SAMMLUNG GÖSCHEN BAND 1144

# Festigkeitslehre

ERSTER BAND

## Elastizität, Plastizität und Festigkeit der Baustoffe und Bauteile

Von

**Prof. Dr.-Ing. Dr. rer. techn. e. h. Willy Gehler**

und

**Dr.-Ing. habil. Wolfgang Herberg**
Privatdozent an der Technischen Hochschule Karlsruhe

Mit 118 Bildern

Durchgesehener und erweiterter Neudruck

Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.
Berlin 1952

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungrecht,
von der Verlagshandlung vorbehalten

Archiv-Nr. 11 11 44
Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

# Inhaltsverzeichnis


Seite

I. Einleitung und Grundbegriffe ..... 7

II. Zug und Druck

1. Normalspannungen . . . . . 17
2. Zugversuch und Spannungs-Dehnungs-Linie. . . . . 19
3. Druckversuch . . . . . 25
4. Einflüsse auf die Zug- und Druckfestigkeit. . . . . 25
   a) Einfluß des Kohlenstoffgehaltes . . . . . 25
   b) Einfluß der Versuchsdauer . . . . . 27
5. Das Hookesche Proportionalitätsgesetz . . . . . 27
6. Das Potenzgesetz und die Elastizitätsmaße. . . . . 28
7. Die Spannungs-Dehnungs-Linie für Baustahl im plastischen Bereich . . . . . 31
8. Querdehnung und kubische Dehnung . . . . . 34
   a) Querdehnung . . . . . 34
   b) Die Querkontraktion beim Bruch. . . . . 35
   c) Die kubische Dehnung. . . . . 35
9. Die Kerbzähigkeit und die Stoßfestigkeit. . . . . 38
   a) Kaltbiegeprobe und Kerbschlagversuch . . . . . 38
   b) Das Bruchgefüge bei Stahl. . . . . 40
   c) Die Versuche von W. Schwinning . . . . . 41
   d) Die Kerbwirkung . . . . . 42
   e) Die Trennfestigkeit . . . . . 43
   f) Die Stoßfestigkeit . . . . . 43
10. Die Wärmespannungen und das Schwinden und Kriechen von Beton 44
   A. Die Wärmespannungen . . . . . 44
   B. Das Schwinden und Kriechen von Beton. . . . . 45
11. Einfluß der Körpertemperaturen auf die Zugfestigkeit. . . . . 49
   a) Bei Stahl . . . . . 49
   b) Bei Beton . . . . . 49
12. Zug und Druck in Stäben veränderlichen Querschnittes . . . . 52
13. Druckfestigkeit von Prismen . . . . . 53
14. Druckfestigkeit bei Teilbelastung einer Fläche . . . . . 54
   A. Ebene Flächen. . . . . 54
   B. Gewölbte Flächen . . . . . 57
      a) Kugel auf Kugel . . . . . 58
      b) Kugel auf ebener Platte . . . . . 59
      c) Walze auf Walze . . . . . 59
      d) Walze auf ebener Platte . . . . . 60
15. Dauerfestigkeit . . . . . 61

III. Schub

1. Begriff der Schubspannungen . . . . . 70
2. Schubspannungen in Querschnitten . . . . . 70
3. Schubspannungen am unendlich kleinen, rechtwinkligen Parallelepiped. . . . . 71
4. Zweiachsiger Spannungszustand . . . . . 72
5. Schubspannung und Normalspannung . . . . . 72
6. Der Verzerrungszustand und das Gleitungsmaß . . . . . 73
7. Volumenelastizitätsmaß und hydrostatischer Druck . . . . . 75
8. Beziehungen zwischen $E, G$ und $E_v$ . . . . . 76

Seite

IV. Biegung
1. Spannungen bei Biegung . . . . . 79
2. Zusammenhang zwischen Biegemoment und Querkraft . . . . . 84
3. Schubspannungen bei Biegung . . . . . 86
a) Größe der Schubkraft . . . . . 87
b) Verteilung der Schubspannungen . . . . . 88
4. Beton- und Eisenbetonbalken bei Biegung . . . . . 90

V. Verdrehung
1. Der volle Kreisquerschnitt . . . . . 94
2. Anwendung . . . . . 97
3. Hohle kreisförmige Wellen . . . . . 97
4. Verdrehungsspannungen in nicht kreisförmigen Querschnitten . . 97
a) voller Ellipsenquerschnitt . . . . . 97
b) Rechteckquerschnitt . . . . . 98
5. Berechnungsergebnisse von C. Weber . . . . . 98
6. Vergleich der Querschnitte . . . . . 101
7. Die zylindrische Spiralfeder . . . . . 101
8. Verdrehung von Beton- und Eisenbetonkörpern . . . . . 104

