SAMMLUNG GÖSCHEN BAND 1109

ELEMENTE DER FUNKTIONENTHEORIE

von

DR. KONRAD KNOPP †
ehem. Professor der Mathematik an der Universität Tübingen

Mit 23 Figuren

Sechste Auflage

WALTER DE GRUYTER & CO.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag,
Verlagsbuchhandlung Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.
BERLIN 1963

©

Copyright 1963 by Walter de Gruyter & Co., vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp., Berlin 30. — Alle Rechte, einschl. der Herstellung von Photokopien und Mikrofilmen, von der Verlagshandlung vorbehalten. — Archiv-Nr. 7713630. — Druck: Lindemann & Lüdecke, Berlin 36. — Printed in Germany.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Die komplexen Zahlen und ihre geometrische Darstellung.

Seite

1. Kapitel. Grundlagen.

§ 1. Einleitung ... 6
§ 2. Das System der reellen Zahlen ... 8
§ 3. Punkte und Vektoren der Ebene ... 13

2. Kapitel. Das System der komplexen Zahlen und die Gaußsche Zahlenebene.

§ 4. Geschichtliches ... 19
§ 5. Einführung der komplexen Zahlen. Bezeichnungen ... 21
§ 6. Gleichheit und Ungleichheit ... 26
§ 7. Addition und Subtraktion ... 26
§ 8. Multiplikation und Division ... 28
§ 9. Abgeleitete Regeln. Potenzen ... 31
§ 10. Das System der komplexen Zahlen als Erweiterung des Systems der reellen Zahlen ... 32
§ 11. Trigonometrische Darstellung der komplexen Zahlen ... 34
§ 12. Geometrische Darstellung von Multiplikation und Division 37
§ 13. Ungleichungen und Beträge. Beispiele ... 39

3. Kapitel. Die Riemannsche Zahlenkugel.

§ 14. Die stereographische Projektion ... 41
§ 15. Die Riemannsche Zahlenkugel. Der Punkt ∞. Beispiele 45

Zweiter Abschnitt.

Lineare Funktionen und Kreisverwandtschaft.

4. Kapitel. Abbildung durch lineare Funktionen.

§ 16. Abbildung durch ganze lineare Funktionen ... 48
§ 17. Abbildung durch die Funktion $w = \frac{1}{z}$ ... 51
§ 18. Abbildung durch beliebige lineare Funktionen ... 57

5. Kapitel. Normalformen und besondere lineare Abbildungen.

§ 19. Die Gruppeneigenschaft der linearen Abbildungen ... 59
§ 20. Fixpunkte und Normalformen ... 61
§ 21. Besondere lineare Abbildungen. Doppelverhältnisse ... 65
§ 22. Weitere Beispiele ... 68

Dritter Abschnitt.

Mengen und Folgen. Potenzreihen.

6. Kapitel. Punkt- und Zahlenmengen. Seite

§ 23. Punktmengen ... 71
§ 24. Reelle Zahlenmengen ... 73
§ 25. Der Bolzano-Weierstraßsche Satz ... 76

7. Kapitel. Zahlenfolgen. Unendliche Reihen.

§ 26. Zahlenfolgen mit komplexen Gliedern ... 77
§ 27. Zahlenfolgen mit reellen Gliedern ... 81
§ 28. Unendliche Reihen ... 83

Kapitel. Potenzreihen.

§ 29. Der Konvergenzkreis ... 89
§ 30. Das Rechnen mit Potenzreihen ... 92

Vierter Abschnitt.

Analytische Funktionen und konforme Abbildung.

9. Kapitel. Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

§ 31. Begriff der Funktion einer komplexen Veränderlichen ... 95
§ 32. Grenzwerte von Funktionen ... 96
§ 33. Stetigkeit ... 99
§ 34. Differenzierbarkeit ... 100
§ 35. Eigenschaften der durch Potenzreihen dargestellten Funktionen ... 102

10. Kapitel. Analytische Funktionen und konforme Abbildung.

§ 36. Analytische Funktionen ... 106
§ 37 Konforme Abbildung ... 108

Fünfter Abschnitt.

Die elementaren Funktionen.

