LEHRBUCH

DER

DARSTELLENDEN GEOMETRIE

VON

DR. KARL ROHN
O. PROFESSOR DER MATHEMATIK
AN DER UNIVERSITÄT LEIPZIG

UND

DR. ERWIN PAPPERITZ
O. PROFESSOR DER MATHEMATIK
AN DER BERGAKADEMIE FREIBERG

IN DREI BÄNDEN

ZWEITER BAND

AXONOMETRIE, PERSPEKTIVE, BELEUCHTUNG.

MIT 118 FIGUREN IM TEXT.

VIERTE, UMGEARBEITETE AUFLAGE

LEIPZIG
VERLAG VON VEIT & COMP.
1916

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Inhalt.

Erstes Kapitel.
Schiefe Parallelprojektion und axonometrische Projektion.

Allgemeines.

			Seite
1.	2.	Schiefe Parallelprojektion, Anschaulichkeit der Bilder	1
	3.	Einzige Bildebene, die Horizontalebene als Hilfsebene. Beziehung des Objektes auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem; Koordinatenzug eines Punktes und seine Abbildung	3
	4.	Entwicklung des axonometrischen Bildes aus Grund- und Aufriß. Die Bestimmung des Umrisses bei Flächen	4
	5.	Axonometrische Skizze	5
	6.	Verschiedene Arten der axonometrischen Projektion; die schiefe Parallelprojektion und die (orthogonale) axonometrische Projektion im engeren Sinne	5
	7.	Satz von Pohlke	7
8.	9.	Konstruktive Bestimmung der Lage eines rechtwinklig-gleichschenkligen Achsenkreuzes gegenüber seinem Bilde	7

Das Verfahren der schiefen Projektion, wenn Bild- und Aufrißebene zusammenfallen.

	10.	Bestimmungsstücke der schiefen Projektion. Der Aufriß als Bildebene. Sehstrahlen, Verkürzungsverhältnis	11
11—13.		Darstellung der Punkte, Geraden und Ebenen	12
	14.	Affinität zwischen Bild und Grundrißbild einer ebenen Figur. Beispiele: Verbindungs- und Schnittelemente	14
	15.	Wahre Länge einer Strecke	16
16.	17.	Wahre Gestalt einer ebenen Figur	17
	18.	Lot auf eine Ebene	19
	19.	Senkrechter Abstand eines Punktes von einer Geraden	20
	20.	Winkel zweier Geraden	21
	21.	Kürzester Abstand zweier Geraden	22
	22.	Schattenkonstruktion	23

Anwendungen der schiefen Projektion.

23.	Ebenflächige Gebilde, Eigen- und Schlagschatten (sechsseitige Pyramide und regelmäßiges Zwölfflach)	24
24.	Der gerade Kreiszylinder und sein ebener Schnitt	25
25.	Der gerade Kreiskegel, Lichtgrenze und Schlagschatten	27
26.	Die Kugel, ihre Hauptschnitte, Lichtgrenze und Schlagschatten	29
27.	Das Ellipsoid	31
28.	Das einschalige Hyperboloid	32
29.	Das zweischalige Hyperboloid	33
30.	Hilfssatz (Parabelkonstruktion)	34
31.	Das elliptische Paraboloid	34
32.	Das hyperbolische Paraboloid	35
33.	Rotationskörper, Eigen- und Schlagschatten	37

Seite

Das Verfahren der schiefen Projektion, wenn Bild- und Aufrißebene vertikal, aber gegeneinander geneigt sind.

34. Bestimmungsstücke, Sehstrahl, Bilder der Achsen 41
35. Bestimmung der Achsen aus ihren Bildern 43
36. Spezielle Fälle des Achsenkreuzes; die Normalen zur Bildebene werden parallel zur x-Achse abgebildet 43
37. Bild eines Tonnengewölbes mit Stichkappengewölbe aus Auf- und Seitenriß entwickelt; Eigen- und Schlagschatten 44
38. Methode zur Entwicklung des Bildes aus Grund- und Aufriß . 47
39. Wahre Länge einer Strecke 48
40. Drehung einer Ebene parallel zur Bildebene 49
41. Wahre Gestalt eines Dreieckes; Errichtung einer Normalen auf seiner Ebene 50
42. Umriß und Lichtgrenze eines Kegels 51
43. Umriß, Lichtgrenze und Schlagschatten einer Rotationsfläche . 53
44. Freitragende Wendeltreppe, Eigen- und Schlagschatten 56

Das Verfahren der orthogonalen axonometrischen Projektion.

45. Die Bestimmung der orthogonalen axonometrischen Projektion durch Bildebene und Koordinatensystem 58
46. Das Achsenkreuz und sein Bild. Verkürzungsverhältnisse. Verhältniszahlen. Spurendreieck 58
47. Bestimmung des Koordinatensystems aus dem Spurendreieck und der Verkürzungsverhältnisse aus den Richtungen der Achsenbilder 59
48. Bestimmung des Bildes vom Achsenkreuz aus den Verhältniszahlen 60
49. Natürlicher Maßstab. Maßstab des Bildes. Achsenmaßstäbe. Sinusmaßstab 61
50. Isometrische, dimetrische und trimetrische Projektion. Vergleichung der axonometrischen Projektionsarten in bezug auf ihre Bildwirkung 62
51. Punkt, Gerade und Ebene in axonometrischer Projektion . . . 63
52. Lot aus einem Punkte auf eine Gerade, wenn beide in einer Koordinatenebene liegen 64
53. Wahre Länge einer Strecke 64
54. Lot aus einem Punkte auf eine Ebene 65
55. Umlegung einer Ebene um ihre Bildspur in die Bildebene . . 66
56. Winkel zweier Geraden 67
57. Kristallformen (Rhombendodekaëder und Trapezoëder) 67
58. Die Kugel, Eigen- und Schlagschatten 69
59. Darstellung eines auf Π_1 stehenden Rotationskegels und eines liegenden Rotationszylinders mit Eigen- und Schlagschatten 70

Zweites Kapitel. Freie Perspektive.

Perspektive Darstellung von Ebene, Gerade und Punkt.

60. 61. Augpunkt, Bildebene und Distanz; reelle und virtuelle Bilder 73
62. Darstellung der Ebene; Spur-, Flucht- und Verschwindungslinie 74
63. Darstellung einer Geraden; Spur-, Flucht- und Verschwindungspunkt 75

Seite

64. Vereinigte Lage einer Geraden und einer Ebene; Parallelismus 76
65. Umlegung einer Ebene in die Bildebene 76
66. Die wahre Gestalt eines Dreiecks 77
67. 68. Die wahre Länge einer Strecke; Teilungspunkt 78
69. Darstellung des Punktes durch Bild und orthogonale Projektion oder Abstand 80
70. Schnittpunkt einer Geraden und einer Ebene 80
71. Die Parallele zu einer Geraden durch einen gegebenen Punkt 81
72. Die gemeinsame Sekante zweier Geraden durch einen gegebenen Punkt; eine Gerade durch zwei Punkte 81
73. In einer Ebene die Geraden von gegebenem Neigungswinkel zu ziehen; Winkel zweier Geraden 82
74. Die Normale zu einer Ebene und die Normalebene zu einer Geraden 83
75. Durch eine Gerade die Normalebene zu einer gegebenen Ebene zu legen 85
76. Die Geraden einer Ebene, die mit einer bestimmten Geraden außerhalb der Ebene einen gegebenen Winkel einschließen . 85
77. Die gemeinsame Normale zweier Geraden 87
78. Die Geraden, die mit zwei windschiefen Geraden bestimmte Winkel einschließen 87

Perspektive Darstellung von Körpern und Flächen.