VI. Zusammengesetzte Festigkeiten
1. Grundlagen . . . . . 105
a) Trägheits- und Zentrifugalmomente für Schwerachsen und parallele Achsen . . . . . 105
b) Trägheits- und Zentrifugalmomente für gedrehte Achsen . . . 105
c) Trägheitsellipse . . . . . 107
d) Trägheitskreis nach Mohr . . . . . 108
e) Hauptträgheitsachsen . . . . . 108
f) Trägheitsfestpunkte . . . . . 111
g) Widerstandsmomente . . . . . 112
2. Biegung und Normalkraft . . . . . 112
A. Die allgemeine Spannungsverteilung . . . . . 112
a) Die drei Grundbeziehungen . . . . . 112
b) Ermittlung der Nullinie und der Spannungsverteilung . . 112
c) Sonderfälle . . . . . 116
d) Verbindung beider Sonderfälle . . . . . 117
e) Allgemeiner analytischer Ausdruck für die Spannung . . . 118
B. Die Hauptspannungen und Hauptrichtungen . . . . . 120
Der Spannungskreis nach Mohr in Beziehung zum Prisma und die gefährlichste Lage von Schrägschnitten
a) Allgemeine Spannungsermittlung . . . . . 120
b) Hauptspannungen . . . . . 122
C. Der Spannungskreis nach Mohr in Beziehung zur Elementarkugel 124

VII. Kern
1. Begriffserklärung . . . . . 128
2. Ermittlung des Kernes verschiedener Flächen . . . . . 130
a) Rechteck . . . . . 130
b) Kreis . . . . . 131
c) Gleichschenkliges Dreieck . . . . . 131
d) Beliebiger Umriß für Hauptachsen . . . . . 132
e) Hauptachsen und Kern beim Winkeleisen . . . . . 132
3. Kern und Spannungsverteilung beim Rechteck . . . . . 136
a) Ermittlung der Randspannungen . . . . . 135
b) Kernpunktsmomente . . . . . 138

Seite

4. Die reziproken Beziehungen zwischen Nullinie und Kraftangriffspunkt . . . . . 139
   a) Die Gleichung der Nullinie . . . . . 139
   b) Nullinie und Trägheitsellipse . . . . . 140
   c) Ermittlung der Spannungsverteilung mittels Zentralellipse . . 141
   d) Kraftangriffspunkte paralleler Nullinien . . . . . 142
   e) Kraftangriffspunkte für Drehung der Nullinie um einen Pol . 143
   f) Kern, Zentralellipse und Spannungsverteilung beim Rechteckquerschnitt . . . . . 145
5. Die Lage der Nullinie bei fehlender oder versagender Zugzone . . 147
   a) Allgemein . . . . . 147
   b) Rechteckquerschnitt . . . . . 148
6. Zeichnerisches Verfahren nach O. Mohr zur Bestimmung der Nullinie bei fehlender Zugzone . . . . . 149
7. Zeichnerisches Verfahren nach Spangenberg . . . . . 151

Sachregister . . . . . 159

## Schrifttum


1. Gehler, W., Anwendung des hochwertigen Baustahles im Eisenbetonbau. Vorbericht IIc des Internationalen Brückenkongresses, Berlin 1936. Ernst u. Sohn.
2. Gehler, W., Hypothesen und Grundlagen für das Schwinden und Kriechen von Beton. „Bautechnik" 1938, H. 30.
3. Memmler, Materialprüfungswesen, Sammlung Göschen Nr. 311 bis 313.
4. Hoyer, E., Der Stahlsaitenbeton. Otto Elsner Verlagsgesellschaft, Berlin-Wien-Leipzig 1939.
5. Gehler, W., Sicherheitsgrad und Beanspruchung. Bericht über die Internationale Tagung für Brückenbau in Wien. 1929, J. Springer.
6. Gehler, W., Festigkeit, Elastizität und Schwinden von Beton und Eisenbeton. Bericht des Internationalen Materialprüfungs-Kongresses in Zürich 1932.
7. Schwinning, W., u. Matthaes, K., Die Bedeutung der Kerbschlagprobe. Deutscher Verband für die Materialprüfung der Technik, Heft 78.
8. Dischinger, F., Untersuchungen über die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken. „Der Bauingenieur" 1937.
9. Wedler, Kristen, Herrmann, Brandversuche mit belastesten Eisenbetonbauteilen und Steineisendecken. Deutscher Ausschuß für Eisenbeton, Heft 89.
10. Gehler, W., Würfelfestigkeit und Säulenfestigkeit. „Der Bauingenieur" 1928.
11. Timoshenko-Lessells, Festigkeitslehre. J. Springer, Berlin 1928.
12. Weber, C., Die Lehre von der Verdrehungsfestigkeit. Forschungsheft Nr. 249 des V. D. I., 1921.
13. Mehrtens, Statik und Festigkeitslehre. Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig 1909.
14. Mohr, O., Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik. 3. Auflage. W. Ernst u. Sohn, Berlin 1928.
15. Spangenberg, H., Graphische Ermittlung der Normalspannungen in geraden Stäben nach einem einheitlichen Verfahren für homogene Querschnitte, für Querschnitte ohne Zugfestigkeit und für Eisenbetonquerschnitte. „Der Bauingenieur" 1925, H. 10.