11. Kapitel. Potenz und Wurzel. Die rationalen Funktionen.

§ 38. Potenz und Wurzel ... 111
§ 39. Die ganzen rationalen Funktionen ... 115
§ 40. Die gebrochenen rationalen Funktionen ... 116

12. Kapitel. Die Exponentialfunktion, die trigonometrischen und die hyperbolischen Funktionen.

§ 41. Die Exponentialfunktion ... 118
§ 42. Die Funktionen $\cos z$ und $\sin z$ ... 124
§ 43. Die Funktionen $\operatorname{tg} z$ und $\operatorname{ctg} z$ ... 128
§ 44. Die hyperbolischen Funktionen ... 131

Seite

13. Kapitel. Der Logarithmus, die zyklometrischen Funktionen und die Binomialreihe.

§ 45. **Der Logarithmus** 132
§ 46. **Die zyklometrischen Funktionen** 136
§ 47. **Die Binomialreihe und die allgemeine Potenz** 139

Register 142

Literatur.

Behnke, H., und F. Sommer: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. 2. Aufl. Berlin, Heidelberg u. Göttingen 1962.

Bieberbach, L.: Einführung in die Funktionentheorie. 3. Aufl. Stuttgart 1959.

Burkhardt, H.: Funktionentheoretische Vorlesungen. Neu hrsg. von G. Faber. Bd. I, 1: Algebraische Analysis; Bd. I, 2: Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Berlin u. Leipzig 1920/21.

Carathéodory, C.: Funktionentheorie. Bd. I, Basel 1950.

Dinghas, A.: Vorlesungen über Funktionentheorie. Berlin, Heidelberg u. Göttingen 1961.

Heffter, L.: Begründung der Funktionentheorie auf alten und neuen Wegen. 2. Aufl., Berlin, Heidelberg u. Göttingen 1960.

Hornich, H.: Lehrbuch der Funktionentheorie. Wien 1950.

Hurwitz, A., und R. Courant: Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. 3. Aufl., Berlin, Heidelberg u. Göttingen 1929.

Kneser, H.: Funktionentheorie. Göttingen 1958.

Knopp, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. 4. Aufl., Berlin, Heidelberg u. Göttingen 1947.

Mangoldt, H. v., und K. Knopp: Einführung in die höhere Mathematik. Bd. I, 12. Aufl., Stuttgart 1962; Bd. II, 11. Aufl., Stuttgart 1962.

Nielsen, N.: Elemente der Funktionentheorie. Leipzig 1911.

Pringsheim, A., und G. Faber: Algebraische Analysis. Enzyklopädie d. math. Wissenschaften. Bd. II, C, 1. Leipzig 1909.

Erster Abschnitt.

Die komplexen Zahlen und ihre geometrische Darstellung.

1. Kapitel. Grundlagen.

§ 1. Einleitung.

Unter dem Namen „Funktionentheorie" faßt man all die Untersuchungen zusammen, die sich ergeben, wenn man die Fragestellungen und Methoden der reellen Analysis (d. h. der gewöhnlichen Differential- und Integralrechnung und der mit diesen zusammenhängenden Gebiete) auf den Fall zu übertragen versucht, daß man für alle auftretenden Zahlengrößen (Konstante, unabhängige und abhängige Veränderliche) komplexe Zahlen zuläßt, also Zahlen von der Form $a + b\sqrt{-1}$. Solche Untersuchungen drängten sich schon früh bei verschiedenen Problemen der reellen Analysis ganz von selbst auf und sind zugleich mit der Überwindung dieser im Laufe der Jahrhunderte erst zaghaft, bald mit immer schönerem Erfolge durchgeführt worden (Näheres s. § 4). Heute bildet die Funktionentheorie eines der ausgedehntesten und wichtigsten Gebiete der höheren Mathematik.

In diesen „Elementen der Funktionentheorie" soll nur das Einfachste, aber für den weiteren Ausbau der Theorie Wichtigste[1]) behandelt werden. Dazu gehört zunächst eine Einführung in das System der komplexen Zahlen und das Rechnen mit diesen. Dazu gehört ferner die Übertragung

[1]) Dieser Ausbau findet sich dargestellt in den beiden Bändchen des Verfassers: Funktionentheorie, Erster Teil: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen, 10. Auflage 1961. Sammlung Göschen Nr. 668, und Funktionentheorie, Zweiter Teil: Anwendung und Weiterführung der allgemeinen Theorie, 10. Auflage 1962, Sammlung Göschen Nr. 703. Diese Bändchen werden im folgenden kurz als „Fktth. I" und „Fktth. II" zitiert.