79. Zusammenhang zwischen orthogonaler und Zentralprojektion; die Bildebene ist zugleich die Aufrißebene 89
80. Die Aufrißebene ist gegen die Bildebene geneigt, die Grundrißebene zu ihr senkrecht 90
81. Beide Projektionsebenen sind gegen die Bildebene geneigt . . 92
82. Das schiefe Prisma; sein Normalschnitt 92
83. Der schiefe Zylinder und sein Schnitt; seine Lichtgrenze . . 94
84. Der gerade Kreiskegel und seine Lichtgrenze 98
85. Die Kugel 100
86. Die Lichtgrenze auf der Kugel bei Zentralbeleuchtung . . . 101
87. Rotationsfläche mit zur Bildebene paralleler Achse 104
88. Rotationsfläche mit beliebig gerichteter Achse 106
89. 90. Der Umriß einer Fläche 2. Grades, von der die Bilder dreier konjugierter Durchmesser gegeben sind 106

Drittes Kapitel. Angewandte Perspektive.

Allgemeines.

91. Hauptaufgabe der angewandten Perspektive 109
92. Grundebene, vertikale Bildebene, Grundlinie, Auge, Verschwindungsebene, Hauptpunkt, Distanz, Horizont, Distanzkreis, Distanzpunkte. Lage des Objektes. Umgelegter Grund- und Aufriß. Umgelegtes Auge. Gerade und schräge Ansicht 110
93. Perspektive eines Punktes bei gerader oder schräger Ansicht 111
94. Abbildung von Geraden 113
95. Besondere Arten von Fluchtpunkten 114
96. Abbildung von Ebenen. Bestimmung der Fluchtlinien . . . 114
97—99. Streckenteilung 114
100. Die reduzierten Elemente 115

Seite

101. Abbildung eines horizontalen Kreises 117
102. Abbildung einer Ellipse mit vertikaler Achse 118
103. Schattenkonstruktion. Zentral- und Parallelbeleuchtung, Sonnenbeleuchtung 119
104. Schatten von Punkten und Geraden 120

Anwendungen der Perspektive.

105. Perspektive eines Säulenganges in gerader Ansicht 120
106. Perspektive eines Obelisken mit Unterbau in schräger Ansicht 124
107. Schräge Ansicht einer gewölbten Halle 127
108. Schräge Ansicht einer Nische 130
109. Perspektive eines runden Säulenstumpfes 133

Zentralkollineation räumlicher Figuren (Reliefperspektive).

110. 111. Grundgesetze der räumlichen Zentralkollineation. Zentrum, Kollineationsebene, Gegenebenen 136
112. 113. Reliefperspektive. Auge, Spurebene, Fluchtebene, Verschwindungsebene, Grundebene, Grundlinie, Hauptpunkt, Distanz, Tiefe des Reliefs 137
114. Reliefbild einer Geraden, eines Punktes, einer Ebene . . . 138
115. Beziehungen zwischen den Grund- und Aufrissen von Original und Reliefbild. Beispiel (Obelisk) 138
116. Affinität, Ähnlichkeit und Kongruenz räumlicher Figuren als Spezialfälle der Zentralkollineation des Raumes. Anwendung der Kollinearverwandtschaft auf die Theorie der Flächen 139

Viertes Kapitel. Beleuchtung von Flächen.

117—119. Allgemeines. Definition der Lichtgleichen 141
120. Der gerade Zylinder senkrecht zum Grundriß 144
121. Der gerade Zylinder in schiefer Lage 146
122. Der schiefe Zylinder, insbesondere der schiefe Kreiszylinder 148
123. Der Rotationskegel mit einer zum Grundriß normalen Achse 150
124. Der Rotationskegel in schiefer Lage 151
125. Der schiefe Kreiskegel 152
126. Die Kugel 154
127—129. Rotationsflächen; Kugel-, Kegel- und Zylinderverfahren . . 155
130. Die Ringfläche 159
131. Die Schraubenflächen; die Punkte ihrer Lichtgleichen auf den Schraubenlinien 160
132. Schraubenfläche mit kreisförmigem Meridianschnitt 163
133. Die Punkte der Lichtgleichen auf den Erzeugenden der Regelschraubenflächen 165
134. Die geschlossene, schiefe Regelschraubenfläche 167
135. 136. Das Ellipsoid 171
137. Die Hyperboloide 174
138. 139. Die Paraboloide 177
140. Die Regelflächen 182
141. 142. Das Plücker'sche Konoid 184
143. Verschiedene Flächen 187

Literaturnachweise und historische Anmerkungen. . . . 189

ERSTES KAPITEL.

Schiefe Parallelprojektion und axonometrische Projektion.

Allgemeines.

1. Das Grund- und Aufrißverfahren, das im I. Bande eine ausführliche Behandlung erfahren und mannigfache Anwendungen gefunden hat, ist bei der Darstellung räumlicher Gebilde zumeist in Gebrauch. Es sind hierfür insbesondere zwei Gründe maßgebend; erstens zeichnen sich die dabei angewendeten Konstruktionen durch besondere Einfachheit aus, zweitens sind die wahren Maßverhältnisse von Strecken, Winkeln oder einzelnen Teilen des räumlichen Gebildes leicht aus seinen beiden Rissen zu entnehmen.

Der Darstellung eines Gebildes durch orthogonale Projektion stellt sich seine Darstellung durch schiefe Parallelprojektion[1]) an die Seite. Entbehrt diese Darstellungsweise vielfach jener Einfachheit der Konstruktion, die der orthogonalen Projektion eigen ist, so bietet sie als Ersatz dafür ein Bild des Gegenstandes, das sich durch außerordentlich große Anschaulichkeit auszeichnet. In dieser Richtung wird sie freilich noch von dem perspektiven Bild, dessen gesetzmäßige Entwickelung im folgenden Kapitel behandelt wird, übertroffen; dieses gibt unseren Gesichtseindruck von dem Gegenstand am vollkommensten wieder und gleicht hierin ganz dem durch eine photographische Aufnahme hergestellten Bilde. Bei Gegenständen von geringer räumlicher Ausdehnung steht jedoch das durch schiefe Parallelprojektion erzielte Bild dem perspektiven Bild nur wenig an Anschaulichkeit nach; es ist indessen leichter zu entwerfen und gestattet eine einfachere Entnahme der Maße des Gegenstandes aus seiner Zeichnung.

