

SAMMLUNG GÖSCHEN BAND 65/65a

ANALYTISCHE GEOMETRIE

von

DR. KARL PETER GROTEMEYER

Privatdozent für Mathematik an der Technischen Universität Berlin

Mit 73 Abbildungen



WALTER DE GRUYTER & CO.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagsbuchhandlung · J. Guttentag,
Verlagsbuchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp

BERLIN 1958



Copyright 1958 by Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35, Genthiner Str. 13. —
Alle Rechte, einschl. der Rechte der Herstellung von Photokopien und Mikrofilmen,
von der Verlagshandlung vorbehalten. — Archiv-Nr. 110065. — Satz und Druck:
Mercedes-Druck, Berlin SW 61. — Printed in Germany.

Inhaltsverzeichnis

| | Seite |
|---|-------|
| Literaturverzeichnis | 6 |
| I. Einleitung | 7 |
| II. Die Vektoralgebra | |
| 1. Definition der gebundenen und freien Vektoren | 7 |
| 2. Die Addition von Vektoren | 9 |
| 3. Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar | 9 |
| 4. Die Subtraktion von Vektoren | 10 |
| 5. Beispiele | 12 |
| 6. Der Begriff der linearen Abhängigkeit | 16 |
| 7. Das innere Produkt (skalares Produkt) | 17 |
| 8. Das äußere Produkt (vektorielles Produkt) | 20 |
| 9. Das Spatprodukt | 22 |
| 10. Das dreifache Vektorprodukt | 24 |
| 11. Mehrfache Produkte | 25 |
| III. Das Koordinatensystem | |
| 1. Darstellung der Vektoren durch Zahlentripel | 26 |
| 2. Das Rechnen mit Spaltendarstellungen | 28 |
| 3. Anwendungen und einfache Beispiele | 30 |
| IV. Geraden und Ebenen | |
| 1. Die Hessesche Normalform | 32 |
| 2. Ebene durch zwei sich schneidende Geraden | 35 |
| 3. Ebene durch Punkt und Gerade | 35 |
| 4. Schnitt von Ebene und Gerade | 36 |
| 5. Schnitt zweier Ebenen | 37 |
| 6. Das Ebenenbüschel, das Ebenenbündel | 38 |
| 7. Winkel zweier Ebenen | 40 |
| 8. Der Abstand eines Punktes von einer Geraden | 41 |
| 9. Windschiefe Geraden | 42 |
| 10. Gerade durch Punkt und zwei windschiefe Geraden | 44 |
| 11. Das hyperbolische Paraboloid | 46 |
| 12. Projektion auf eine Ebene | 50 |
| 13. Spiegelung am Punkt, an der Geraden, an der Ebene | 51 |
| V. Kugeln | |
| 1. Die Kugelgleichung | 52 |
| 2. Schnitt von Gerade und Kugel, Kugeltangenten | 53 |
| 3. Die Potenz eines Punktes für die Kugel | 54 |
| 4. Der Schnitt zweier Kugeln | 55 |
| 5. Die Potenzebene zweier Kugeln, die Potenzgerade | 58 |

| VI. Der Matrizenkalkül | Seite |
|---|-------|
| 1. Definition und Multiplikation von Matrizen | 60 |
| 2. Die Addition von Matrizen, Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl | 64 |
| 3. Die Nullmatrix, die Einheitsmatrix, das Transponieren | 65 |
| 4. Determinante einer Matrix, adjungierte Matrix, inverse Matrix | 66 |
| 5. Einige Folgerungen | 67 |
| 6. Zeilen- und Spaltendarstellungen von Matrizen | 68 |
| 7. Abriss über lineare Gleichungen | 71 |
| VII. Affine Abbildungen | |
| 1. Die Parallelverschiebung | 74 |
| 2. Definition der affinen Abbildung | 75 |
| 3. Einfache Eigenschaften der Affinität | 78 |
| 4. Weitere Eigenschaften der Affinität, Determinante der Abbildung, ausgeartete Affinitäten, Scherungsaffinitäten | 79 |
| 5. Bestimmung einer Affinität durch Original- und Bildpunkte | 81 |
| 6. Die Parallelprojektion | 82 |
| 7. Die affine Gruppe | 83 |
| VIII. Bewegungen | |
| 1. Definition und Eigenschaften | 85 |
| 2. Der Orthogonalisierungsprozeß, Konstruktion orthogonaler Matrizen | 87 |
| 3. Einführung eines neuen Koordinatensystems | 87 |
| 4. Fixelemente von Bewegungen | 89 |
| 5. Eigentliche Bewegungen | 92 |
| 6. Uneigentliche Bewegungen (Umlegungen) | 94 |
| 7. Tabellarische Übersicht | 96 |
| 8. Die Gruppe der Bewegungen | 97 |
| IX. Ähnliche (äquiforme) Abbildungen | |
| 1. Definition der ähnlichen Abbildung | 98 |
| 2. Einfache Eigenschaften der ähnlichen Abbildung | 99 |
| X. Die Flächen 2. Ordnung | |
| 1. Definition der F_2 | 100 |
| 2. Klassifikation und Aufzählung der F_2 | 101 |
| 3. Kurze Beschreibung der F_2 | 105 |
| 4. Schnitt von Gerade und Quadrik, Tangentialebene, Doppelpunkt | 110 |
| 5. Diametralebenen (Durchmesserebenen) einer Quadrik | 112 |
| 6. Mittelpunkte und Mittelpunktsquadriken | 113 |
| 7. Die Hauptachsentransformation | 115 |
| 8. Das charakteristische Polynom | 116 |
| 9. Eigenwerte und Eigenvektoren | 118 |
| 10. Durchführung der Hauptachsentransformation | 120 |
| 11. Beispiele | 122 |
| 12. Der Rang orthogonal äquivalenter Matrizen | 124 |
| 13. Die Diskriminante | 125 |
| 14. Kennzeichnung der Quadriken durch Invarianten | 126 |

| | |
|---|-----|
| 15. Spezielle Quadrikenklassen; Diametralebenengesamtheit einer Quadrik | 134 |
| 16. Die Richtkegel und der Asymptotenkegel einer Quadrik | 136 |
| 17. Ebene Schnitte einer Quadrik | 138 |
| 18. Die Kreisschnittebenen einer Quadrik | 143 |
| 19. Das System konzyklischer Quadriken | 151 |
| 20. Geschichtliches über die Quadriken | 152 |