# I. Grundbegriffe der Festigkeitslehre

A. Die Festigkeitslehre behandelt die Elastizität, Plastizität und die Festigkeit der Baustoffe, der Bauteile und ihrer Verbindungsmittel auf Grund elastostatischer Berechnungen und versuchsmäßiger Erkenntnisse. Die Elastostatik geht von einfachen, klassischen Hypothesen der Elastizitätslehre aus, die als erste Annäherung in der Regel praktisch hinreichend zutreffen, und wendet sodann die bekannten Mittel der Statik der bestimmten und unbestimmten Grundformen an. Solche grundlegende Hypothesen sind z. B. die Annahme der gleichmäßigen Spannungsverteilung beim mittig gezogenen oder gedrückten Stab und das Elastizitätsgesetz von Hooke (1665), sowie das Ebenbleiben der Querschnitte im gebogenen Balken nach Bernoulli und Navier (1826).

Die Baustoffeigenschaften werden durch die Kennziffern berücksichtigt, die hauptsächlich infolge der Forschungstätigkeit des deutschen Versuchswesens (seit Bauschinger und Bach 1880) in ihrer Mannigfaltigkeit erkannt und bestimmt worden sind. Diese Baustoff-Kennziffern sind aber nur selten praktisch unwandelbare Festwerte (wie z. B. die beiden einzigen Grundgrößen der Elastizität für Baustahl, nämlich das Elastizitätsmaß $E$ und die Querdehnungszahl $m$).

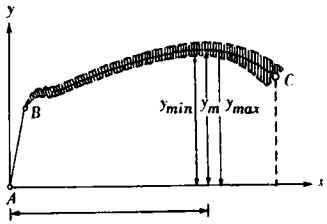

Bild 1. Streuungen von Versuchswerten.

Wären sie nur von einer Veränderlichen abhängig, so daß jedem Wert $x$ ein bestimmter Wert $y$ zugeordnet wäre, so bestünde ein eindeutiger funktioneller Zusammenhang $y = f(x)$, der nach Bild 1 durch eine einzige Linie $ABC$ dargestellt würde. Aber selbst bei dem vollkommensten von Menschenhand erzeugten Baustoff, dem Baustahl, nehmen wir

Streuungen, also Abweichungen vom Mittelwert bis etwa $\pm$ 7% infolge kleiner Unterschiede in der chemischen Zusammensetzung und beim Herstellungsverfahren in Kauf.

Daher schreiben wir mit Rücksicht auf die Sicherheit Mindestwerte der Kennziffern vor. Falls diese Kennziffern von mehreren Veränderlichen abhängen, sind diese Streuungen noch viel größer (wie z. B. bei der Würfel-Druckfestigkeit $y$ von Beton, die von etwa 4 verschiedenen Größen $x_1$ bis $x_4$ stark beeinflußt wird, siehe unter II, 13). Es handelt sich dann um einen nur korrelativen Zusammenhang zwischen $y$ und $x$. Bei genügender Zahl von Versuchen kann nach Gauß (1809) oder Galton (1888), dem Begründer der Korrelationslehre, der Grad der korrelativen Verwandtschaft statistisch genau berechnet und eine Unterteilung in primäre Einflüsse (z, B. $x_1$ und $x_2$) und sekundäre (z. B. $x_3$ und $x_4$) vorgenommen werden. Eine rechnerische Vorausbestimmung von $y$, bei der sämtliche Einflüsse $x_1$ bis $x_4$ genau bekannt sein müßten, scheidet dann praktisch aus, so daß nur die versuchsmäßige Feststellung (z. B. durch die bekannte Druckwürfel-Prüfung) übrig bleibt. Die praktischen Aufgaben des Bauwesens erfordern somit eine enge Verbindung von Festigkeitsberechnungen, grundlegenden Versuchen und Kontrollprüfungen.

Während die sogenannte mathematische Elastizitätslehre nur die rein elastischen Eigenschaften erfaßt, treten in Wirklichkeit zu den elastischen oder federnden Dehnungen $\varepsilon$ noch die bleibenden oder plastischen Dehnungen $\eta$ hinzu, so daß die gesamten Dehnungen

$$\delta = \varepsilon + \eta \tag{1}$$

sind. Bei einem rein elastischen Vorgang kann in „umkehrbarer" Weise beim Entlasten die in Formänderungsarbeit umgesetzte Energie vollkommen wieder gewonnen werden. Treten dagegen plastische Verformungen auf, so geht der zugehörige Energieanteil verloren, genau so wie die in der Regel nicht gemessenen Energieanteile, die in Magnetismus, Elektrizität oder Wärme verwandelt werden und im Weltall verflüchtigen.