Die schiefe Parallelprojektion eignet sich ganz besonders zur Darstellung solcher Objekte, bei deren Gestalt und Gliederung drei zueinander senkrechte Richtungen hervortreten. So bildet sie das bequemste Verfahren beim Skizzieren von Kristallformen, von architektonischen Gegenständen, Maschinenelementen, wissenschaft-

lichen und technischen Apparaten, weil die Kanten dieser Objekte vorzugsweise nach drei zueinander senkrechten Richtungen (nach der Breite, Höhe und Tiefe) verlaufen. Man findet sie darum in wissenschaftlichen und technischen Werken häufig für die erläuternden Textfiguren angewandt, und so ist sie auch im I. Bande dieses Buches bereits mehrfach stillschweigend benutzt worden, um räumliche Gebilde in Ermangelung von Modellen durch die Zeichnung der Anschauung näher zu bringen.

2. Die Hauptschwierigkeit, die richtige Vorstellung von einem Gegenstand aus seinem Grund- und Aufriß zu erlangen, besteht darin, daß für die beiden Risse verschiedene Projektionsrichtungen benutzt werden, und daß die Ebenen der Risse in Wirklichkeit aufeinander senkrecht stehen, in der Darstellung durch die Zeichnung aber zusammenfallen. Man hat es also mit zwei ganz verschiedenen Bildern (Projektionen) des Gegenstandes zu tun, von denen aber keines für sich allein genügt, eine richtige Vorstellung von ihm zu erwecken. Um diese zu gewinnen muß erst ein Denkprozeß stattfinden, der beide Risse zu einer einzigen, Gestalt und Lage des Objekts umfassenden Vorstellung kombiniert. Dieser Denkprozeß deckt sich jedoch keineswegs mit dem uns so geläufigen, durch den die beiden Netzhautbilder eines Gegenstandes zu einer Gesamtvorstellung von ihm verschmelzen. Denn einerseits befinden sich die beiden Netzhautbilder in einer, wie man wohl kurz sagen darf, natürlichen relativen Lage zueinander, was bei Grund- und Aufriß durchaus nicht der Fall ist, und andererseits schließen die projizierenden Strahlen, welche die beiden Netzhautbilder eines Punktes liefern, nur einen sehr kleinen Winkel miteinander ein.

Bekanntlich vermittelt auch das Sehen mit einem Auge eine räumliche Vorstellung von den Dingen, wobei freilich die Lichtverteilung und die Schärfe der einzelnen Teile des im Auge erzeugten Bildes eine wesentliche Rolle spielen. Gleichwohl sind Irrtümer hierbei nicht selten. Solche Irrtümer sind jedoch ausgeschlossen, sobald der Gegenstand sich über einer horizontalen Fläche erhebt, und wir irgendwie in den Stand gesetzt sind die relative Lage seiner einzelnen Teile (Ecken, Kanten usw.) ihr gegenüber zu beurteilen. Von diesem Umstande macht auch die schiefe Parallelprojektion Gebrauch indem sie eine Horizontalebene zu Hilfe nimmt und das räumliche Gebilde in seinen einzelnen Teilen zu ihr in Beziehung setzt. Es geschieht dieses dadurch, daß von den Punkten des Gebildes Lote auf die Horizontalebene gefällt und deren Fußpunkte markiert, werden. Bezeichnet man also mit P' den senkrecht unter dem Raum-

punkt P liegenden Punkt der Horizontalebene und zeichnet von beiden die schiefe Parallelprojektion P_s' und P_s, so ist die Lage des Raumpunktes völlig bestimmt, wenn die Projektionsrichtung und die Lage der Horizontalebene gegen die Bildebene bekannt sind. Es wird indessen nicht nötig sein zu jedem Raumpunkt den senkrecht darunter liegenden Punkt der Horizontalebene anzugeben, vielmehr wird es genügen, dieses nur für eine Anzahl Punkte zu tun; die Lage der übrigen geht dann aus ihren Verbindungslinien mit diesen hervor.

3. Die schiefe Parallelprojektion bedient sich, wie schon bemerkt, nur einer einzigen Bildebene; sie muß aber neben den Bildern der Punkte und Linien im Raume auch die Bilder ihrer orthogonalen Projektionen auf eine Horizontalebene angeben. Doch genügt es zumeist die Bilder der orthogonalen Projektionen nur für eine kleine Anzahl von Punkten und Linien zu zeichnen. Reicht sonach eine einzige Horizontalebene aus, um ein räumliches Gebilde mittels seiner Lagebeziehung zu ihr in schiefer Parallelprojektion darzustellen, so ist es doch von Vorteil drei zueinander rechtwinklige Achsen zugrunde zu legen und ihre Lage gegen das Gebilde bei der Konstruktion seiner Parallelprojektion zu verwerten.

Die drei rechtwinkligen Achsen, auf die wir den abzubildenden Gegenstand beziehen, werden Koordinatenachsen genannt und mit x, y, z bezeichnet. Je zwei bestimmen die drei zueinander senkrechten Koordinatenebenen, nämlich $\Pi_1 = xy$, $\Pi_2 = xz$, $\Pi_3 = yz$, denen wir wie früher beziehentlich die Namen Grundriß-, Aufriß- und Seitenrißebene beilegen werden. Der Achsenschnittpunkt heißt Anfangspunkt oder Ursprung O. Unter den Koordinaten x, y, z eines Punktes versteht man seine parallel zu den gleichbenannten Achsen genommenen und mit bestimmten Vorzeichen versehenen Abstände von den Koordinatenebenen. Fügt man, vom Ursprung O beginnend, die Koordinaten eines Punktes in irgend einer Reihenfolge und in den gehörigen Richtungen aneinander, so entsteht ein Koordinatenzug, der in dem betreffenden Punkte selbst endigt.

Ist nun die Parallelprojektion der drei Koordinatenachsen gegeben und für jede der Maßstab, d. h. das Verhältnis einer auf ihr abgetragenen Bildstrecke zur wahren Länge dieser Strecke, bekannt, so kann nach den Grundgesetzen der Parallelprojektion — wonach parallele Strecken parallele Bilder besitzen, die in dem gleichen Verhältnis wie die Strecken selbst stehen — jeder Koordinatenzug und folglich jeder durch seine Koordinaten gegebene Punkt abgebildet werden. Das Verfahren, die Parallelprojektion

einer Raumfigur durch die der Koordinaten ihrer Punkte zu bestimmen, heißt *Axonometrie.*[2])

4. Die axonometrische Projektion wird nach Annahme eines festen Koordinatensystems, auf das man den abzubildenden Gegenstand bezieht, durch die Stellung der Bildebene zu diesem und die Richtung der projizierenden Strahlen bestimmt. Die Wahl des Koordinatensystems ist ohne Wirkung auf das Bild, wenn man die Projektionsrichtung und die Lage des Gegenstandes gegenüber der Bildebene festhält. Man wird das Koordinatensystem deshalb so annehmen dürfen, daß seine Lage bezüglich des darzustellenden Gegenstandes so einfach wie nur möglich ist; dann werden sein Grund-, Auf- und Seitenriß, d. h. seine orthogonalen Projektionen auf die Koordinatenebenen, eine möglichst einfache Form annehmen.