XI. Einführung in die Projektive Geometrie des Raumes

| | |
|---|-----|
| 1. Homogene Punkt- und Ebenenkoordinaten, der projektive Raum | 155 |
| 2. Das Dualitätsprinzip | 158 |
| 3. Kollineationen, Korrelationen | 162 |
| 4. Die Projektive Geometrie, einfache Invarianten | 163 |
| 5. Der Hauptsatz der Projektiven Geometrie | 165 |
| 6. Die linearen Gebilde des P_3 und projektive Koordinaten derselben | 167 |
| 7. Einstufige Gebilde, das Doppelverhältnis | 168 |
| 8. Weitere Eigenschaften des Doppelverhältnisses; harmonische Punktepaare | 173 |
| 9. Involutionen | 175 |

XII. Behandlung der Quadriken im Rahmen der Projektiven Geometrie

| | |
|--|-----|
| 1. Flächen zweiter Ordnung und Flächen zweiter Klasse | 177 |
| 2. Das singuläre Gebilde einer F_2 bzw. F^2 ; der Rang | 177 |
| 3. Tangente, Berührungsebene, Berührungspunkt | 179 |
| 4. Konjugierte Elemente in bezug auf ein quadratisches Gebilde | 182 |
| 5. Pol und Polarebene | 184 |
| 6. Reziproke Polaren | 186 |
| 7. Die projektive Erzeugung von Quadriken nach STAUDT | 187 |
| 8. Die projektive Erzeugung von Quadriken nach STEINER | 189 |
| 9. Die projektive Erzeugung von Quadriken nach MAGNUS | 192 |
| 10. Die projektive Erzeugung von Quadriken nach SEYDEWITZ | 193 |
| 11. Der Trägheitssatz für quadratische Formen | 195 |
| 12. Die projektive Einteilung der F_2 bzw. F^2 | 196 |

| | |
|----------------------------------|-----|
| Namen- und Sachverzeichnis | 200 |
|----------------------------------|-----|

Literaturverzeichnis

Das folgende Verzeichnis gibt nur eine Auswahl deutschsprachiger Lehrbücher der Analytischen Geometrie.

1. Ludwig Bieberbach, Einführung in die Analytische Geometrie, 4. Aufl., Bielefeld 1950.
2. Wilhelm Blaschke, Analytische Geometrie, 2. Aufl., Basel 1953.
3. Gerrit Bol, Elemente der Analytischen Geometrie, Teil 1 und Teil 2, Göttingen 1948 und 1949.
4. Lothar Heffter, Lehrbuch der Analytischen Geometrie, Berlin 1933.
5. Lothar Heffter, Grundlagen und analytischer Aufbau der Geometrie, Leipzig 1950.
6. Karl Kommerell, Vorlesungen über Analytische Geometrie der Ebene, des Raumes, 2 Bände, Leipzig 1949.
7. Gerhard Kowalewski, Einführung in die Analytische Geometrie, 4. verbess. Aufl., Berlin 1953.
8. Max Lagally, Vorlesungen über Vektorrechnung, 3. Aufl., Leipzig 1945.
9. Fritz Neiss, Analytische Geometrie, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1950.
11. Günter Pickert, Analytische Geometrie, Berlin 1955.
12. Artur Schoenflies und Max Dehn, Einführung in die Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, 2. Aufl., Berlin 1931.
13. Emanuel Sperner, Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra, 2 Bände, Göttingen 1948.

Formelverweise: Es bedeutet beispielsweise VIII. 5. (16): Kapitel VIII, daraus Abschnitt 5 und darin Formel (16). Fehlt die römische Ziffer, so handelt es sich um das laufende Kapitel.

I. Einleitung

Die Hauptaufgabe der Analytischen Geometrie besteht darin, Methoden und Verfahren anzugeben, mit deren Hilfe man geometrische Aufgaben durch Rechnung lösen kann. Obwohl schon in der Antike erste Ansätze in dieser Richtung vorlagen (schon die Ägypter benutzten bei der Landmessung Zahlen zur Festlegung von Punkten; auch Archimedes von Syrakus (—287 — —212) bediente sich rechtwinkliger Koordinaten) und die Geometrie als erste Wissenschaft unter dem Einfluß Platons (—429 — —348) axiomatisiert wurde, konnte die eigentliche Analytische Geometrie erst nach dem weiteren Ausbau der Algebra entstehen¹⁾. Diese beginnt daher erst, wenn auch in einer viel primitiveren Auffassung als heute, mit R. Descartes (1596—1650) und P. de Fermat (1601 bis 1665)²⁾.

II. Die Vektoralgebra³⁾

1. Definition der gebundenen und freien Vektoren

Vektoren dienen uns zur Festlegung der gegenseitigen Lage von Punkten. Wir definieren deshalb: *Ein Vektor wird durch ein geordnetes Punktepaar bestimmt, durch seinen Anfangspunkt und seinen Endpunkt*. Demgemäß können wir einen Vektor veranschaulichen durch eine gerichtete Strecke

\overrightarrow{EA} (Fig. 1). Die in einem Endpunkt befestigten Vektoren heißen gebundene Vektoren oder **Ortsvektoren**. Sieht man von der speziellen Lage im Raum ab, so spricht man von freien Vektoren oder kurz von **Vektoren**. Bei freien Vektoren wird also von allem außer Länge und Richtung abgesehen.