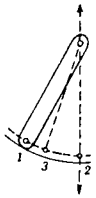


Bild 2. Gleichgewichtslagen eines Kristallites.

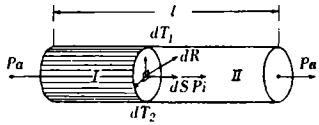


Bild 3. Kräfte im Schnitt eines gezogenen Stabes.

Durch ein Modell nach Bild 2 kann man veranschaulichen, wie ein Kristallit eines Stahlstabes aus der Gleichgewichtslage 1 durch eine äußere Kraft in die Gleichgewichtslage 2 gebracht und an seinem Fußpunkt eine innere Reibung erzeugt wird. Infolge dieses Energieverlustes geht er dann beim Entlasten nur bis zur Lage 3 zurück, so daß bleibende Verformungen entstehen.

B. Die drei Forderungen der Festigkeitslehre sind: die Körper dürfen unter der Nutzlast nicht brechen, sie dürfen ihre Form nur in zulässigen Grenzen ändern und sie sollen möglichst wirtschaftlich gestaltet sein.

Meßbar an einem belasteten Körper sind nur die Verschiebungen oder Verdrehungen, welche die Formänderungen beschreiben. Diese rufen in festen Körpern zwangsläufig innere Spannungen hervor. Zu jedem Spannungszustand gehört somit ein bestimmter Verformungszustand und umgekehrt.

Zur Bestimmung der inneren Kräfte oder Spannungen wird entweder die Kraftwirkung in dem Querschnitt eines Stabes oder die Gesamtheit der Kräfte betrachtet, die auf einen unendlichen kleinen Elementarkörper (sei es Würfel oder Kugel) wirken (Schnitt-Verfahren, Elementarkörper-Verfahren).

a) Schnitt-Verfahren. Auf einen Stab der Länge $l$ (Bild 3), der zunächst in Ruhe sei (Gleichgewichtszustand 1), mögen in der Zerreißmaschine zwei äußere Kräfte $P$ ausgeübt werden, die sich gegenseitig aufheben, also gleichgroß und entgegengesetzt gerichtet sind und in einer Geraden liegen. Diese Kräfte mögen von Null bis zu einem End-

wert wachsen. Dann erleidet der Stab eine Verlängerung $\Delta l$ und kommt wiederum zur Ruhe (Gleichgewichtszustand 2). Denkt man sich den Stab durch einen beliebigen Schnitt getrennt, so müßten dann im Schnitt innere Kräfte $P_i$ wirken, die das Gleichgewicht für Stabteil I wieder herstellen, so daß allgemein die geometrische Summe der äußeren Kräfte ($P_a$) gleich der der inneren Kräfte ($P_i$) sein muß. (Geometrisch summiert heißt: nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammengesetzt; im Gegensatz zu algebraisch summiert.)

Mit diesem gedanklichen Hilfsmittel führt man unser Problem auf eine einfache Aufgabe zurück und umgeht die Erörterung der bisher noch wenig erforschten Molekularkräfte, deren Vorhandensein aus einer Reihe von Beispielen hervorgeht (z. B. Spannungen beim Abkühlen gewalzter Träger oder geschweißter Stahlbauteile, sowie die Schwindspannungen im Beton). Man erfaßt dabei durch die Messung der Formänderung aber nur die Veränderungen zwischen den Gleichgewichtszuständen 1 und 2, ohne den Zustand 1 überhaupt zu kennen. Da diese Molekularkräfte von elementarer Gewalt sein können, sollen sie durch die Zusammensetzung des Baustoffes, durch das Erzeugungsverfahren und die Formgebung grundsätzlich möglichst klein gehalten werden.

Die schräge innere Kraft $dR$, die auf ein Flächenteilchen $dF$ des Schnittes in Bild 3 wirkt, kann nach den 3 Koordinatenachsen $x, y, z$ in drei Seitenkräfte zerlegt werden und zwar in die Normalkraft $dS$ und die beiden Schubkräfte $dT_1$ und $dT_2$. Teilt man diese Kräfte durch $dF$, so erhält man die sogenannten Spannungen (in kg/cm²), also rechtwinklig zu $dF$ die Normalspannungen (Zug positiv oder Druck negativ) $\sigma = \frac{dS}{dF}$ und die Schubspannungen, die die rechnerischen Grundgrößen der Festigkeitslehre bilden

$$\tau_1 = \frac{dT_1}{dF} \quad \text{und} \quad \tau_2 = \frac{dT_2}{dF}.$$

b) Elementarwürfel-Verfahren. Bei einem unendlich kleinen Würfel der Seitenlänge $dx$ mit dem Schwerpunkt $m$ stellen die sämtlichen an seiner Oberfläche wirkenden

$6 \cdot 3 = 18$ Spannungen $\sigma$ und $\tau$ den Spannungszustand des materiellen Punktes $m$ dar (Bild 4).