Liegen zwei Risse eines Gegenstandes gezeichnet vor, so kann man aus ihnen die Koordinaten seiner einzelnen Punkte direkt abgreifen und sonach sein axonometrisches Bild, wie schon vorher dargetan, entwerfen. Hierzu ist kaum etwas weiteres hinzuzufügen, soweit es sich um eine punktweise Übertragung des Bildes aus den Rissen handelt. Auch die Lichtgrenze, sowie ihr Schlagschatten können übertragen werden, wenn sie in den Rissen gezeichnet vorliegen. Dagegen erfordern die bei dem axonometrischen Bilde in Erscheinung tretenden krummlinigen Umrisse eine besondere Konstruktion. Es hat das etwa in der folgenden Weise zu geschehen. Man zeichne in den vorliegenden Grund- und Aufriß des Gegenstandes die Risse eines Sehstrahls s ein, der zur Projektionsrichtung parallel ist, und bestimme mit ihrer Hilfe Grund- und Aufriß des zu dieser Sehstrahlrichtung gehörigen Umrisses, worauf man aus beiden das axonometrische Bild des Umrisses durch Übertragen gewinnt.

Bei der Konstruktion des geradlinigen Umrisses von Zylinder und Kegel wird man auch leicht direkt ans Ziel gelangen, nachdem man das Bild der Basiskurve und das Bild einer Mantellinie des Zylinders oder der Spitze des Kegels gezeichnet hat. Bei den Regelflächen (Regelschraubenflächen usw.) wird sich der Umriß unmittelbar als Hüllkurve der Bilder seiner Erzeugenden ergeben. Bei den Rotations- und allgemeinen Schraubenflächen wird man jedoch die in Kap. VIII und X Bd. I dargelegten Verfahren zu verwenden haben, um zunächst Grund- und Aufriß des zu der vorgeschriebenen Sehstrahlrichtung gehörigen Umrisses zu zeichnen. Die daselbst durchgeführten Methoden und Konstruktionen zur Bestimmung der Licht-

grenze sind ohne weiteres hier zur Anwendung zu bringen; es tritt nur an Stelle des Lichtstrahles der Sehstrahl und somit an Stelle der Lichtgrenze der zur Sehstrahlrichtung gehörige Umriß.

5. Kann man somit das Entwerfen des axonometrischen Bildes eines Gegenstandes mit Hilfe seiner Risse als erledigt ansehen, insofern ja das punktweise Übertragen keinerlei Schwierigkeiten bietet, so verändert sich die Sachlage durchaus, sobald es sich um die konstruktive Entwickelung des Bildes aus bekannten Daten und Eigenschaften des abzubildenden Gegenstandes handelt. Gerade in dieser Form liegt die Aufgabe oft vor, wenn von einem Objekt ein axonometrisches Bild skizziert werden soll; gewöhnlich wird man dann nicht erst vorher seinen Grund- und Aufriß zeichnen. Es werden deshalb im folgenden in erster Linie solche Konstruktionen zu behandeln sein, die unmittelbar in der axonometrischen Figur selbst vorgenommen werden. Diese Konstruktionen gestalten sich, wie wir sehen werden, wesentlich verschieden je nach der Lage der Bildebene und der Projektionsrichtung gegenüber den Koordinatenachsen.

6. Das allgemeinste axonometrische Bild erhält man, wenn man die Bildebene gegen die Projektionsrichtung geneigt annimmt, und beide gegen das feste Koordinatensystem eine beliebige geneigte Lage besitzen. Will man die axonometrische Projektion in dieser allgemeinen Form anwenden, so benutzt man dabei am besten die vorher besprochene Übertragung mittels Grund- und Aufriß, d. h. mittels der orthogonalen Projektionen auf die xy-Ebene und die xz-Ebene, da die direkten Konstruktionen in der axonometrischen Figur zu kompliziert werden. Man erreicht indes den Zweck, welcher der axonometrischen Abbildung zugrunde liegt und in der Erzielung eines Bildes von größerer Anschaulichkeit besteht, schon durch speziellere Annahmen über die gegenseitige Lage von Achsensystem, Bildebene und Projektionsrichtung; unter ihnen wird man natürlich denjenigen den Vorzug geben, welche die möglichste Einfachheit der Konstruktion gewähren und zugleich eine möglichst plastische Wirkung des Bildes erzielen. Es ist deshalb bei ihrer Auswahl im einzelnen Falle darauf zu achten, daß keine der wichtigeren Kanten und Seitenflächen des darzustellenden Gegenstandes als bloßer Punkt, bzw. als Gerade erscheine. Demgemäß finden — abgesehen von der schon erwähnten allgemeinen Lage — vornehmlich folgende drei speziellere Annahmen eine ausgedehntere Anwendung.

α) Man wählt die Bildebene parallel zu einer Koordinatenebene — der Aufriß- oder xz-Ebene — oder läßt sie mit ihr zusammenfallen und führt eine schiefe Projektion

aus. Dies bietet unter anderem den Vorteil, daß zwei Koordinaten eines jeden Punktes sich in ihrer wahren Länge und Richtung abbilden. Die dritte Koordinate wird in einer schrägen Richtung und meist in einem bestimmten Verhältnis verkürzt dargestellt. — Das nach diesem Verfahren entworfene Bild eines Objektes wirkt besonders anschaulich, wenn man es bei größerer Entfernung annähernd in der Richtung der projizierenden Strahlen betrachtet.

β) Man legt die Bildebene durch die vertikale z-Achse, aber gegen die x- und y-Achse geneigt, und führt dann eine schiefe Projektion aus. Hier behält nur noch die z-Koordinate ihre Richtung und Länge im Bilde bei, während die Bilder der beiden andern Koordinaten irgendwelche Winkel mit ihr einschließen und dabei jede für sich eine bestimmte Verkürzung oder Verlängerung erfahren. Dieses Verfahren ist in seinen Konstruktionen weniger einfach als das vorhergehende; es gestattet jedoch eine günstigere Wahl der Projektionsrichtung gegen die Bildebene. Man wählt sie zumeist so, daß eine zu ihr parallele Ebene durch die z-Achse auf der Bildebene senkrecht steht; dann geben die so erzielten Bilder bei gerader Gegenüberstellung des Beschauers eine anschauliche Wirkung (mit Obersicht). — Auch wenn man diese besondere Annahme über die Projektionsrichtung nicht macht, pflegt man bei ihrer Wahl nicht weit von jener abzuweichen.

γ) Man nimmt die Bildebene gegen alle drei Koordinatenachsen geneigt an und führt eine senkrechte Projektion aus. Auch hier gilt das gleiche für die Stellung des Beschauers gegenüber dem Bild wie bei β).

Noch ist hervorzuheben, daß in unserer Vorstellung die räumlichen Gegenstände zur Vertikalrichtung meist in einer ausgeprägten Beziehung stehen. Dieses auch im axonometrischen Bilde hervortreten zu lassen und dadurch die anschauliche Wirkung zu erzielen, weil sie der gewohnten Vorstellung entspricht, sind die unter α) und β) genannten Verfahren besonders geeignet, wobei man sich Bildebene und z-Achse vertikal gestellt denkt.