des Begriffes der Zahlenmengen, des Grenzbegriffes und der eng damit zusammenhängenden Dinge, insbesondere der Lehre von den unendlichen Reihen, auf den Fall komplexer Größen oder, wie man kurz sagt, „ins Komplexe". Weiter gehört dazu die Übertragung des Begriffes der Funktion und ihrer wichtigsten Eigenschaften auf den Fall, daß unabhängige und abhängige Veränderliche komplex sind. In Verbindung mit dem Grenzbegriff liefert dies die Grundlagen einer Differentialrechnung der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Schließlich gehört dazu ein genaueres Studium der sogenannten elementaren Funktionen, also der rationalen, insbesondere der linearen Funktionen, der Exponentialfunktion, der trigonometrischen und einiger anderer Funktionen sowie von deren Umkehrungen, also des Logarithmus und der zyklometrischen Funktionen. Die Übertragung der Integralrechnung ins Komplexe dagegen rechnet man nicht zu den Elementen der Funktionentheorie.

Wie wir sehen werden (s. 2. u. 3. Kap.), läßt sich das Rechnen mit den komplexen Zahlen und lassen sich weiterhin alle eben angedeuteten Untersuchungen noch eindrucksvoller als im „Reellen" in einer Zahlenebene oder auf einer Zahlenkugel veranschaulichen. Dies bildet dann den Inhalt des Teiles unserer Theorie, den man als „geometrische Funktionentheorie" bezeichnet.

Aus dem Gesagten geht hervor, daß zum Verständnis dieses Büchleins eine Kenntnis der Grundlagen der reellen Analysis und der Elemente der analytischen Geometrie insofern unentbehrlich ist, als nach dem Vorbild der reellen Analysis die Übertragung ins Komplexe durchgeführt wird und zur Veranschaulichung einfache geometrische Dinge benutzt werden. Um hierfür einen festen Ausgangspunkt zu haben, soll im folgenden § 2 das Wichtigste über das System der reellen Zahlen, das das Fundament für den Aufbau der reellen Analysis bildet, und soll in § 3 das

Grundsätzliche über den Aufbau der analytischen Geometrie gesagt werden.

§ 2. Das System der reellen Zahlen.

Das System der reellen Zahlen setzen wir, was seinen praktischen Gebrauch anlangt, natürlich als bekannt voraus. Wegen ihrer grundsätzlichen Bedeutung sollen aber die wesentlichen Gedanken, die zu seinem Aufbau führen, hier kurz dargelegt werden.

Den Ausgangspunkt aller Betrachtungen über Zahlen bildet die Folge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... und die beiden „Verknüpfungen" derselben, die als Addition und Multiplikation bezeichnet werden. Das Bedürfnis, diese beiden „umzukehren", zwingt alsbald zur Einführung der 0 (Null) und der negativen Zahlen und schließlich zu der der gebrochenen Zahlen. Die Gesamtheit der ganzen und gebrochenen, positiven oder negativen Zahlen und der Null nennt man das System der (reellen) rationalen Zahlen.

Mit diesen Zahlen, die jetzt kurz durch einen lateinischen Buchstaben bezeichnet werden sollen, kann man nach bestimmten Regeln rechnen, die man als die **Grundgesetze der Arithmetik** bezeichnet. Es sind die folgenden, bei denen unter „Zahlen" zunächst nur die eben genannten rationalen Zahlen zu verstehen sind:

I. Grundgesetze der Gleichheit und Anordnung.

1. *Die Zahlen bilden eine* **geordnete** *Menge, d. h. zwischen irgend zweien von ihnen, etwa a und b, besteht stets eine und nur eine der drei Beziehungen*

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b \ ^{1}).$$

[1]) Gelesen: a kleiner als b, a gleich b, a größer als b; $a > b$ ist nur eine andere Schreibweise für $b < a$. — Die Negationen dieser drei Beziehungen schreibt man so:
$a \geqq b$ (a größer oder gleich b, a mindestens gleich b, a nicht kleiner als b).
$a \neq b$ (a ungleich b).
$a \leqq b$ (a kleiner oder gleich b, a höchstens gleich b, a nicht größer als b).

Diese Anordnung gehorcht weiter den Gesetzen:

2. *Es ist stets* $a = a$.

3. *Aus* $a = b$ *folgt* $b = a$.

4. *Aus* $a = b$ *und* $b = c$ *folgt* $a = c$.

5. *Aus* $a \leqq b$ *und* $b < c$ *oder aus* $a < b$ *und* $b \leqq c$ *folgt* $a < c$.

Alle Zahlen > 0 nennt man positiv, alle Zahlen < 0 negativ. Wenn eine Zahl $= 0$ ist, sagt man auch, sie „verschwindet".