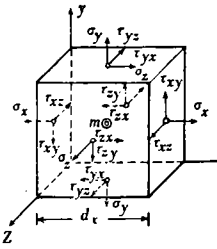

Bild 4. Die 18 Spannungen am Elementarwürfel.

Zunächst sind parallel zu den Koordinatenachsen die Normalspannungen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ vorhanden und heben sich jeweils in den einander gegenüberliegenden Flächen auf. Sodann gehören zu jedem $\sigma$ zwei Schubspannungen ($\tau_1$ und $\tau_2$), die hier durch einen Doppelzeiger bezeichnet werden. Bei $\tau_{xz}$ z. B. gibt der erste Zeiger $x$ an, zu welcher Normalspannung (hier $\sigma_x$) $\tau$ gehört und der zweite Zeiger $z$ zu welcher Koordinatenachse $\tau$ parallel läuft.

Aus diesen Betrachtungen am Elementarwürfel oder -quader werden später die allgemeinen Beziehungen zwischen Spannungen und Formänderungen abgeleitet, die zur Berechnung der Spannungen bei den verschiedenen Fällen der Festigkeit verwendet werden.

C. Die Festigkeit eines Baukörpers ist diejenige Spannungsgrenze, bei der seine Zerstörung beginnt. Sie hängt von der Körperform (Stab, Platte oder Block), vom Baustoff (z. B. Baustahl, Beton, Holz oder Mauerwerk) und von der Anordnung der äußeren Kräfte ab, die durch folgende vier einfache Festigkeitsfälle gekennzeichnet werden.

Zwischen zwei Nachbarquerschnitten, die eine Scheibe von der unendlich kleinen Dicke $dx$ begrenzen, beobachte man einen Würfel von der unendlich kleinen Kantenlänge $dx$, $dy$, $dz$ (Bild 5), im besonderen die gegenseitige Bewegung der in die Nachbarquerschnitte fallenden Würfelflächen. Denkt man sich die in der $YZ$-Ebene liegende linke Seitenfläche I des Würfels festgehalten, so können die vier einfachen Festigkeitsfälle durch folgende Bewegungen der rechten Seitenfläche II veranschaulicht werden (Bild 5a bis d).

a) Normalfestigkeit. Hierzu gehören die Zug- und die Druckfestigkeit, bei denen nur Normalspannungen $\sigma$ vorkommen. Sie entstehen, wenn sich die äußeren Kräfte zu einer

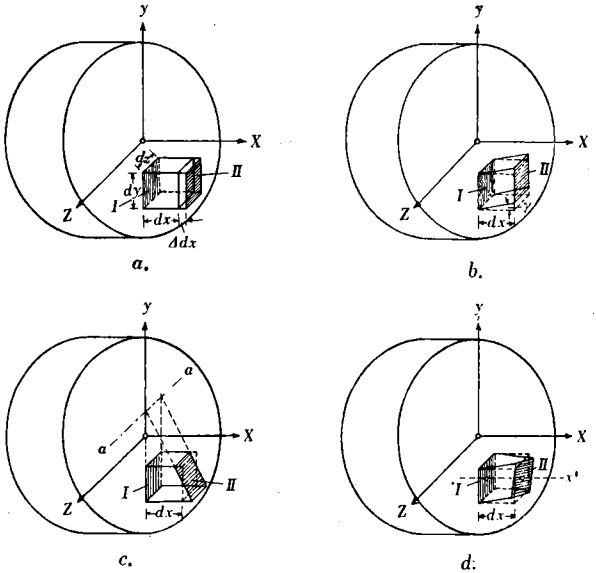


Bild 5a bis d. Die 4 einfachen Festigkeitsfälle.

Resultierenden zusammenfassen lassen, die durch den Schwerpunkt der Querschnittsfläche führt und mit der Stabachse zusammenfällt. Die ursprüngliche Kantenlänge $dx$ wird um $\Delta dx$ verlängert, wobei sich die Fläche II parallel zur $X$-Achse verschiebt (Bild 5a). Dann entstehen positive Normalspannungen oder Zugspannungen $\sigma$ (umgekehrt bei Verkürzung um $\Delta dx$ negative Normalspannungen oder Druckspannungen $\sigma$). Das Verhältnis $\Delta dx : dx = \delta$ heißt Längsdehnung, die bei Zug positiv, bei Druck negativ ist.

b) Schubfestigkeit. Bei ihr kommen nur Schubspannungen $\tau$ vor. Sie entsteht, wenn die äußere Kraft in der Querschnittsfläche liegt. Die Fläche II verschiebt sich gegen Fläche I ohne den Abstand $dx$ zu verändern, wobei die quadratische Ansichtsfläche in einen Rhombus übergeht, sich

also der rechte Winkel um den Betrag $\gamma$, die sog. „Gleitung" ändert. Die entstehenden Schubspannungen $\tau$ liegen in den entsprechenden Würfelflächen (Bild 5b).

