F$ ist, es ist also F in der Tat der Graph von f.

Die Abbildung f ist surjektiv, wenn zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ mit $(a, b) \in F$ existiert; injektiv, wenn zu jedem $b \in B$ höchstens ein $a \in A$ mit $(a, b) \in F$ existiert; und bijektiv, wenn zu jedem $b \in B$ genau ein $a \in A$ mit $(a, b) \in F$ existiert.

Wenn die Funktion f umkehrbar ist, also jede Parallele zur x-Achse das Kurvenbild höchstens einmal schneidet, erhält man die graphische Darstellung der auf dem Wertevorrat von f definierten Umkehrfunktion f^{-1} bekanntlich dadurch, daß man die graphische Darstellung von f an der Winkelhalbierenden der Achsen spiegelt oder, was auf dasselbe hinausläuft, das Kurvenbild von f selbst als über der y-Achse aufgetragenes Kurvenbild von f^{-1} deutet. Entsprechend einfach bekommt man im allgemeinen Falle den *Graphen F' der Umkehrfunktion* f^{-1} einer bijektiven Funktion f als Menge der Paare (b, a), für die das Paar (a, b) im Graphen der Funktion f liegt. Der Übergang zur Umkehrfunktion drückt sich also einfach in der Vertauschung der beiden in den geordneten Paaren stehenden Elemente aus.

Die Bildung der Menge der Paare gibt uns auch die Möglichkeit, ganz allgemein eine beliebige (also auch mehrdeutige)[1] Abbildung $f\colon A \to B$ rein mengentheoretisch zu definieren. Wir brauchen dazu lediglich eine Untermenge F des kartesischen Produkts $A \times B$ auszuzeichnen und können dann sagen, ein Element a wird durch f auf diejenigen $b \in B$ abgebildet, für die das Paar (a, b) in F liegt. Damit f auf ganz A definiert ist, f also eine Abbildung von A in B definiert, haben wir lediglich zu fordern, daß es zu jedem $a \in A$ mindestens ein $b \in B$ mit $(a, b) \in F$ gibt. Anderenfalls würden wir auf diese Weise eine Abbildung aus A in B erhalten. Das stellt eine sozusagen mehr statische Auffassung einer Abbildung dar gegenüber der dynamischen als Zuordnung, auf Grund derer wir ursprünglich den Funktionsbegriff eingeführt haben.

4. Relationen und Operationen

Die Elemente einer Menge M können in vielerlei Beziehung zueinander stehen. Es kann sein, daß eine Abbildung f von M in M erklärt ist, so daß man danach fragen kann, ob ein gegebenes Element a von M ein gegebenes Element b von M zum Bild hat oder nicht. Man kann zwei Elemente a, b danach untersuchen, ob sie gleich sind oder nicht. Bei reellen Zahlen kann $a \leqq b$ sein oder nicht. Es können aber auch Beziehungen etwa zwischen drei Elementen bestehen. So kann man etwa fragen, ob zwischen 3 reellen Zahlen a, b, c die Beziehung $a+b=c$ oder die Beziehung $ab=c$ besteht. All diese möglichen Beziehungen lassen sich mit dem Begriff der Relation erfassen.

4.1. Binäre Relationen

Ebenso wie der Graph einer Funktion wird eine *Relation* (genauer: eine *zweistellige* oder *binäre Relation*, weil es sich dabei jeweils um eine Beziehung zwischen zwei Elementen handelt) R auf einer Menge M durch eine (gleichfalls mit R bezeichnete) Untermenge des kartesischen Produkts $M^2 = M \times M$ festgelegt; zwei (in dieser Reihenfolge genommene) Elemente a und b von M stehen genau dann in der Beziehung R zueinander, wenn das geordnete Paar (a, b) zur Untermenge R gehört. Das bringt man auch dadurch

[1]) Die im folgenden betrachteten Abbildungen werden dagegen stets (auch ohne besonderen Hinweis) als eindeutig vorausgesetzt.

zum Ausdruck, daß man aRb schreibt. Diese Schreibweise entspricht dem üblichen Vorgehen, wenn es sich etwa um die Gleichheitsrelation ($=$) oder die Kleinerrelation ($<$) handelt.