¹⁾ Die systematische geometrische Deutung der einfachsten algebraischen Operationen geht auf FR. VIETE (1540—1603) zurück. Die Methoden VIETES finden sich heute noch im elementargeometrischen Unterricht der Mittelstufe.

²⁾ Hinsichtlich weiterer historischer Bemerkungen sei auf die im Literaturverzeichnis genannten Lehrbücher von W. BLASCHKE und G. BOL verwiesen.

³⁾ Die Bezeichnung „Vektor“ wurde um 1846 von W. R. HAMILTON (1805 bis 1865) eingeführt. Die Vektorrechnung selbst wurde von H. GRASSMANN (1809 bis 1877) und HAMILTON entwickelt.

Ein solcher Vektor erscheint daher als Klasse aller gleich langen und gleichgerichteten Strecken. Jede dieser gerichteten Strecken kann zur Darstellung des Vektors Verwendung finden. Zwei

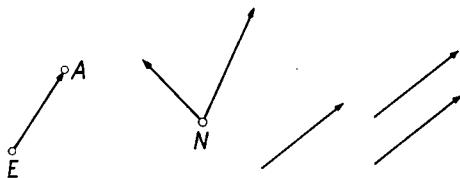


Fig. 1. Vektor als geordnetes Punktpaar E, A ; gebundene Vektoren; drei gleiche (freie) Vektoren

gerichtete Strecken gleicher Länge und Richtung bestimmen denselben Vektor. Zum Gleichheitsbegriff führt also eine gewisse logische Abstraktion. Genauer wollen wir definieren: *Zwei Vektoren sind gleich (Zeichen $=$), wenn sie durch eine Parallelverschiebung auseinander hervorgehen.*

Wir wollen Vektoren und Ortsvektoren durch kleine Frakturbuchstaben bezeichnen. Die Länge eines Vektors a heißt Betrag des Vektors und wird mit $|a|$ bezeichnet. Der Vektor der Länge Null heißt Nullvektor, wofür man o schreibt. Besitzt ein Vektor die Länge 1, so spricht man von einem Einheitsvektor. Um den Gegensatz zwischen Vektoren und Zahlen zu betonen, werden die letzteren jetzt auch Skalare genannt.

Der Vektor ist ein neues geometrisches Hilfsmittel, das dazu dienen kann, viele physikalische Größen (z. B. Geschwindigkeiten, Kräfte, Feldstärken) zu kennzeichnen, bei denen es nicht genügt, ihre Intensität durch eine einzige Zahl anzugeben, sondern bei denen auch die Angabe ihrer Richtung notwendig ist. In der Geometrie selbst liefert die Vektorrechnung erhebliche Vereinfachungen bei Auffassung und Darstellung der Erkenntnisse.

Für die Kombination von zwei und mehr Vektoren werden neue Rechenregeln festgesetzt. Da diese mit den gewohnten Rechenregeln für Zahlen gewisse Analogien zeigen, so wollen wir auch die Worte Addition, Subtraktion, Multiplikation und ebenso die Zeichen $+$, $-$ benutzen. Jedoch erhalten diese Begriffe neue Bedeutung bei den Vektoren bzw. Ortsvektoren.

2. Die Addition von Vektoren

Legen wir die beiden Vektoren a und b so aneinander (Fig. 2), daß der Endpunkt von b mit dem Anfangspunkt von a zusammenfällt, dann wird durch den Anfangspunkt von b und den Endpunkt von a der Vektor $a + b$ erklärt. Um die Kommutativität dieser Addition, d. h. um das Gesetz $a + b = b + a$ nachzuweisen, hat man lediglich die Figur der drei Vektoren a , b , $a + b$ zu ergänzen durch die in Fig. 2 dünn gezeichneten Vektoren a und b . Dann liefert die Figur sofort die Behauptung.

Die Gültigkeit des Assoziativgesetzes

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

für drei beliebig gewählte Vektoren folgt unmittelbar aus der Figur 3. Auf Grund dieser Regel können wir alle Klammern auflösen.

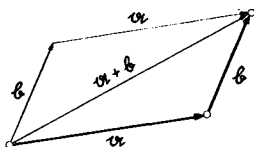


Fig. 2. Addition von Vektoren, Kommutativität

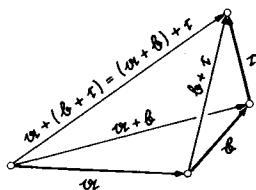


Fig. 3. Das Assoziativgesetz

3. Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Ist a eine positive Zahl¹⁾, so versteht man unter a einen Vektor, der die gleiche Richtung wie a besitzt und a -mal so lang ist: $|a| a = a |a|$.

¹⁾ Alle auftretenden Zahlen sollen, wenn nichts anderes gesagt ist, stets reell sein.

Unter $-a$ wollen wir den Vektor verstehen, der gleiche Länge wie a , aber entgegengesetzte Richtung zu a aufweist: $|-a| = |a|$.

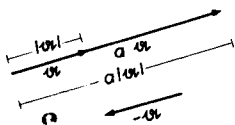


Fig. 4. Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl

Jetzt können wir auch leicht $-a$ mit $a > 0$ erklären, nämlich als Vektor, der in die entgegengesetzte Richtung von a weist und den a -fachen Betrag von a besitzt: $|-a| = a|a|$.

Offensichtlich gilt für den Nullvektor o stets $a o = o$. Ferner gilt für die Zahl 0 stets $0 a = o$.

Aus Bequemlichkeit wollen wir auch festsetzen $h a = a h$. Wir geben die einfachen Rechenregeln für die Multiplikation mit Skalaren an, die man sich leicht an Figuren klar macht:

1. $n(a + b) = na + nb$,
2. $(n + m)a = na + ma$,
3. $n(ma) = (nm)a$,
4. $1a = a$.