c) Biegefestigkeit. Dreht man die Fläche II um eine Achse $a$—$a$, die in der Querschnittsfläche I liegt, so wird im oberen Teil des Würfels der Abstand $dx$ beider Flächen verkürzt und im unteren Teil vergrößert. Dann entstehen Biegespannungen, die schräg zur Querschnittsebene gerichtet sind und in Normalspannungen $\sigma$ und Schubspannungen $\tau$ zerlegt werden können.

d) Verdrehungsspannungen. Wird Fläche II um eine Achse $X'$ in der $X$-Richtung gedreht, ohne daß sich ihr Abstand $dx$ von I ändert, so entstehen im Querschnitt Schubspannungen $\tau$, die man Verdrehungsspannungen nennt.

e) Knickfestigkeit. Sie ist wie das Kippen und Beulen ein Stabilitätsproblem. Deshalb sollte man in diesen Fällen streng genommen nur von Sicherheit gegen Knicken, Kippen und Beulen sprechen, nicht aber wie es üblich ist z. B. auch von Knickfestigkeit oder Knickspannungen, die hier keine physikalische, sondern nur rechnerische Bedeutung haben (s. Band II).

Tritt einer dieser Festigkeitsfälle mit einem anderen oder mehreren zusammen auf, so spricht man von zusammengesetzter Festigkeit. Der wichtigste dieser Fälle ist die Vereinigung von Normalfestigkeit und Biegefestigkeit. Nach dem Erfahrungsgesetz und der gegenseitigen Unabhängigkeit verschiedener Kraftwirkungen darf man einen zusammengesetzten Belastungsfall in einfache Fälle zerlegen und die für jeden von diesen berechneten gleichartigen Spannungen eines Punktes addieren (Superpositionsprinzip). Dies gilt aber nur im sog. elastischen Bereich, wenn also $\eta = 0$ ist (s. Gl. 1).

Ein Bauteil kann aber außer nach diesen vier Festigkeitsarten auch dadurch zerstört werden, daß seine Stabilität versagt und zwar im einfachsten Falle durch Umkippen (z. B. durch Winddruck), oder durch Knicken eines gedrückten Einzelstabes (wie bei vielen Unfällen im Stahlbau), oder durch Beulen einer stark beanspruchten Blechwand (wie bei hohen,

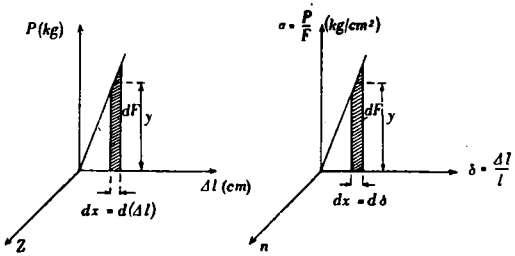


Bild 6a und b. Kraft-Weg-Linie und Spannungs-Dehnungs-Linie.

nicht ausreichend versteiften Blechträgern), oder endlich durch Auskippen dünner, auf Biegung beasnpruchter Träger (wie bei dem Modell einer eingespannten, auf die hohe Kante gebogenen Reißschiene).

D. Die Darstellungsweise von Versuchsergebnissen. Die drei Grundgrößen der Mechanik: Weg, Kraft und Zeit werden zweckmäßig in drei Koordinatenrichtungen aufgetragen und zwar als bezogene Größen, also waagerecht $x$ als Dehnung $\Delta l : l = \delta$ (in H. T.), lotrecht $y$ als Spannung $\sigma = P : F$ (in kg/cm²) und waagerecht $z$ als absolutes Zeitmaß $Z$ (in sec), oder auch gemessen durch die Anzahl $n$ von gleichartigen Schwingungen.

Würde man beim Zugversuch die Kraft-Verlängerungslinie (in absoluten Maßen, also die Kraft $P$ in kg und den Weg $\Delta l$ in cm) nach Bild 6a auftragen, so erkennt man, daß ein Flächenteilchen $dF = y \cdot dx$ die Dimension Kraft · Weg = Arbeit hat und somit eine Energiegröße angibt.

Bei der gebräuchlichen Darstellung der bezogenen Werte $\sigma = P : F$ und $\delta = \Delta l : l$ der Spannungs-Dehnungs-Linie (Bild 6b) ist $dF = y \cdot dx$ ebenfalls eine Arbeits- oder Energiegröße, weil $\sigma$ in kg/cm² und $\delta$ in H. T. gemessen wird, also $dF = \sigma \cdot d\delta = \text{kg/cm}^2 \cdot \frac{\text{cm}}{\text{cm}} = \frac{\text{kg. cm}}{\text{cm}^3}$ die „Ladung eines cm³ mit potentieller Energie" darstellt.