II. Grundgesetze der Addition.

1. *Je zwei Zahlen* a *und* b *kann man addieren; das Zeichen* $(a + b)$ *oder* $a + b$ *bedeutet stets wieder eine bestimmte Zahl, die* **Summe** *von* a *und* b. — Diese Summenbildung gehorcht weiter den Gesetzen;

2. *Aus* $a = a'$ *und* $b = b'$ *folgt* $a + b = a' + b'$. („Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches.")

3. *Es ist stets* $a + b = b + a$. (Kommutationsgesetz.)

4. *Es ist stets* $(a + b) + c = a + (b + c)$. (Assoziationsgesetz.)

5. *Aus* $a < b$ *folgt stets* $a + c < b + c$. (Monotoniegesetz.)

III. Grundgesetz der Subtraktion. *Die Addition ist immer umkehrbar, d. h. zu zwei Zahlen* a *und* b *gibt es stets eine dritte Zahl* x, *so daß* $a + x = b$ *ist*[1]).

Man nennt die so bestimmte Zahl x die **Differenz** von b und a und bezeichnet sie mit $(b - a)$.

IV. Grundgesetze der Multiplikation.

1. *Je zwei Zahlen* a *und* b *kann man miteinander multiplizieren, das Zeichen* $a \cdot b$ *oder* ab *bedeutet stets wieder eine bestimmte Zahl, das* **Produkt** *von* a *und* b. — Diese Produktbildung gehorcht weiter den Gesetzen:

[1]) Daß diese Zahl x durch a und b eindeutig bestimmt ist, braucht nicht gefordert zu werden; es folgt leicht aus den übrigen Grundgesetzen, insbesondere II, 5.

2. *Aus* $a = a'$ *und* $b = b'$ *folgt* $ab = a'b'$. („Gleiches mit Gleichem multipliziert gibt Gleiches.")

3. *Es ist stets* $ab = ba$. (Kommutationsgesetz.)

4. *Es ist stets* $(ab)c = a(bc)$. (Assoziationsgesetz.)

5. *Es ist stets* $(a + b)c = ac + bc$. (Distributionsgesetz.)

6. *Aus* $a < b$ ***und*** $\mathbf{c > 0}$ *folgt stets* $ac < bc$. (Monotoniegesetz.)

Aus den bisher aufgezählten Grundgesetzen folgen in einfachster Weise, aber eben als beweisbare Tatsachen, die vier „Vorzeichenregeln" und als Ergänzung zu ihnen die Tatsache:

Für jede Zahl a *gilt* $a \cdot 0 = 0$.

Da die vier Vorzeichenregeln insbesondere besagen:

Aus $a \neq 0$ *und* $b \neq 0$ *folgt* $ab \neq 0$,

so folgt hieraus und aus der vorangehenden Tatsache noch der wichtige

Satz. *Ein Produkt zweier Zahlen ist dann und nur dann gleich* 0, *wenn wenigstens einer der beiden Faktoren gleich* 0 *ist.*

V. Grundgesetz der Division. *Die Multiplikation ist, von einer Ausnahme abgesehen, umkehrbar, d. h. zu zwei Zahlen* a *und* b, ***deren erste*** $\mathbf{\neq 0}$ ***ist,*** *gibt es stets eine dritte Zahl* x, *so daß* $ax = b$ *ist*[1]).

Man nennt die so bestimmte Zahl x den **Quotienten** von b und a und bezeichnet ihn mit $\frac{b}{a}$.

Alle diese Gesetze lassen sich, ausgehend von den einfachsten Tatsachen über natürliche Zahlen, sehr leicht beweisen. Der Sinn unserer Zusammenstellung ist nun aber der, daß man, nachdem man die Gültigkeit dieser Grundgesetze einmal gesichert hat, bei allem weiteren Arbeiten mit den Buchstabengrößen $a, b, \ldots$ auf die Bedeutung dieser Zeichen als rationale Zahlen nicht erneut zurückzugehen braucht: Allein aus der Gültigkeit der Grundgesetze lassen

[1]) Wie bei der Subtraktion ist auch hier wieder x durch a und b eindeutig bestimmt.

sich rein formal[1]) alle weiteren Rechenregeln in völliger Strenge beweisen. Solche Regeln waren schon die zu IV genannten Tatsachen und Sätze. Dazu gehören aber weiter alle sogenannten Klammerregeln, das Rechnen mit Gleichungen und Ungleichungen, kurz alle Regeln der sogenannten Buchstabenrechnung, auf die wir hier natürlich nicht weiter eingehen.