Bemerkung: Ist $a \neq o$ ein Vektor, so ist $\frac{1}{|a|}a = \frac{a}{|a|}$ ein Einheitsvektor. Man spricht dann auch von einem normierten Vektor.

4. Subtraktion von Vektoren

Wie kann man $a - b$ am einfachsten definieren? Nach 3. wird man sofort schreiben:

$$a - b = a + (-1)b = a + (-b).$$

Damit haben wir schon die Subtraktion durch Zurückführung auf die Addition erklärt. (Vgl. Fig. 5.) Die zeichnerische Ausführung erläutert die Figur 6.

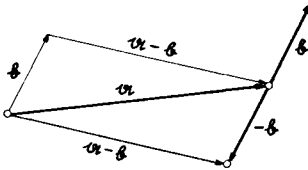


Fig. 5. Definition der Subtraktion von Vektoren

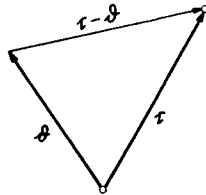


Fig. 6. Ausführung der Subtraktion

Wir wollen jetzt noch die Frage prüfen, ob die so eingeführte Subtraktion vernünftig ist, d. h. ob die Regel

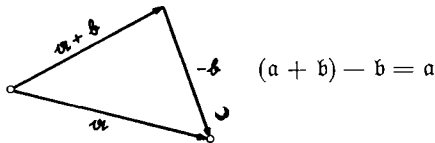


Fig. 7.

richtig ist. Um die Gültigkeit dieser Formel einzusehen, braucht man nur die Figur 7 zu betrachten.

Bemerkung 1: Die Vektoren bilden gegenüber der Addition eine **Gruppe**.¹⁾ Damit faßt man die folgenden Eigenschaften zusammen. Zunächst ist je zwei Vektoren durch die Addition wieder ein Vektor zugeordnet. Dazu kommt I. die Gültigkeit des Assoziativgesetzes; II. es gibt einen Vektor o (Nullvektor), so daß für jeden Vektor a gilt $o + a = a$; III. zu jedem Vektor a gibt es den Vektor $-a$ so daß $a + (-a) = o$ gilt.

Da die Addition kommutativ ist, so spricht man auch von einer kommutativen oder abelschen²⁾ Gruppe.

Bemerkung 2: Abstrahiert man von der Bedeutung der Größen $a, b, c \dots$ und fordert nur, daß sie, wie eben beschrieben, eine abelsche Gruppe \mathfrak{B} hinsichtlich der Addition bilden, so wird man unmittelbar auf den Begriff des **abstrakten Vektorraumes** geführt. Sind $a, b, c \dots$

¹⁾ Das Fachwort „Gruppe“ ist 1830 von E. GALOIS (1811–1832) eingeführt worden.

²⁾ Nach N. H. ABEL (1802–1829).

Elemente eines Körpers K (z. B. rationale Zahlen, reelle Zahlen oder komplexe Zahlen), so hat man zu fordern, daß a stets wieder ein Element der Gruppe \mathfrak{B} ist. Sind dann noch die Formeln 1., 2., 3., 4. von Nummer 3 ausnahmslos gültig, so heißt \mathfrak{B} *Vektorraum über K* .

5. Beispiele

a) Mittelpunkt einer Strecke. Die Strecke \overline{AB} läßt sich durch die Ortsvektoren (bezüglich des Nullpunktes N) a und b ihrer Endpunkte beschreiben. Für den Ortsvektor m des Mittelpunktes findet man aus der Figur 8 sofort $m = a + \frac{1}{2}(b - a) = \frac{1}{2}(a + b)$.

b) Gerade, gegeben durch Punkt und Richtung. Ist a der Ortsvektor des gegebenen Punktes bezüglich des Nullpunktes N und e ein Vektor in Richtung der Geraden, so muß sich der Ortsvektor x eines beliebigen Punktes der Geraden (vgl. Fig. 9) darstellen lassen

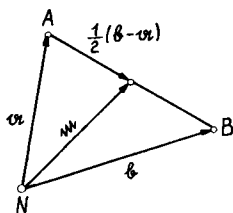


Fig. 8. Mittelpunkt einer Strecke

$$m = \frac{1}{2}(a + b)$$

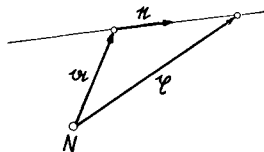


Fig. 9. Gerade gegeben durch Punkt und Richtung

als Summe des Ortsvektors a und eines geeigneten Vielfachen t e des Vektors e :

$$x = a + te.$$

Lassen wir t alle reellen Zahlen durchlaufen, so beschreibt x alle Punkte der Geraden. Die Variable t heißt *Parameter* der Geraden, und die vorstehende Gleichung nennt man *Parameterdarstellung* der Geraden. Schon an der Herleitung der Parameterdarstellung der Geraden zeigt es sich, wie durch die Vektorrechnung der geometrische Sachverhalt außerordentlich plastisch zum Ausdruck kommt.

c) **Gerade, gegeben durch zwei Punkte.** Sind a und b die beiden Ortsvektoren der beiden Punkte, und ist x der Ortsvektor des laufenden Punktes der Geraden, so ist die Parameterdarstellung der Geraden gegeben durch

$$x = a + t(b - a);$$

denn $b - a$ ist ein Vektor in Richtung der Geraden (vgl. Fig. 10).