Durch folgende besondere Darstellungsverfahren lassen sich oft die verwickelten Zusammenhänge aus den beobachteten Versuchsergebnissen leichter erkennen.

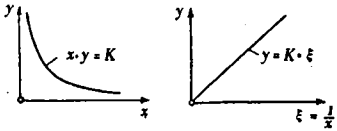


Bild 7a und b. Verwandlung einer Hyperbel in eine Gerade durch Auftragen der reziproken Werte von $x$.

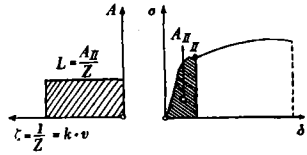


Bild 8a und b. Entwicklung des Leistungs-Diagrammes aus der Spannungs-Dehnungs-Linie.

a) Auftragen der reziproken Werte. Ergibt sich aus den Versuchswerten die bekannte gleichseitige Hyperbel $x \cdot y = K$ (Bild 7a), so erhält man durch Auftragen des Wertes $\xi = \frac{1}{x}$ mit der Gleichung $y = \frac{K}{x} = K \cdot \xi$ eine durch 0 gehende Gerade. (Beispiel: $x = \mu = \frac{F_e}{F_b}$ = sog. Bewehrungsverhältnis von Eisenbetonbalken und $y = \sigma_{eR}$ = Eisenspannung beim Auftreten der ersten Risse im Beton)[1]).

Trägt man in Bild 8 an Stelle der Zeit $Z$ in sec die Werte $\zeta = \frac{1}{Z} = k \cdot v$ und als Ordinaten im Seitenriß jeweils den Flächeninhalt $A$ des Flächenstückes (z. B. $A_{II}$) zwischen der Spannungs-Dehnungs-Linie und der $\delta$-Achse auf, so stellt das Rechteck $L = A_{II} \cdot \frac{1}{Z}$ die Leistung dar. Dabei ist $\zeta = \frac{1}{Z} = k \cdot v$, wenn $v$ die Geschwindigkeit und $k$ einen Festwert bedeuten.

b) Auftragen der logarithmischen Werte. Durch den Rechenschieber ist allgemein bekannt, daß man durch Auftragen der Logarithmen anstatt der Zahlenwerte die Intervalle z. B. zwischen 1 und 2 künstlich stark dehnt, dagegen die zwischen großen Zahlen, z. B. 9 und 10, stark verkürzt. Hierdurch ergibt sich ein willkommenes Mittel, große Zahlenwerte sehr zusammenzudrängen und insbesondere „die Zeit zu raffen". Beispiel: Wird die Würfelfestigkeit $W_b$ einer bestimmten Betonsorte nach 7, 28, 45 . . . 365 Tagen festgestellt und

[1]) s. W. Gehler, Schrifttum Nr. (1), S. 265.

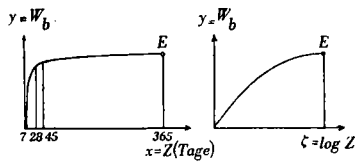


Bild 9a und b. Verwandlung der Würfelfestigkeit-Zeit-Linie in eine Parabel durch Auftragen der logarithmischen Werte der Zeit.

aufgetragen, so erhält man die $W_b$-Zeit-Linie des Bildes 9a. Trägt man dagegen $\zeta = \log Z$ auf, so ergibt sich eine Parabel, deren Scheitel $E$ im Endwert liegt, die also zu diesem „konvergierend abklingt"[2]). (In anderen Fällen wächst die Parabel ins Unendliche, wie z. B. bei der Verstimmung stark gespannter Klaviersaiten.)

Anstatt nur eine Achse logarithmisch zu verzerren, kann man auch nach beiden Achsen die logarithmischen Werte auftragen, zweckmäßig unter Verwendung von logarithmischem Papier (wie z. B. zur Ermittlung des Elastizitätsmaßes beim Potenzgesetz, s. Gl. 12, oder wie bei der Auswertung von Dauerfestigkeits-Versuchen nach der sog. Wöhler-Linie).

c) Die sogen. Nenner-Transformation. Findet man beim Auftragen der Versuchswerte z. B. eine Hyperbel dritten Grades von der Form $y = \frac{A}{1+Bx+Cx^2} = \frac{A}{\omega}$, also eine doppelt gekrümmte Linie mit einem Wendepunkt $W$ (Bild 10a), so kann man hieraus eine einfache Parabel (Bild 10b) mit dem Scheitel in $D$ erhalten, wenn man als Ordinaten $\omega = \frac{A}{y}$ und als Abszissen wiederum $x$ aufträgt, weil dann

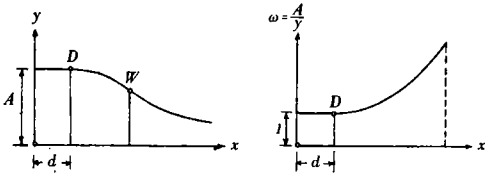


Bild 10a und b. Verwandlung einer Hyperbel in eine Parabel durch Nennertransformation.