Aus diesem wichtigen Umstand, daß man dabei auf die Bedeutung der Buchstabengrößen gar nicht einzugehen braucht, ergibt sich sofort die außerordentlich bedeutsame Folgerung: Wenn man irgendwelche anderen Dinge als gerade die rationalen Zahlen hat — wir werden sogleich solche anderen Dinge nennen —, die aber denselben Grundgesetzen gehorchen, so kann man mit ihnen nach genau denselben Regeln rechnen wie mit den rationalen Zahlen. Jedes System von Dingen, für die das gilt, nennt man darum ein Zahlensystem, weil man, kurz gesagt, alle diejenigen Dinge Zahlen nennt, mit denen man im wesentlichen nach den zusammengestellten Grundgesetzen operieren kann.

Solche anderen Dinge, die auch allen unseren Grundgesetzen gehorchen, sind insbesondere die reellen Zahlen. Wir erinnern kurz daran, wie man zu ihnen gelangt: Das System der rationalen Zahlen ist insofern lückenhaft, als es sehr einfachen Forderungen nicht zu genügen vermag. So gibt es bekanntlich keine rationale Zahl, deren Quadrat $= 2$ ist. Die Tatsache aber, daß es rationale Zahlen gibt, deren Quadrat so nahe bei 2 (oberhalb oder unterhalb) liegt wie man will, zusammen mit der bekannten Veranschaulichung der Dinge auf der Zahlengeraden (Näheres s. § 3) führt dazu, alle rationalen Zahlen in zwei Klassen einzuteilen, eine Klasse $\mathfrak{A}$, die außer der Null und den negativen rationalen Zahlen alle die positiven enthält, deren Quadrat < 2 ist, und eine

[1]) D. h. eben, ohne daß auf die Bedeutung der Zeichen eingegangen zu werden braucht.

Klasse $\mathfrak{A}'$, die alle positiven rationalen Zahlen enthält, deren Quadrat > 2 ist. Man sagt nun, durch diese Klasseneinteilung oder diesen **Dedekindschen Schnitt** $(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}')$ im Bereich der rationalen Zahlen werde die „irrationale" Zahl erfaßt, deren Quadrat gleich 2 ist, und setzt geradezu $(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}') = \sqrt{2}$.

Daß aber eine solche Klasseneinteilung eine Zahl definiert oder gar eine Zahl ist, kann nicht anders bewiesen werden als folgendermaßen: Man betrachtet die Gesamtheit aller nur denkbaren Klasseneinteilungen der rationalen Zahlen in zwei (nicht leere) Klassen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, die wie eben der Forderung genügen, daß jede Zahl der Klasse $\mathfrak{A}$ kleiner ist als jede Zahl der Klasse $\mathfrak{A}'$, und zeigt, daß diese Dedekindschen Schnitte $(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}')$ solche „anderen Dinge" sind, die bei geeigneten Festsetzungen über die Bedeutung der Zeichen $=$, $<$, $+$ und $\cdot$ wieder unseren sämtlichen Grundgesetzen genügen. Wie hierzu diese Festsetzungen zu treffen sind und wie der genannte Nachweis erbracht werden kann, soll hier natürlich nicht ausgeführt, sondern als bekannt angesehen werden[1]); der Weg dazu drängt sich bei Veranschaulichung der Dinge auf der Zahlengeraden ganz von selbst auf. Bezeichnet man aber jetzt diese Klasseneinteilungen kurz mit einem kleinen lateinischen Buchstaben, setzt etwa $(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}') = a$ usw., und nennt sie Zahlen, so gelten unter diesen Vereinbarungen ausnahmslos unsere sämtlichen Grundgesetze. Die so gewonnenen Dinge **sind** also Zahlen; sie bilden in ihrer Gesamtheit das **System der reellen Zahlen.** Bei der Deutung auf der Zahlengeraden (s. § 3) zeigt sich überdies, daß ein Teil der reellen Zahlen mit den bisherigen rationalen Zahlen zusammenfällt, ein anderer nicht. In diesem Sinne bildet das System der reellen Zahlen eine Erweiterung des Systems der rationalen Zahlen. Die nicht rationalen unter den reellen Zahlen nennt man **irrational.**

[1]) Vgl. die S. 5 genannten Werke des Verfassers.