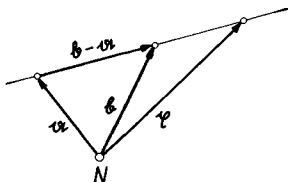


Fig. 10. Gerade, gegeben durch zwei Punkte

d) **Ebene, gegeben durch Punkt und zwei Richtungen.** Es sei a der Ortsvektor des gegebenen Punktes, und e, f seien zwei Vektoren, die nicht parallel sind. Wie aus der Figur 11 zu entnehmen ist, läßt sich der Ortsvektor x eines beliebigen Punktes der Ebene, die durch den „Punkt“ a geht und von den Vektoren e und f „aufgespannt“ wird, darstellen in der Form

$$x = a + t e + \tau f.$$

Lassen wir die Parameter t, τ unabhängig die reellen Zahlen durchlaufen, dann beschreibt x alle Punkte der Ebene. Damit haben wir eine Parameterdarstellung der Ebene gefunden.

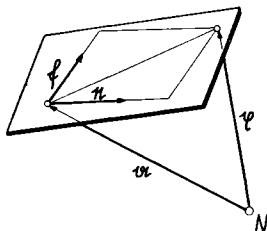


Fig. 11. Ebene, gegeben durch Punkt und zwei Richtungen

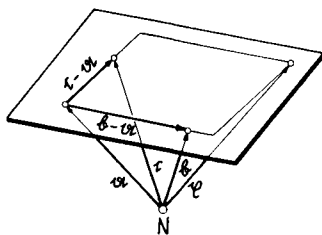


Fig. 12. Ebene, gegeben durch drei Punkte

e) Ebene, gegeben durch drei Punkte. Sind a, b, c die Ortsvektoren der drei gegebenen Punkte, dann sind die Vektoren $b - a$ und $c - a$ sicher nicht zueinander parallel, wenn die drei Punkte nicht in einer Geraden liegen. Da $b - a$ und $c - a$, an a angeheftet, die Ebene „aufspannen“, so folgt nach d) die gesuchte Parameterdarstellung:

$$x = a + t(b - a) + \tau(c - a).$$

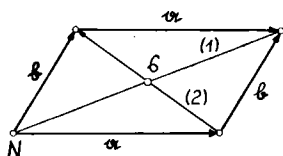


Fig. 13 Einfache Eigenschaft des Parallelogrammes

f) Beweis eines einfachen Satzes über das Parallelogramm. In einem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen. Wir wollen diesen Satz beweisen. In der Bezeichnungweise der Figur 13 lauten die Parameterdarstellungen der beiden Diagonalen:

$$(1) \quad x = t(a + b) \quad \text{und} \\ (2) \quad y = a + \tau(b - a).$$

Dabei sind x und y die laufenden Punkte. Da der Schnittpunkt der beiden Diagonalen sowohl auf (1) als auch auf (2) liegt, so gilt

$$s = t_0(a + b), \quad s = a + \tau_0(b - a)$$

und

$$(1 - t_0 - \tau_0)a = (t_0 - \tau_0)b.$$

Da die beiden Vektoren a und b nicht parallel sind, so kann diese Gleichung nur für $1 - t_0 - \tau_0 = 0$ und $t_0 - \tau_0 = 0$ bestehen. Daraus findet man aber unmittelbar $t_0 = \tau_0 = \frac{1}{2}$. Somit haben wir schließlich

$$s = \frac{1}{2}(a + b), \quad \text{d. h. } s \text{ ist Mittelpunkt von (1),}$$

$$s = a + \frac{1}{2}(b - a), \quad \text{d. h. } s \text{ ist Mittelpunkt von (2).}$$

g) Das Teilverhältnis dreier Punkte einer Geraden. Das Teilverhältnis λ der drei Punkte mit den Ortsvektoren p_1, p_2, x (vgl. Fig. 14) wird durch die Gleichung $(x - p_1) = \lambda(p_2 - x)$ definiert. Lösen wir nach x auf, so wird

$$x = \frac{p_1 + \lambda p_2}{1 + \lambda}, \quad 1 + \lambda \neq 0.$$

Läßt man jetzt das Teilverhältnis λ variieren, dann beschreibt \mathfrak{x} alle Punkte der Geraden. Dem Wert $\lambda = -1$ entspricht kein Punkt der Geraden. (Dieser Mangel wird erst später in der Projektiven Geometrie beseitigt.) Wir haben hier also eine Parameter-

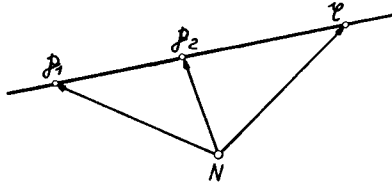


Fig. 14. Das Teilverhältnis λ : $(\mathfrak{x} - \mathfrak{p}_1) = \lambda (\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{x})$

darstellung der Geraden durch die beiden Punkte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ gefunden, bei welcher der Parameter das Teilverhältnis zwischen dem laufenden und den beiden gegebenen Punkten ist. Übrigens liefert die gebrochen-

lineare „Parametertransformation“ $t = \frac{\lambda}{1 + \lambda}$, durch die wir statt λ den Parameter t einführen können, die Parameterdarstellung der Geraden, wie wir sie unter c) gefunden hatten. (Der Leser mache sich die Lage der Punkte mit dem Ortsvektor \mathfrak{x} klar, wenn λ alle reellen Zahlen $\neq -1$ durchläuft.)

h) Schwerlinien und Schwerpunkt eines Dreiecks. Die Verbindungslinien der Ecken eines Dreiecks mit den gegenüberliegenden Seitenmitten (Schwerlinien oder Medianen) schneiden sich in einem Punkt, der jede Schwerlinie im Verhältnis 1:2 teilt. Zum Beweis dieses Satzes stellen wir zuerst die Parameterdarstellungen der Schwerlinien auf. (Siehe Fig. 15.) Der Ortsvektor des Mittelpunktes M der Dreiecksseite \overline{AB} ist nach a)

$\frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$. Die Schwerlinie durch C

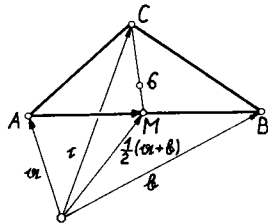


Fig. 15. Schnitt der Schwerlinien eines Dreiecks

und M hat daher die Parametergleichung

$$\mathfrak{x}_1 = \frac{1}{1 + \lambda_1} \left\{ \frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}{2} + \lambda_1 \mathfrak{c} \right\}.$$

Dabei ist λ_1 das Teilverhältnis der Punkte $\frac{a+b}{2}$, c , \mathfrak{x}_1 .