Da eine zweistellige Relation in genau derselben Weise durch Paare erklärt ist wie der Graph einer Funktion, können wir sie etwa für den Fall, daß M die Menge der reellen Zahlen ist, auch in derselben Weise graphisch darstellen, indem wir das Paar (a, b) als Koordinaten eines Punktes der xy-Ebene auffassen und alle die Punkte eintragen, die Paaren (a, b) entsprechen, die in der Relation R stehen (in Abb. 8 für die Relationen $=$ in a) und $<$ in b) dargestellt).

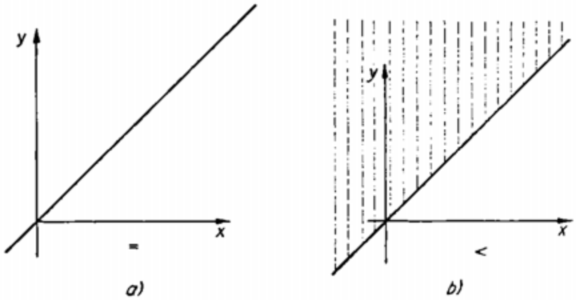

Abb. 8

Eine Abbildung f einer Menge A in eine Menge B läßt sich stets auch als eine spezielle (binäre) Relation auf der Vereinigungsmenge $M = A \cup B$ auffassen, die wie oben bereits durch eine Menge von Paaren (a, b) mit $a \in A$, $b \in B$ (also auf jeden Fall $a, b \in M$) gegeben wird. Der Begriff der Relation ist also allgemeiner als der der Abbildung.

Wir wollen einige *spezielle Arten binärer Relationen* untersuchen.

Wir nennen die Relation R auf M *reflexiv*, wenn aRa für alle $a \in M$ gilt, alle Elemente von M also zu sich selbst in der Relation R stehen. Die Gleichheitsrelation $=$ sowie die Relation $\leqq$ auf der Menge der reellen Zahlen haben beispielsweise diese Eigenschaft, denn es gilt stets $a = a$ und $a \leqq a$, desgleichen die auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(A)$ der Menge A definierte Relation R der Inklusion (für Untermengen U, V von A gilt genau dann URV, wenn $U \subset V$). Dagegen hat die Kleinerbeziehung auf der Menge der reellen Zahlen nicht diese Eigenschaft, denn es gilt nicht $a < a$.

Die Relation R auf M heißt *symmetrisch*, wenn mit aRb stets auch bRa gilt. Die Gleichheitsbeziehung $=$ ist symmetrisch, die Beziehung $\leqq$ oder $\subset$ jedoch nicht.

Die Relation R auf M heißt *transitiv*, wenn aus aRb, bRc stets aRc folgt. Die Gleichheitsrelation sowie die Relationen $\leqq$, $<$ und $\subset$ sind offensichtlich transitiv.

Schließlich nennen wir eine Relation R auf M *antisymmetrisch*, wenn aus aRb und bRa stets $a = b$ folgt. Die Gleichheitsbeziehung besitzt trivialerweise diese Eigenschaft, ebenso die Relation $\leqq$. Für die Inklusion $\subset$ bedeutet sie im wesentlichen gerade die Definition der Gleichheit von Mengen.

Wichtig sind vor allem gewisse Kombinationen dieser Eigenschaften. Eine Relation, die zugleich reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heißt auch eine *Äquivalenzrelation*. Hierunter fällt die gewöhnliche Gleichheitsrelation. Mit derartigen Relationen werden wir uns gleich noch ausführlicher befassen.

Eine Relation, die zugleich reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist, heißt eine *Ordnungsrelation* (oder genauer *Halbordnungsrelation*), weil sie ähnliche Eigenschaften wie die Ordnung der reellen Zahlen der Größe nach hat. Hierunter fällt trivialerweise wieder die Gleichheitsrelation, ferner die Relation $\leqq$ und die Inklusionsbeziehung $\subset$. Letztere zeigt gleichzeitig, daß im Falle einer (Halb-) Ordnungsrelation R nicht zwischen zwei Elementen a, b stets eine der Beziehungen aRb oder bRa zu bestehen braucht, es kann auch *unvergleichbare* Elemente geben (zwei Untermengen einer festen Menge brauchen nicht die Eigenschaft zu haben, daß eine davon in der anderen enthalten ist).