Die beiden unter α) und β) angeführten Darstellungsmethoden bezeichnet man gewöhnlich schlechthin als schiefe Projektion, die unter α) im besonderen auch als Kavalierperspektive —, die unter γ) angeführte als orthogonale Axonometrie oder auch kurz als axonometrische Projektion. Wir werden in der Folge beide Namen ebenfalls in dieser engeren Bedeutung gebrauchen. Ehe wir aber diese Methoden einzeln besprechen, müssen wir dem Fundamentalsatz der Axonometrie, der die Grundlage für die

allgemeinste axonometrische Projektion bildet, unsere Aufmerksamkeit zuwenden.

7. Trägt man vom Ursprung O aus auf jede der drei Koordinatenachsen x, y, z in positiver Richtung eine und dieselbe Strecke $k = OA = OB = OC$ ab, so entsteht eine Figur $OABC$, die wir als rechtwinklig-gleichschenkliges Achsenkreuz $\mathfrak{K}$ bezeichnen wollen. Für die Abbildung eines solchen Achsenkreuzes durch schiefe Projektion gilt der von Pohlke aufgefundene und nach ihm benannte Satz[2]):

Irgend drei in einer Ebene Π aus einem Punkte O_s (in beliebiger Richtung und Länge) gezogene Strecken O_sA_s, O_sB_s, O_sC_s können stets als schiefe Parallelprojektion eines rechtwinklig-gleichschenkligen Achsenkreuzes $OABC$ oder $\mathfrak{K}$ angesehen werden, dessen Schenkellänge dadurch bestimmt ist.

Man kann dem Satz eine noch allgemeinere Fassung geben, indem man die Annahme, daß die Strecken OA, OB, OC gleich lang und zueinander rechtwinklig sein sollen, fallen läßt:

Durch passende Wahl von Projektionsrichtung und Bildebene kann man es stets erreichen, daß das Bild $O_sA_sB_sC_s$ eines gegebenen Tetraëders $OABC$ einem gegebenen Viereck $O_0A_0B_0C_0$ ähnlich wird.

Einen Beweis für den Pohlkeschen Satz, sowie die konstruktive Ermittelung der gegenseitigen Lage von Achsenkreuz und seinem Bild, gibt uns die in 214 Bd. III behandelte Aufgabe. Daselbst wird allerdings von gewissen Eigenschaften der Flächen 2. Grades und ihrer Umrisse Gebrauch gemacht. Es mag deshalb hier die Bestimmung der Lage des Achsenkreuzes, wenn sein Bild gegeben ist, auf einem anderen Wege durchgeführt werden, der im wesentlichen auf einer Anwendung der in 108 Bd. I behandelten Aufgabe beruht. Dort galt es die Lage eines Dreiecks ABC zu bestimmen, dessen Aufriß $A''B''C''$ bekannt war und das einem gegebenen Dreieck ähnlich sein sollte.

8. Ist die Lage des Achsenkreuzes $\mathfrak{K}$ gegen die Bildebene sowie die Richtung der Projektionsstrahlen bekannt, so ist damit auch sein Bild $\mathfrak{K}_s$ bestimmt. Schneidet man nun die Projektionsstrahlen mit einer zu ihnen senkrechten Ebene N, so erhält man eine Figur $\mathfrak{K}_\nu$ oder $O_\nu A_\nu B_\nu O_\nu$, die sowohl als Orthogonalprojektion von $\mathfrak{K}$ als auch von $\mathfrak{K}_s$ erscheint. Hierbei sind die Figuren $\mathfrak{K}_\nu$ und $\mathfrak{K}_s$ affin, die Spur n_1 der Ebene N in der Bildebene ist die Affinitätsachse. Zieht man durch O_s die Geraden O_sX_s und O_sY_s parallel und senkrecht zu n_1 (X_s, Y_s auf A_sB_s), sowie durch O_ν die Geraden $O_\nu X_\nu$ und $O_\nu Y_\nu$

parallel und senkrecht zu n_1 ($X_\nu Y_\nu$ auf $A_\nu B_\nu$), so sind $O_s X_s Y_s$ und $O_\nu X_\nu Y_\nu$ entsprechende rechtwinklige Dreiecke in den affinen Figuren $\mathfrak{K}_s$ und $\mathfrak{K}_{\nu s}$; dabei gilt die Beziehung $O_\nu X_\nu = O_s X_s$.

Um die Lage der projizierenden Strahlen gegen das Achsenkreuz $\mathfrak{K}$ zu finden, denken wir uns die projizierenden Ebenen durch OC und AB gelegt; sie schneiden sich in einem projizierenden Strahl $s = JK$ ($J = s \times OC$, $K = s \times AB$). Die Punkte J und K aber ergeben sich aus den Relationen: $JO : CO = J_s O_s : C_s O_s$ und $KA : BA = K_s A_s : B_s A_s$, wobei $J_s = K_s = O_s C_s \times A_s B_s$ ist. Hiernach bestimmt sich dann auch die orthogonale Projektion $\mathfrak{K}_\nu$ von $\mathfrak{K}$, und gemäß 108 Bd. I läßt sich nun die Lage von $\mathfrak{K}_\nu$ — und damit auch von $\mathfrak{K}$ — gegenüber der von $\mathfrak{K}_s$ angeben. Damit wäre alsdann die Aufgabe gelöst: Das Achsenkreuz $\mathfrak{K}$ in eine solche Lage gegen die Bildebene zu bringen, daß seine schiefe Parallelprojektion die vorgegebene Gestalt $\mathfrak{K}_s$ annimmt; zugleich wäre der Satz von Pohlke bewiesen.

Der hier geschilderten Konstruktion steht zunächst nur das eine entgegen, daß man nicht die wahre Länge der Strecken $OA = OB = OC$ des Achsenkreuzes $\mathfrak{K}$ kennt. Man gehe daher zunächst von einem Achsenkreuz $\mathfrak{K}_1$ aus, dessen Kantenlänge $OA_1 = OB_1 = OC_1$ man irgendwie wählt. Hierauf bestimme man J_1 und K_1 gemäß $J_1 O : C_1 O = J_s O_s : C_s O_s$ und $K_1 A_1 : B_1 A_1 = K_s A_s : B_s A_s$; dann ist $J_1 K_1 = s$ die gesuchte Projektionsrichtung. Sie liefert die Orthogonalprojektion $\mathfrak{K}_1''$ von $\mathfrak{K}_1$ auf eine Ebene N, die man senkrecht zu s gewählt hat.