Analog stellen sich die beiden anderen Schwerlinien dar:

$$\mathfrak{x}_2 = \frac{1}{1 + \lambda_2} \left\{ \frac{b+c}{2} + \lambda_2 a \right\},$$

$$\mathfrak{x}_3 = \frac{1}{1 + \lambda_3} \left\{ \frac{c+a}{2} + \lambda_3 b \right\}.$$

Für $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ erhalten wir den Punkt $\mathfrak{s} = \frac{1}{3}(a+b+c)$ auf der ersten Schwerlinie. Für $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ und $\lambda_3 = \frac{1}{2}$ liegt derselbe Punkt auch auf der zweiten und der dritten Geraden. Die drei Schwerlinien schneiden sich daher in dem Punkt \mathfrak{s} . Da $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Teilverhältnisse darstellen, so teilt der Punkt \mathfrak{s} jede der Schwerlinien in der angegebenen Weise. Man nennt den Punkt \mathfrak{s} den Schwerpunkt des Dreiecks.

6. Der Begriff der linearen Abhängigkeit

Zwei Vektoren a und b heißen linear abhängig, wenn es zwei Zahlen α und β gibt, die nicht beide verschwinden, so daß $\alpha a + \beta b = 0$ gilt. Anschaulich gesprochen, besagt diese Gleichung die Parallelität der beiden Vektoren. Gibt es dagegen zwei solche Zahlen α, β nicht, dann nennt man die beiden Vektoren linear unabhängig. Die beiden Vektoren sind in diesem Fall beide keine Nullvektoren, und sie sind auch nicht parallel. Wir wollen diese Begriffsbildung jetzt auf n Vektoren ausdehnen und definieren:

Die Vektoren a_1, a_2, \dots, a_n heißen linear abhängig, wenn es n Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ gibt, die nicht alle gleich Null sind, so daß

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0$$

gilt. Gibt es solche Zahlen dagegen nicht, so heißen die Vektoren linear unabhängig.

Wir können jetzt das *Dimensionsaxiom* der Ebene aussprechen: *Es gibt in der Ebene zwei linear unabhängige Vektoren; mehr als zwei Vektoren sind stets linear abhängig.* Für den Raum besagt das Dimensionsaxiom, daß es mindestens drei linear unabhängige Vektoren gibt; jedoch vier und mehr Vektoren sind stets linear abhängig.

7. Das innere Produkt (skalares Produkt)¹⁾

Das *innere Produkt* $\langle a \ b \rangle$ zweier Vektoren a und b soll eine **Zahl** sein:

$$\langle a \ b \rangle = |a| |b| \cos \varphi.$$

Dabei ist φ der Winkel zwischen a und b : $\varphi = \sphericalangle(a, b)$.

Aus der Figur 16 folgt leicht die geometrische Bedeutung des Ausdrucks $|b| \cos \varphi$. Wir geben jetzt die algebraischen Eigenschaften des inneren Produktes an:

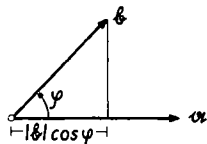


Fig. 16. Das innere Produkt $\langle a \ b \rangle = |a| \cdot |b| \cos \varphi$

1. $\langle a \ b \rangle = \langle b \ a \rangle$; das innere Produkt ist kommutativ.
2. $\langle (a \ a) \ b \rangle = a \langle a \ b \rangle$; dabei ist a eine Zahl.
3. $\langle (a + b) \ c \rangle = \langle a \ c \rangle + \langle b \ c \rangle$.

1. und 2. folgen mühelos aus der Definition des inneren Produktes:

$$\langle a \ b \rangle = |a| |b| \cos \varphi = |b| \cdot |a| \cos \varphi = |b| |a| \cos(-\varphi) = \langle b \ a \rangle.$$

Damit ist 1. bewiesen.

Ist $a \geq 0$, so gilt

$$\langle (a \ a) \ b \rangle = a |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi = a \langle a \ b \rangle,$$

weil $\varphi = \sphericalangle(a, b) = \sphericalangle(a \ a, b)$ ist. Es sei jetzt $a < 0$, d. h. $a = -c$ mit $c > 0$. Dann wird

$$\langle (a \ a) \ b \rangle = \langle (-c \ a) \ b \rangle = -c |a| |b| \cos \varphi = -c \langle a \ b \rangle = a \langle a \ b \rangle.$$

Hierbei war

$$\varphi = \sphericalangle(a, b) = \pi - \sphericalangle(-a, b)$$

zu beachten.

Der Beweis von 3. ergibt sich aus dem „Projektionssatz“ (vgl. Fig. 17). (Der Leser fasse die Abbildung 17 räumlich auf, wobei die Vektoren a, b, c nicht in einer Ebene liegen. Der „Projektionssatz“ erscheint dann durchaus nicht als

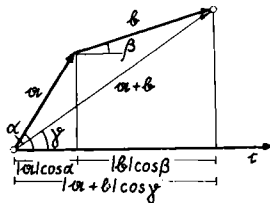


Fig. 17. Der Projektionssatz

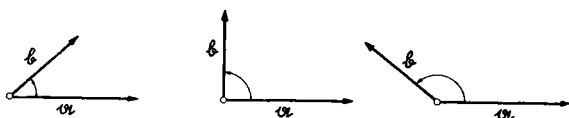
¹⁾ Eingeführt von H. GRASSMANN um 1844.