4.2. Äquivalenzrelationen

Der Begriff der Äquivalenzrelation stellt eine Verallgemeinerung des primitiven Gleichheitsbegriffs dar und ist fundamental für die gesamte Mathematik, ja für die Wissenschaft überhaupt. Jegliche Begriffsbildung beruht auf dem Begriff der Äquivalenz, indem nämlich stets von gewissen (im betreffenden Zusammenhang) als unwesentlich angesehenen Eigenschaften abgesehen wird, die Dinge in gewissem Sinne unscharf angesehen werden; man hat nur zu verlangen, daß dabei wieder ein sinnvoller schwächerer Gleichheitsbegriff herauskommt, und das läuft gerade darauf hinaus, Reflexivität, Symmetrie und Transitivität zu verlangen. Der Begriff der Äquivalenzrelation spielt nicht nur in der Wissenschaft, sondern bereits bei den elementarsten Gegebenheiten des täglichen Lebens eine Rolle: Wenn ich von einem Stuhl oder einem Apfel schlechthin spreche, meine ich nicht einen individuellen Stuhl oder Apfel, sondern ich sehe alle diese Objekte, die üblicherweise den Namen Stuhl oder Apfel tragen, als gleich an; die damit erhaltene Gleichheitsbeziehung ist in der Tat reflexiv, symmetrisch und transitiv. Eine noch schwächere Äquivalenzrelation erhalte ich, wenn ich den Begriff Obst bilde, also Äpfel, Birnen, Pflaumen usw., kurz alles, was man als Obst bezeichnet, als gleich betrachte.

Mit dem Begriff der Äquivalenzrelation ist eng der Begriff der *Äquivalenzklasse* verbunden. Ist nämlich auf einer Menge M eine Äquivalenzrelation R erklärt, so können wir zu jedem Element $a \in M$ die Untermenge M_a aller derjenigen Elemente b von M bilden, die *äquivalent* zu a sind, d. h. in der Relation R zu a stehen. (Zur Kennzeichnung einer Äquivalenzrelation verwenden wir gern auch ein Zeichen, das ähnlich aussieht, wie das gewöhnliche Gleichheitszeichen, und schreiben daher statt aRb auch etwa $a \equiv b$.) *Wir erhalten damit eine Zerlegung von M in disjunkte Untermengen* (d. h. in Untermengen, deren paarweise Durchschnitte leer sind). Das soll heißen, *die Menge M ist Vereinigungsmenge von Untermengen M_a: $M = \bigcup_a M_a$, wobei der Index a eine gewisse Indexmenge durchläuft, und zwei verschiedene solche Mengen M_a sind elementefremd.*

Zum Beweis bemerken wir, daß jedes Element von M sicher in einer der oben mit M_a bezeichneten Mengen enthalten ist; das Element $a \in M$ gehört nämlich sicher zur Untermenge M_a, da $a \equiv a$ gilt (hierbei haben wir die Reflexivität ausgenützt). Es ist also $M = \bigcup_a M_a$, wenn wir hierbei die Vereinigungsmengenbildung über alle $a \in M$ erstrecken. Wir brauchen somit nur noch zu zeigen, daß die zu zwei Elementen a, $b \in M$ gehörigen Mengen M_a und M_b entweder disjunkt sind oder überhaupt zusammenfallen; dann erhalten wir nämlich die gewünschte Zerlegung von M in der Form $M = \bigcup_a M_a$, wenn wir hierin die Vereinigungsmengenbildung nur über alle paarweise verschiedenen Mengen M_a erstrecken. Es mögen also etwa M_a und M_b ein Element $c \in M$ gemeinsam haben, d. h. $a \equiv c$ und $b \equiv c$. Wegen der Symmetrie der Äquivalenzrelation ist dann auch $c \equiv b$ und daher der Transitivität zufolge auch $a \equiv b$ und somit