Nun ist $\mathfrak{K}_1''$ ähnlich zu $\mathfrak{K}_\nu$; da aber $\mathfrak{K}_\nu$ und $\mathfrak{K}_s$ affin sind, so sind auch $\mathfrak{K}_1''$ und $\mathfrak{K}_s$ affin in weiterem Sinn. Wie dem rechtwinkligen Dreieck $O_s X_s Y_s$ der Figur $\mathfrak{K}_s$ das rechtwinklige Dreieck $O_\nu X_\nu Y_\nu$ der affinen Figur $\mathfrak{K}_\nu$ entspricht, so entspricht ihm das rechtwinklige Dreieck $O'' X_1'' Y_1''$ der affinen Figur $\mathfrak{K}_1''$, wenn $O' A_1'' B_1'' C_1'' X_1'' Y_1''$ und $O_\nu A_\nu B_\nu C_\nu X_\nu Y_\nu$ ähnliche Figuren sind. Die letztere dieser beiden Figuren erhält man aus der ersteren, indem man sie ähnlich vergrößert oder verkleinert im Verhältnis $O'' X_1'' : O_s X_s$. Jetzt findet man die Lage der Ebene N gegen die Bildebene, indem man ihre Spur n_1 parallel zu $O_s X_s$ zieht und ihren Neigungswinkel ε derart wählt, daß $O_s Y_s \cdot \cos\varepsilon = O_\nu Y_\nu$ wird. Die orthogonale Projektion von $\mathfrak{K}_s$ auf N ist nun in der Tat kongruent mit $\mathfrak{K}_\nu$; sie erscheint zugleich als orthogonale Projektion von $\mathfrak{K}$ auf N, wodurch sich die räumliche Lage von $\mathfrak{K}$ ergibt.

9. Die Konstruktion führen wir in folgender Weise aus. $O A_1 B_1$ sei ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck parallel zur Zeichenebene mit der Orthogonalprojektion $O' A_1^0 B_1^0$ (Fig. 1a). Auf $A_1 B_1$ bestimmen wir den Punkt K_1 gemäß der Proportion $A_1^0 K_1' : A_1^0 B_1^0$

$= A_s K_s : A_s B_s$; sodann drehen wir das Dreieck $O A_1 B_1$ um 90^0 um die Gerade $O K_1$, so daß es sich auf die Zeichenebene als Ge-

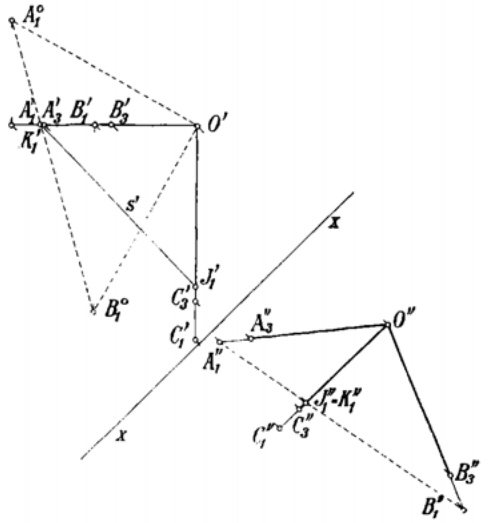

Fig. 1a.

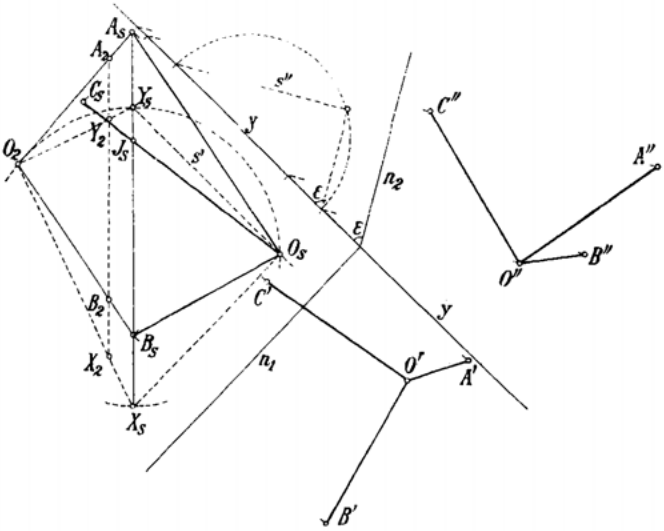

Fig. 1b.

rade $O' A_1' B_1'$ projiziert ($A_1^0 A_1' \parallel B_1^0 B_1' \perp O' K_1'$). Jetzt wird die dritte Achse $O C_1$ zur Zeichenebene parallel und projiziert sich senkrecht zu $O' K_1'$ und in wahrer Größe ($O' C_1' = O' A_1^0$); auf ihr liegt der Punkt J_1 ($O' J_1' : O' C_1' = O_s J_s : O_s C_s$). Der projizierende Strahl $s = J_1 K_1$

ist nun zur Zeichenebene, die als Grundrißebene gedacht ist, parallel; eine zu s senkrechte Ebene nehmen wir als Aufrißebene ($x \perp s'$) und zeichnen den Aufriß $O'' A_1'' B_1'' C_1'' J_1'' = K_1''$ ($O'' K_1'' C_1'' \parallel x$, die Abstände der Punkte A_1'' und B_1'' von $O'' K_1''$ sind gleich den Abständen der Punkte A_1^0, B_1^0 von $O' K_1'$).

Um weiter entsprechende rechte Winkel in den affinen Figuren $\mathfrak{R}_s$ und $\mathfrak{R}_1''$ zu erhalten, verfahren wir nach 12 Bd. I so. Wir zeichnen ein zu $O'' A_1'' B_1''$ ähnliches Dreieck $O_2 A_s B_s$, dessen Seite $A_s B_s$ mit der gleichbenannten Seite des Dreiecks $O_s A_s B_s$ zusammenfällt (Fig. 1 b). Der Kreis durch O_2 und O_s, dessen Mittelpunkt auf $A_s B_s$ gelegen ist, schneidet aus dieser Geraden zwei Punkte X_s und Y_s aus. Die Spur n_1 der Ebene N ist nun parallel zu $O_s X_s$ zu ziehen und ihr Neigungswinkel ε gegen die Bildebene ist so zu bestimmen, daß die Orthogonalprojektion des Dreiecks $O_s X_s Y_s$ auf die Ebene N ein dem Dreieck $O_2 X_s Y_s$ ähnliches Dreieck, also ein zu $O_2 X_2 Y_2$ kongruentes Dreieck liefert ($O_2 X_2 = O_s X_s$, $X_2 Y_2 A_2 B_2 \parallel X_s Y_s A_s B_s$, $O_2 Y_2 = O_s Y_s \cdot \cos \varepsilon$).

Zur Fixierung der Lage des Achsenkreuzes $\mathfrak{R}$ gegen sein Bild $\mathfrak{R}_s$ sind in Figur 1 b Grund- und Aufriß von $\mathfrak{R}$ angegeben, wobei die Bildebene zugleich als Grundrißebene benutzt und die Aufrißebene senkrecht zu n_1 gewählt ist ($y \perp n_1$, $\angle n_2 y = \varepsilon$, $\cos \varepsilon = O_2 Y_2 : O_s Y_s$). Da die Punkte $O A B C$ auf den von $O_s A_s B_s C_s$ auf N gefällten Loten liegen (die Grundrisse dieser Lote sind senkrecht zu n_1, ihre Aufrisse senkrecht zu n_2), braucht man nur noch die Abstände der Punkte $O'' A'' B'' C''$ von n_2 zu bestimmen. Diese würden unmittelbar mit den Abständen der Punkte $O' A_1' B_1' C_1'$ von x in Figur 1 a übereinstimmen, wenn das Achsenkrenz $\mathfrak{R}_1$, das den Ausgangspunkt bildete, die gleiche Größe wie $\mathfrak{R}$ hätte. Das ist jedoch nicht der Fall; vielmehr muß $\mathfrak{R}$ noch ähnlich verkleinert werden. Das ist in Figur 1 a geschehen, indem $O'' A_3'' = O_2 A_2$, $O'' B''_3 = O_2 B_2$ gemacht wurde; man erhält dadurch die Projektionen $O'' A_3'' B_3'' C_3''$ und $O' A_3' B_3' C_3'$. Die Abstände der letzteren Punkte von x sind nun gleich den Abständen der Punkte $O'' A'' B'' C''$ von n_2, wodurch sich dann auch $O' A' B' C'$ ergibt.