2 Grottemeyer: Analytische Geometrie

trivial; denn die eingezeichneten Lote auf c brauchen nicht mehr parallel zu sein. Der Nachweis dieses Satzes sei dem Leser überlassen.)

Das innere Produkt zweier Vektoren a und b , die beide keine Nullvektoren sind, gibt uns einige Auskunft über die relative Lage der beiden Vektoren zueinander. Ist etwa $\langle a \ b \rangle = 0$, so muß nach der Definition $\cos \sphericalangle(a, b) = 0$ sein, d. h. $\sphericalangle(a, b) = \pm \frac{\pi}{2}$. *Verschwundet also das innere Produkt zweier Vektoren, von welchen keiner ein Nullvektor ist, dann stehen die beiden Vektoren aufeinander senkrecht. Umgekehrt folgt natürlich aus der Orthogonalität zweier Vektoren das Verschwinden ihres inneren Produktes.*

Aus $\langle a \ b \rangle > 0$ folgt wiederum unter Benutzung der Definition des inneren Produktes, daß der Winkel, den die beiden Vektoren bilden, kleiner als ein Rechter ist. Für $\langle a \ b \rangle < 0$ ist dieser Winkel dagegen größer als ein Rechter. Man vergleiche dazu die Figur 18.

Fig. 18. $\langle a \ b \rangle > 0$, $\langle a \ b \rangle = 0$, $\langle a \ b \rangle < 0$

Mit Hilfe des inneren Produktes läßt sich der Betrag eines Vektors a für viele Rechnungen äußerst bequem darstellen: denn es gilt

$$\langle a \ a \rangle = |a|^2.$$

Daher ist

$$|a| = + \sqrt{\langle a \ a \rangle}.$$

Der Einheitsvektor, der die gleiche Richtung wie $a \neq 0$ besitzt, lautet jetzt:

$$+ \frac{a}{\sqrt{\langle a \ a \rangle}}.$$

Bemerkung 1: Für $\langle a | a \rangle$ findet häufig auch die Bezeichnung a^2 Verwendung. Dabei ist jedoch zu beachten, daß eine Bildung wie a^3 sinnlos ist. Ferner ist die „Wurzel“ aus a^2 nicht etwa der Vektor a , sondern der Betrag dieses Vektors.

Bemerkung 2: Man beachte, daß für das innere Produkt das assoziative Gesetz nicht gilt! So ist beispielsweise $\langle a | b \rangle \cdot c$ ein Vektor in der Richtung von $\pm c$; denn $\langle a | b \rangle$ ist ein Skalar. Andererseits ist $a \langle b | c \rangle$ ein Vektor, der in die Richtung von $\pm a$ fällt; denn hier ist $\langle b | c \rangle$ ein Skalar. Daher sind diese beiden Ausdrücke sicher im allgemeinen verschieden.

Die große Nützlichkeit des inneren Produktes belegen wir durch vektorielle Beweise zweier Lehrsätze der Elementargeometrie:

Der Lehrsatz des Pythagoras. Es seien a, b, c die drei Seitenvektoren eines Dreiecks (siehe Fig. 19). Da die Spitze von b mit dem Ende von c zusammenfällt, so ist offenbar:

$$c + a + b = 0$$

und daher

$$-c = (a + b).$$

Für das innere Produkt $\langle c | c \rangle$ finden wir unter Beachtung der angegebenen Rechenregeln:

$$\langle c | c \rangle = \langle a | a \rangle + \langle b | b \rangle + 2 \langle a | b \rangle.$$

Da $\sphericalangle(a, b) = \pi - \gamma$ ist, so folgt weiter

$$\langle a | b \rangle = |a| \cdot |b| \cdot \cos \sphericalangle(a, b) = -|a| \cdot |b| \cdot \cos \gamma.$$

Insgesamt erhalten wir dann nach Einführung der Beträge:

$$|c|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a| \cdot |b| \cos \gamma.$$

Damit ist bereits der pythagoräische Lehrsatz hergeleitet.

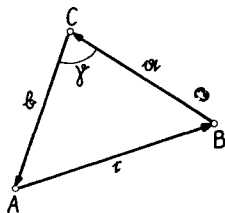


Fig. 19. Lehrsatz des Pythagoras

2*

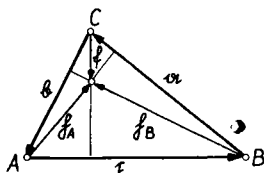


Fig. 20. Schnittpunktssatz der Höhen eines Dreiecks

Der Lehrsatz über die Höhen eines Dreiecks besagt, daß diese durch einen Punkt gehen. H sei der Schnittpunkt der von A und B auslaufenden Höhen des Dreiecks (vgl. Fig. 20). Weiter schreiben wir $\vec{AH} = \mathfrak{h}_A$, $\vec{BH} = \mathfrak{h}_B$ und nennen $\vec{CH} = \mathfrak{f}$. Die Behauptung ist dann, daß \mathfrak{f} auf der Seite \overline{AB} , d. h. auf c senkrecht steht. Wir haben demnach also $\langle c \mathfrak{f} \rangle = 0$ nachzuweisen.

Nach Voraussetzung ist $\langle \mathfrak{h}_A a \rangle = 0$ und $\langle \mathfrak{h}_B b \rangle = 0$. Außerdem gilt (vgl. Fig. 20)

$$c = \mathfrak{h}_A - \mathfrak{h}_B; \quad a = \mathfrak{h}_B - \mathfrak{f}; \quad b = \mathfrak{f} - \mathfrak{h}_A.$$

Also ist

$$\langle \mathfrak{h}_A (\mathfrak{h}_B - \mathfrak{f}) \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle \mathfrak{h}_B (\mathfrak{f} - \mathfrak{h}_A) \rangle = 0.$$

Oder ausgerechnet

$$\langle \mathfrak{h}_A \mathfrak{h}_B \rangle = \langle \mathfrak{h}_A \mathfrak{f} \rangle = \langle \mathfrak{h}_B \mathfrak{f} \rangle.$$

Daraus folgt aber unmittelbar

$$\langle (\mathfrak{h}_A - \mathfrak{h}_B) \mathfrak{f} \rangle = 0 \quad \text{oder} \quad \langle c \mathfrak{f} \rangle = 0.$$

Damit ist der Satz aber schon bewiesen.