Mit der Bildung des Systems der reellen Zahlen ist nun ein gewisser Abschluß erreicht. Denn es läßt sich zeigen, daß es weder ein anderes (von dem erhaltenen System der reellen Zahlen in irgendeinem wesentlichen Sinne verschiedenes) noch auch ein umfassenderes System von irgendwelchen Dingen gibt, das — wie man auch die Bedeutung der Zeichen $=$, $<$, $+$ und $\cdot$ festsetzen mag — **allen** unseren Grundgesetzen genügt. Die hiermit angedeuteten Sätze bezeichnet man als den **Einzigkeits-** bzw. **Vollständigkeitssatz** für das System der reellen Zahlen.

Eine abermalige Klasseneinteilung im System der reellen Zahlen führt nicht zu neuen Dingen, sondern immer wieder zu einer (schon vorhandenen) reellen Zahl. Macht man also im Bereich der reellen Zahlen einen Dedekindschen Schnitt, d. h. teilt man alle reellen Zahlen derart in zwei (nicht leere) Klassen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, daß jede Zahl a aus $\mathfrak{A}$ kleiner ist als jede Zahl a' aus $\mathfrak{A}'$, so gilt der folgende oft als Dedekindscher Hauptsatz bezeichnete **Stetigkeitssatz** für die reellen Zahlen:

Satz. *Ein solcher Dedekindscher Schnitt im Bereich der reellen Zahlen definiert stets eine und nur eine reelle Zahl s, die „Schnittzahl", derart, daß jedes $a \leqq s$, jedes $a' \geqq s$ ist.*

Die Schnittzahl s selbst kann zu $\mathfrak{A}$ oder zu $\mathfrak{A}'$ gehören, je nach dem einteilenden Gesichtspunkt. Jede Zahl unterhalb s dagegen gehört zu $\mathfrak{A}$, jede Zahl oberhalb s zu $\mathfrak{A}'$.

§ 3. Punkte und Vektoren der Ebene.

Von den Grundbegriffen der analytischen Geometrie brauchen wir im folgenden nur das Allereinfachste und allgemein Bekannte. Wir beschränken uns daher auf die Darlegung der für ihren Aufbau grundsätzlich wichtigen Dinge.

In bekannter Weise lassen sich zunächst die rationalen Zahlen als Punkte einer Zahlengeraden veranschaulichen, d. h. einer beliebigen (waagerecht gedachten) Geraden, auf

der man zwei verschiedene Punkte O und E als Null- und Einheitspunkt, kurz als 0 und 1, gewählt hat, 1 rechts von 0. Daß die rationalen Zahlen eine geordnete Menge bilden, wird dadurch bildhaft anschaulich.

Die in § 2 zusammengefaßten Betrachtungen lehren nun zunächst, daß hierbei zwar jeder rationalen Zahl genau ein Punkt — wir nennen ihn kurz einen rationalen Punkt — entspricht, daß aber nicht jeder Punkt der Geraden Bild einer rationalen Zahl ist. Es entspricht aber jedem Dedekindschen Schnitt im Bereich der rationalen Zahlen ein solcher für die rationalen Punkte: Sie werden in zwei (nicht leere) Klassen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ derart eingeteilt, daß jeder Punkt a aus $\mathfrak{A}$ links von jedem Punkt a' aus $\mathfrak{A}'$ liegt. Die Anschauung verlangt hier gebieterisch, daß es dann stets einen Punkt s auf der Geraden gibt, der die beiden Klassen trennt, d. h. daß für alle a und a' immer $a \leqq s \leqq a'$ ist. Die ausdrückliche Anerkennung dieser Tatsache bildet den Inhalt des **Cantor-Dedekindschen Axioms:**

Jeder Schnitt im Bereich der rationalen Punkte definiert einen ganz bestimmten Punkt der Geraden, der die beiden Klassen des Schnittes trennt.

Das heißt aber nichts anderes, als daß jeder reellen Zahl genau ein Punkt der Geraden als Bild entspricht und umgekehrt. In diesem Sinne ist das System der reellen Zahlen umkehrbar eindeutig den Punkten der Zahlengeraden zugeordnet. Der am Ende des vorigen Paragraphen aufgeführte Stetigkeitssatz besagt bei dieser Abbildung:

Teilt man alle Punkte der Zahlengeraden irgendwie in zwei nicht leere Klassen derart, daß jeder Punkt der ersten Klasse links von jedem Punkt der zweiten Klasse liegt, so gibt es stets genau einen Punkt, der beide Klassen trennt.