Zum Schluß sei noch folgendes bemerkt. Die Punkte X_s und Y_s werden aus $A_s B_s$ durch einen Kreis ausgeschnitten; es ist jedoch nicht gleichgültig, welchen der beiden Punkte wir mit X_s bezeichnen, da wir n_1 zu $O_s X_s$ parallel gezogen haben. Es ist vielmehr darauf zu achten, daß in dem rechtwinkligen Dreieck $O_2 X_2 Y_2$, dessen Hypotenuse zu $A_s B_s$ parallel ist, die Kathete $O_2 X_2$ kleiner als die Strecke $O_s Y_s$ sein muß, da erstere gleich der Orthogonalprojektion $O_\nu Y_\nu$ der

letzteren ist. Diese Bedingung entscheidet aber darüber, welchem der beiden Schnittpunkte des Kreises mit der Geraden $A_s B_s$ man die Bezeichnung X_s beizulegen hat. Außerdem ist klar, daß es zwei zur Zeichenebene symmetrische Lösungen gibt, je nachdem in Figur 1b die Aufrißebene um y aufwärts oder abwärts um 90^0 gedreht wird.

Das Verfahren der schiefen Projektion, wenn Bild- und Aufrißebene zusammenfallen.

10. Um eine räumliche Figur in schiefer Projektion darzustellen und zwar so, daß durch das Bild umgekehrt die Originalfigur bestimmt wird, denken wir uns das Original mit der Grundrißebene Π_1 verbunden und auf diese durch senkrechte Projektion bezogen. Das Ganze, die Raumfigur mit ihrem Grundriß, wird der schiefen Projektion unterworfen. Die Bildebene lassen wir mit der Aufrißebene Π_2 zusammenfallen. Den Grundriß denken wir uns durch seine Umlegung in die Bildebene Π_2 gegeben. Die Geraden, welche auf den Ebenen Π_1, Π_2 und Π_3 bzw. senkrecht stehen, bezeichnen wir, wie früher, als erste, zweite und dritte projizierende Strahlen; zum Unterschiede von ihnen nennen wir die schief projizierenden Strahlen kurz Sehstrahlen.

Wählen wir in der vertikalen Bildebene Π_2 den Ursprung O, ziehen die positive x-Achse horizontal nach rechts, die positive z-Achse vertikal nach oben und die positive y-Achse nach vorn, so ist die Lage des Koordinatensystems gegen die Bildebene bestimmt. Die Richtung der Sehstrahlen legen wir fest, indem wir von einem gegebenen Punkte der Grundrißebene Π_1 den Bildpunkt angeben. Ersteren wählen wir etwa auf der y-Achse und markieren ihn (umgelegt um x) als O_1; letzteren nehmen wir als O_2 derart an, daß das Bild $y_s = O O_2$ der y-Achse gegen x und z geneigt ist (Fig. 2). O_1 und O_2 sind die Spurpunkte eines Sehstrahles o in Π_1 und Π_2. Es sei noch O_2' der Grundriß des Punktes O_2 und O_1^0 die Umlegung von O_1 um y_s; dann ist $o' = O_1 O_2'$ der Grundriß des Sehstrahles o, ferner $o'' = O O_2$ sein Aufriß, $o_s' = O_2 O_2'$ das Bild des Grundrisses, $o^0 = O_2 O_1^0$ die Umlegung um o'' und folglich

$$\omega = \angle\, O_1^0 O_2 O$$

die Neigung der Sehstrahlen gegen die Bildebene. Die Größe

$$\operatorname{cotg} \omega = \frac{O O_2}{O O_1}$$

gibt für jede Normale zur Bildebene (y-Koordinate) das Verhältnis

ihres Bildes zu ihrer wahren Länge an. Meist wird $\omega > 45^0$ angenommen; dann ist $\operatorname{cotg} \omega < 1$ und heißt das Verkürzungsverhältnis. Das Dreieck $OO_1 O_2$ oder irgend ein zu ihm ähnliches und ähnlich gelegenes heißt (nach v. Peschka) ein Projektionsdreieck[3]). Die schiefe Projektion ist bestimmt durch Angabe der Projektionsachse x und irgend eines Projektionsdreieckes (z. B. $OO_1 O_2$).

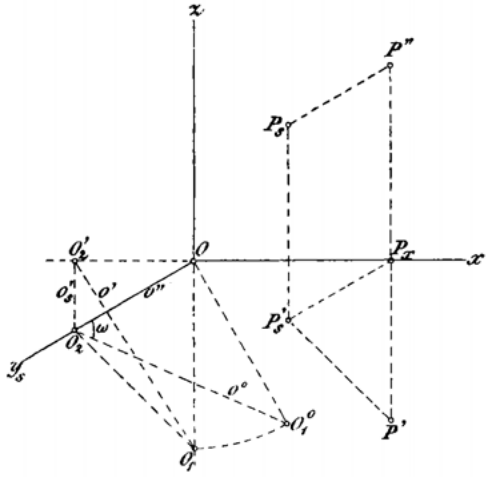

Fig. 2.

Das Verkürzungsverhältnis $\operatorname{cotg} \omega$ wählt man gern gleich einer rationalen Zahl, etwa $^1/_2$, $^1/_3$, $^2/_3$, usw., um aus der Zeichnung eines Objektes leicht die Maße seiner in der y-Richtung verlaufenden Kanten entnehmen zu können. Außerdem sucht man die Konstruktion durch passende Wahl des Projektionsdreieckes zu vereinfachen, dessen eine Seite (OO_1) stets rechtwinklig zur x-Achse liegt. Sehr bequeme Konstruktionen ergeben sich, wenn man in dem Dreieck OO_1O_2 die bei O, O_1, O_2 liegenden Winkel bzw. gleich 60^0, 30^0, 90^0 macht; dabei ist $\operatorname{cotg} \omega = \frac{1}{2}$. — Die unter den Namen „Kavalierperspektive" und „Vogel- oder Militärperspektive" bekannten Arten der schiefen Projektion benutzen meist die ebenfalls bequeme Annahme: $\omega = 45^0$, $\operatorname{cotg} \omega = 1$, $\angle O_1 O O_2 = 45^0$. Bei ersterer denkt man sich die Bildebene vertikal, bei letzterer horizontal; man trägt also an die Aufrisse bzw. Grundrisse der darzustellenden Punkte ihre bezüglichen Tafelabstände selbst in vorgeschriebener Richtung an[4]).