8. Das äußere Produkt (vektorielles Produkt)¹⁾

Das äußere Produkt $[a \ b]$ zweier Vektoren a und b soll ein Vektor sein mit den Eigenschaften:

$V_1)$ $[a \ b]$ steht senkrecht auf a und b .

$V_2)$ $|[a \ b]| = |a| \cdot |b| \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi = \angle(a, b) \leq \pi.$

$V_3)$ $a, b, [a \ b]$ sollen in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden.

Ein Rechtssystem läßt sich mit Hilfe der Fußregel beschreiben:

Man denke sich den Vektor $[a \ b]$ als menschliche Figur (vgl. Fig. 21), deren Kopf in Richtung der Pfeilspitze zeigt, und deren Fersen im Endpunkt von $[a \ b]$ stehen. Es soll dann der rechte Fuß auf dem ersten Vektor des Produktes, d. h. auf a stehen, und der linke Fuß auf dem zweiten Vektor, d. h. auf b stehen. Der Öffnungswinkel der Füße ist $\angle(a, b)$. Durch diese Vorschrift ist der Richtungssinn des Vektors $[a \ b]$ vollständig bestimmt.

Die Eigenschaft V_2 läßt sich leicht geometrisch interpretieren. Dazu betrachtet man das von a und b aufgespannte

¹⁾ Auch diese Bezeichnung ist von H. GRASSMANN um 1844 eingeführt worden.

Parallelogramm (Fig. 22). Da $|b| \sin \varphi$ die Höhe desselben ist, so stellt $|[a b]|$ den Flächeninhalt des Parallelogramms dar.

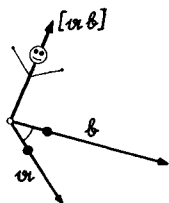


Fig. 21. Orientierung des Vektorproduktes $[a b]$ (Fußregel)



Fig. 22. Geometrische Deutung von $|[a b]|$

Wir stellen jetzt weitere Eigenschaften des äußeren Produktes zusammen. Zunächst gilt

$$(1) \quad [a b] = -[b a].$$

Nach V_2 besitzen die beiden Vektoren $[a b]$ und $[b a]$ gleiche Beträge, und auf Grund von V_3 sind ihre Richtungen entgegengesetzt. Eine einfache Folge von (1) ist

$$(2) \quad [a a] = 0;$$

denn nach (1) muß $[a a] = -[a a]$ gelten, woraus (2) folgt. Setzt man $a = \lambda c$, so gilt

$$(3_1) \quad [a b] = \lambda [c b];$$

und analog bei $b = \mu d$

$$(3_2) \quad [a b] = \mu [a d].$$

Sind die beiden Vektoren a, b keine Nullvektoren und gilt $a = \rho b$, d. h. sind a und b parallel (linear abhängig), so gilt

$$[a b] = \rho [b b] = 0.$$

Nun sei umgekehrt $[a b] = 0$ und $a \neq 0, b \neq 0$. Es ist dann $|[a b]| = |a| \cdot |b| \cdot \sin \angle(a, b) = 0$, d. h. $\angle(a, b) = 0, \pi$. Die Vektoren a und b sind daher in diesem Fall parallel

Notwendig und hinreichend für die Parallelität (lineare Abhängigkeit) der beiden Vektoren $a \neq 0, b \neq 0$ ist:

$$[a b] = 0.$$

Wir wollen jetzt das distributive Gesetz für das äußere Produkt beweisen:

$$(4) \quad [(a + b) c] = [a c] + [b c].$$

Zum Beweis projizieren wir die drei Vektoren a , b und $a + b$ auf eine zu c senkrechte Ebene (siehe Figur 23). So erhält man die Vektoren \hat{a} , \hat{b} und $\hat{a} + \hat{b}$. (Außerdem ist $|\hat{a}| = |a| \sin \angle(a, c)$,

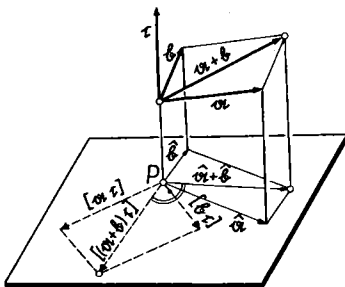


Fig. 23. Das distributive Gesetz für das äußere Produkt

usw.) Multiplizieren wir jetzt \hat{a} mit $|c|$ und drehen das projizierte Parallellogramm um P um $\frac{\pi}{2}$ in der gezeichneten Richtung, so ergeben sich gemäß V_1 , V_2 , V_3 , d. h. aus der Definition des äußeren Produktes, die Vektoren $[a c]$, $[b c]$ und $[(a + b) c]$ als Seiten und Diagonale eines Parallellogramms. Daraus folgt aber das distributive Gesetz (4).

9. Das Spatprodukt

Das innere Produkt der Vektoren $[a b]$ und c heißt *Spatprodukt*. Wir schreiben dafür $(a b c)$:

$$(a b c) = \langle [a b] c \rangle = \langle c [a b] \rangle.$$

Um zur geometrischen Bedeutung des Spatproduktes zu gelangen, bestimmen wir das Volumen des von a , b , c aufgespannten Parallelflachs (Fig. 24). Nach 8. ist die Grundfläche gleich $|[a b]|$, und die Höhe berechnet sich zu $|c| \cos \gamma$,