Diese Abbildung der reellen Zahlen auf die Punkte einer Geraden bildet die Grundlage der analytischen Geometrie. Statt die reellen Zahlen durch die Punkte der Zahlengeraden

zu veranschaulichen, ist es manchmal vorteilhafter, es durch die gerichteten Strecken, die **Vektoren**, auf dieser Geraden zu tun: Als Bild der reellen Zahl a sieht man die gerichtete Strecke an, die von 0 nach dem Punkt a führt oder jede andere Strecke, die die gleiche Länge und die gleiche Richtung wie die eben genannte hat. Die Zahl a heißt umgekehrt die **Koordinate** des veranschaulichenden Vektors. Denkt man sich bei a eine Pfeilspitze, bei 0 eine Fiederung an die Strecke gezeichnet, so fliegen die die positiven Zahlen veranschaulichenden Vektoren nach rechts, die anderen nach links. Der Zahl 0 entspricht der Nullvektor, der keine Länge und keine (bestimmte) Richtung hat.

Veranschaulicht die Abbildung der reellen Zahlen auf die Punkte der Geraden die Ordnung der reellen Zahlen besonders eindringlich, so ist die Abbildung der Zahlen durch die Vektoren besser geeignet, ihre Verknüpfungen zu veranschaulichen: Der Addition entspricht das Aneinanderfügen der Vektoren (vgl. S. 17 und § 7). Die Differenz $b - a$ wird durch den Vektor veranschaulicht, der von dem Punkte a zu dem Punkte b führt. Die Multiplikation von a mit der positiven Zahl b bedeutet die Streckung des der Zahl a entsprechenden Vektors im Verhältnis $1:b$ (vgl. § 12). Ist b negativ, so wird überdies die Richtung des erhaltenen Vektors umgedreht. Entsprechend wird die Division veranschaulicht.

Der Übergang zu den Grundlagen der analytischen Geometrie der Ebene erfordert nun keine neuen grundsätzlichen Erwägungen mehr: Man legt in die Ebene zwei Zahlengeraden oder Achsen, von denen die zweite aus der ersten hervorgeht, indem man diese um den Nullpunkt im mathematisch positiven Sinne, d. h. im Gegensinn des Uhrzeigers, um einen rechten Winkel dreht. Ein Punkt P der Ebene ist dann umkehrbar eindeutig durch seine (senkrechten) Projektionen P' und P'' auf die erste bzw. zweite

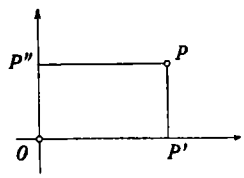

Fig. 1.

Achse bestimmt (vgl. Fig. 1), diese Projektionen sind wiederum eindeutig durch ihre Koordinaten x bzw. y festgelegt. Jedem Punkt entspricht so genau ein geordnetes Zahlenpaar (x, y), d. h. ein Zahlenpaar, bei dem auf die Reihenfolge der beiden Zahlen zu achten ist, — und umgekehrt jedem solchen Zahlenpaar genau ein Punkt.

In diesem Sinne wird also die Gesamtheit aller Punkte unserer Ebene durch die Gesamtheit aller Zahlenpaare (x, y) geliefert, diese durch jene veranschaulicht. Das Paar der Zahlen x, y nennt man bekanntlich die (rechtwinkligen) **kartesischen Koordinaten** des dargestellten Punktes.

In der Ebene ist es — in viel höherem Maße als auf der Geraden — für die Anwendung zweckmäßig, neben den Punkten die Vektoren, d. h. gerichtete Strecken zu betrachten. Man sagt von zwei gerichteten Strecken (die Richtung denken wir uns wieder durch Spitze und Fiederung verdeutlicht), daß sie denselben **Vektor** darstellen, wenn sie die gleiche Länge und die gleiche Richtung haben, während man sonst von der Lage in der Ebene absieht. Solche Vektoren bezeichnet man mit kleinen deutschen Buchstaben: $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$; man nennt sie zweidimensional im Gegensatz zu den zuvor auf der Geraden eingeführten eindimensionalen Vektoren.

Projiziert man einen Vektor $\mathfrak{a}$ auf die beiden Achsen, so erhält man auf diesen je einen (eindimensionalen) Vektor, die man als die Komponenten des Vektors $\mathfrak{a}$ bezeichnet. Sie veranschaulichen (auf ihrer Zahlengeraden) je eine reelle Zahl, die Koordinaten von $\mathfrak{a}$. Jedem Vektor entspricht so ein (geordnetes) Zahlenpaar (x, y). Da auch umgekehrt jedem solchen Zahlenpaar ein (eindimensionaler) Vektor auf jeder der Achsen entspricht und diese rückwärts sich als die Pro-

jektionen genau eines Vektors a der Ebene auffassen lassen, so können wir sagen: Die Gesamtheit aller Vektoren der Ebene wird durch die Gesamtheit aller Zahlenpaare (x, y) geliefert, diese durch jene veranschaulicht. Dem Zahlenpaar $(0, 0)$ entspricht der Nullvektor, der keine Länge und keine (bestimmte) Richtung hat. Denkt man sich alle Vektoren der Ebene von einem und demselben Punkte ausgehend, so nennt man sie ortsgebunden. Gehen sie insbesondere vom Ursprung $(0, 0)$ aus, so nennt man sie Radiivektoren. Die Spitze des Radiusvektors (x, y) liegt dann offenbar gerade im Punkte (x, y).

Vom Parallelogramm der Kräfte her ist es jedem geläufig, zwei Vektoren a und b aneinander zu fügen, d. h. den Anfang des zweiten auf die Spitze des ersten zu legen. Der Vektor c, der von der Fiederung des ersten zur Spitze des zweiten führt (s. Fig. 2a), veranschaulicht dann die Resultante der durch die beiden ersten veranschaulichten Kräfte[1]). Man spricht hier von geometrischer oder **Vektoraddition** und schreibt kurz

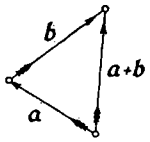

Fig. 2a.

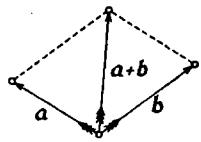

Fig. 2b.

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}.$$

Sind (a, a'), (b, b'), (c, c') die Koordinatenpaare dieser drei Vektoren, so ist bekanntlich

$$a + b = c, \quad a' + b' = c'.$$

Neben den kartesischen Koordinaten benutzt man in der Ebene noch die sogenannten **Polarkoordinaten:** Ein Punkt P der Ebene bestimmt auch eindeutig seinen (nicht negativen) Abstand ϱ vom Nullpunkt und im wesentlichen

[1]) Oder man läßt a und b von demselben Punkte ausgehen; c ist dann die von diesem Punkte ausgehende Diagonale des durch a und b bestimmten Parallelogramms (s. Fig. 2 b).

eindeutig auch den ersten Richtungswinkel φ des vom Koordinatenanfangspunkte O nach P führenden Halbstrahles, so daß P auch durch das Zahlenpaar (ϱ, φ) dargestellt werden kann (s. Fig. 3). Unter dem ersten Richtungswinkel eines Strahles versteht man dabei denjenigen (natürlich im Bogenmaß gemessenen) Winkel, um den man die Richtung der ersten Koordinatenachse im mathematisch positiven Sinne drehen muß, bis sie die Richtung des Strahles erhält. Volle Umdrehungen in beiden Richtungen dürfen dabei außer acht gelassen werden, d. h. zu dem gefundenen Winkel dürfen ganzzahlige Vielfache von 2π beliebig addiert oder von ihm subtrahiert werden. Die zweite Polarkoordinate ist also unendlich vieldeutig, aber „mod 2π" eindeutig bestimmt. Denjenigen unter den unendlich vielen Werten derselben, der der Bedingung $-\pi < \varphi \leqq +\pi$ genügt, nennt man ihren Hauptwert. Man nennt aber im allgemeinen zwei Winkel φ und ψ schon dann einander gleich, in Zeichen $\varphi = \psi$, wenn sie mod 2π kongruent, wenn also $\varphi - \psi$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist.

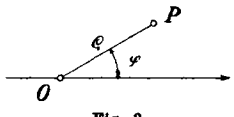

Fig. 3.

Zwischen den Polarkoordinaten ϱ, φ und den kartesischen Koordinaten x, y ein und desselben von $(0, 0)$ verschiedenen Punktes bestehen die Formeln[1])

$$(1)\quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$(2)\qquad x = \varrho\cos\varphi,\quad y = \varrho\sin\varphi.$$

Außer diesen wenigen grundsätzlichen Dingen werden wir aus der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes nur das Bekannteste über Gerade, Kreis und Kugel benutzen und höchstens bei den Anwendungen und Beispielen etwas weitergehende Dinge gebrauchen.

[1]) Die erste der Formeln (1) und die Formeln (2) gelten offenbar auch für $(x, y) = (0,0)$, d. h. für $\varrho = 0$ und beliebiges φ