[2]) s. W. Gehler, Schrifttum Nr. 2, S. 393, Abb. 13.

$$\omega = 1 + B \cdot x + C \cdot x^2$$

eine Parabel darstellt. Anwendung bei der sogen. Knickspannungs-Linie (der $\sigma_k$-$\lambda$-Linie) nach den neuen Knickvorschriften Din 4114[3]). Lautet im besonderen Falle diese Parabel $\omega = C \cdot x^2$, so ist $y = \frac{A}{\omega} = \frac{A}{C \cdot x^2} = \frac{K}{x^2}$ (wie z. B. bei der bekannten Euler-Hyperbel $y \cdot x^2 = K$ der Knickspannungslinie). Würde dagegen $\omega = B \cdot x$ sein, also

$$y = \frac{A}{\omega} = \frac{A}{B \cdot x} = \frac{K}{x},$$

so würde sich wiederum Bild 7a und 7b ergeben (mit $\omega$ an Stelle von $y$ und $x$ an Stelle von $\xi$). Die reziproke Auftragung (s. unter a) ist somit ein Sonderfall dieser Nenner-Transformation.

Da die versuchsmäßig festzustellenden Gesetzmäßigkeiten um so leichter praktisch nutzbar gemacht werden können, je einfacher diese mathematischen Beziehungen sind, gilt es zunächst die primär bedeutsamen Veränderlichen zu erkennen (gegebenenfalls auf Grund der Großzahlforschung mit Hilfe der Korrelations-Theorie, s. unter I, A) und sodann unter Benutzung einer der hier erörterten Darstellungsweisen die Gleichungen möglichst zu vereinfachen.

## II. Zug und Druck

### 1. Normalspannungen

Wird ein genau prismatischer Stab aus homogenem Baustoff durch eine in Richtung der Verbindungslinie der Schwerpunkte seiner Querschnittsflächen $F$ wirkende Kraft beansprucht, so sind in einem beliebigen Querschnitt $a$—$a$ die Spannungen gleichmäßig verteilt anzunehmen und haben die Größe

$$\sigma = \frac{P}{F}. \tag{2}$$

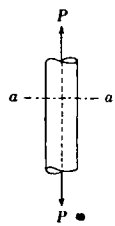

Bild 11. Prismatischer Zugstab.

[3]) DIN E 4114 Knick- und Beulvorschriften für Baustahl. S. a. „Erläuterungen" dazu von Prof. Dr. Chwalla und Prof. Dr. Gehler (s. Stahlbau 1940).

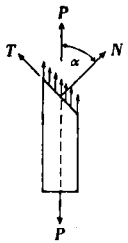


Bild 12. Spannungen im Schrägschnitt eines Zugstabes.

Sie heißen Normalspannungen. Da in der Festigkeitslehre die Einheit der Kraft 1 kg und die Einheit der Fläche 1 cm² ist, werden die Spannungen in kg/cm² ausgedrückt. Die gleichmäßige Verteilung der Spannungen über einen Querschnitt ist eine Annahme, die nie vollkommen zutrifft. Man kommt ihr am nächsten, wenn man erreicht, daß alle zur Stabachse parallelen Fasern gleiche Längenänderungen erleiden, d. h. daß alle Stabquerschnitte auch nach der Verformung eben und rechtwinklig zur Stabachse bleiben. Nicht genau prismatische (oder auch gekerbte zylindrische) Stäbe können nie solche gleichmäßig verteilte Spannungen aufweisen, weil ihre Längsfasern von ungleicher Länge sind und demgemäß ungleiche Längenänderungen erleiden.

Führt man durch den homogenen prismatischen Stab einen ebenen Schrägschnitt $c$—$d$ im Winkel $\alpha$ gegen die Stabachse (Bild 12), so hat seine Fläche die Größe $F_1 = \frac{F}{\cos\alpha}$ und die Spannungen in der Stabachsenrichtung betragen

$$\sigma_1 = \frac{P}{F_1} = \sigma \cdot \cos\alpha. \tag{3}$$

Werden diese Spannungen in zwei rechtwinklige Komponenten der Richtung $N$ und $T$ zerlegt, so ergeben sich die Normalspannungen $\sigma_N$ und die Tangentialspannungen $\sigma_T$ des Querschnittes zu

$$\sigma_N = \sigma \cdot \cos^2\alpha\,, \tag{4a}$$

$$\sigma_T = \sigma \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{\sigma \cdot \sin 2\alpha}{2}. \tag{4b}$$

Eine gleiche Längenänderung der Stabfasern geht auch dann verloren, wenn die Querdehnungen (s. Abschn. II, 8) an irgendeiner Stelle eine merkliche Größe erreichen.

Zum Verhalten eines Stabes unter Druckkräften ist noch zu erwähnen, daß seine Schlankheit, d. i. das Verhältnis