Darstellung der Punkte, Geraden und Ebenen in schiefer Projektion (vgl. 25—45 Bd. I).

11. Ein Punkt P wird durch sein Bild P_s und das Bild P_s' seines Grundrisses P' bestimmt; die Punkte P_s und P_s' liegen in einer zur x-Achse senkrechten (oder zur z-Achse parallelen) Geraden. In der Tat bestimmen die Lote PP' und PP'' auf Grund- und Aufrißebene ein Rechteck $PP'P_xP''$, dessen Seiten PP' und $P''P_x$ zu z parallel und dessen Seiten PP''

und $P' P_x$ zu y parallel sind. Demnach wird das Bild $P_s P_s'$ zu PP' parallel und gleich lang, während die Bilder $P_s P''$ und $P_s' P_x$ zu y_s parallel werden und zu $PP'' = P' P_x$ in dem gegebenen Verkürzungsverhältnis stehen. Sind P', P'' und damit P_x gegeben, so ergibt sich P_s' als Schnittpunkt zweier durch P' bzw. P_x zu $O_1 O_2$ bzw. $O O_2 = y_s$ gezogenen Parallelen, worauf man P_s senkrecht über P_s' im Abstande $P'' P_x$ (oder als vierte Ecke des Parallelogramms mit den Seiten $P'' P_x$ und $P_x P_s'$) findet. Sind P_s', P_s bekannt, so ziehe man durch beide die Parallelen zu y_s und durch P_x die Vertikale, auf der dann P'' und P' liegen ($P_s' P' \parallel O_2 O_1$) (Fig. 2).

12. Eine Gerade g wird durch ihr Bild g_s und das Bild g_s' ihres Grundrisses g' bestimmt; die Geraden g_s und g_s' können willkürlich angenommen werden (bis auf eine Ausnahme, siehe unten). Die Geraden g und g' liegen in einer Vertikalebene, sonach sind g_s und g_s' die Bilder zweier in einer Vertikalebene liegenden Geraden. Der Schnittpunkt $G_{1s} = g_s \times g_s'$ ist das Bild des

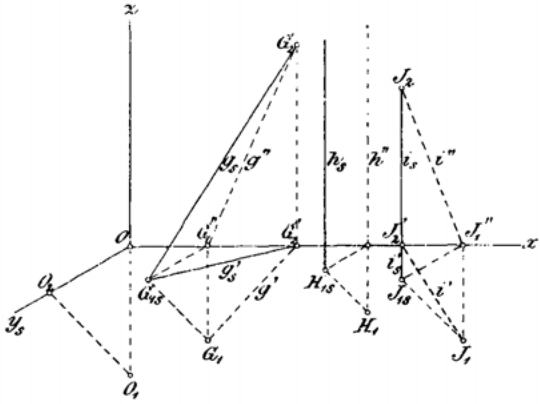

Fig. 3.

ersten Spurpunktes G_1; der zweite Spurpunkt G_2 ist sein eigenes Bild und liegt auf g_s, er befindet sich mit $G_2' = g_s' \times x$ auf einer Senkrechten zur x-Achse. Die Senkrechte ist die Aufrißspur der Vertikalebene durch g und g', während g_s' das Bild ihrer Grundrißspur darstellt (Fig. 3). Aus G_{1s} leitet man G_1'' auf x und G_1 ab ($G_{1s} G_1'' \parallel O_2 O$, $G_1'' G_1 \perp x$, $G_{1s} G_2 \parallel O_2 O_1$) und erhält hieraus $g' = G_1 G_2'$ und $g'' = G_1'' G_2$. Umgekehrt kann man leicht aus dem Grundriß g' und Aufriß g'' einer Geraden g oder aus den beiden Projektionen zweier ihrer Punkte die Bildgeraden g_s und g_s' finden, was keiner Erläuterung bedarf. — Das Bild eines Sehstrahles o ist sein Spurpunkt O_2 in

der Bildebene, mit ihm fällt O_{1s} zusammen; das Bild o_s' seiner ersten Projektion ist senkrecht zur x-Achse (Fig. 2). Das Bild einer zu Π_1 senkrechten Geraden h ist rechtwinklig zur x-Achse; ihr Grundriß und sein Bild reduzieren sich auf die Punkte H_1 bzw. H_{1s}. Sieht man von diesen beiden Spezialfällen ab und nimmt man eine der Geraden i_s oder i_s' zur x-Achse rechtwinklig an, so muß die andere in demselben Punkte auf der x-Achse senkrecht stehen; denn die Sehstrahlebene durch die eine Gerade steht dann senkrecht auf Π_1 und enthält folglich auch die andere. Demnach folgt hieraus für die Gerade i nur, daß sie in einer bestimmten zur Sehstrahlebene durch die z-Achse parallelen Ebene liegt; um i vollständig zu bestimmen, bedarf es weiterer Angaben (Spurpunkte).

13. Eine Ebene E wird durch ihre Spurlinie e_2 in der Bildebene und das Bild e_{1s} ihrer ersten Spurlinie e_1 dargestellt, die sich im Achsenschnittpunkte $E_x = \mathsf{E} \times x$ treffen (Fig. 4). Die Sehstrahlebene durch e_{1s} schneidet Π_1 in e_1 und hieraus ergibt sich E als Verbindungsebene $e_1 e_2$. — Enthält E die Richtung der Sehstrahlen, so fallen e_{1s} und e_2 in dieselbe gerade Linie. Steht E senkrecht auf Π_1, so ist $e_2 \perp x$; ist E senkrecht zu Π_2, so liegt $e_{1s} \parallel y_s$. Enthält E die x-Achse, so fallen e_{1s} und e_2 beide mit dieser zusammen und zur Bestimmung von E ist noch die Angabe eines auf ihr und außerhalb x gelegenen Punktes erforderlich.

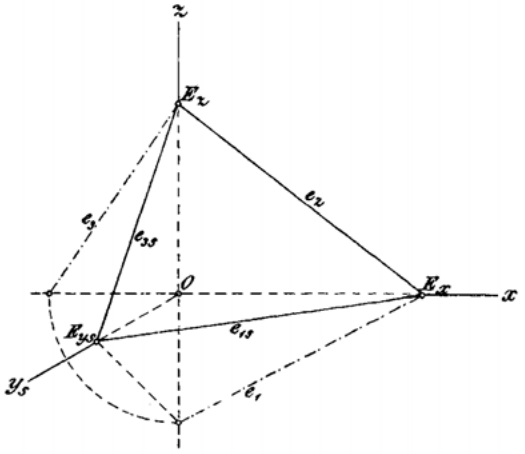

Fig. 4.

14. Die in 46—65 Bd. I für orthogonale Projektion entwickelten Sätze über die vereinigte Lage von Punkten, Geraden und Ebenen, über ihre Verbindungs- und Schnittelemente und den Parallelismus können ohne Schwierigkeit auf den Fall der schiefen Projektion übertragen werden. Auch die Lösung der dort behandelten Aufgaben vollzieht man in unserem jetzigen Verfahren in analoger Weise, wie an einigen Beispielen gezeigt werden mag.

Man hat dabei namentlich den folgenden Satz zu beachten: