Der Klang als Formel

Ein mathematisch-musikalischer Streifzug

von

Prof. em. Dr. Manfred Reimer

2., verbesserte Auflage

Oldenbourg Verlag München

Manfred Reimer arbeitete – nach der Promotion an der Universität Tübingen – zunächst als Wissenschaftlicher Assistent am Mathematischen Institut Tübingen. 1966 folgt die Habilitation, ebenfalls in Tübingen. 1967/68 war er als Research Assistant Professor an der University of Maryland tätig. 1969 wechselte er als ordentlicher Professor an die Universität Dortmund, wo er an der Gründung und dem Aufbau des Mathematischen Instituts mitwirkte, forschte und lehrte. Seit 1999 ist er emeritiert, aber weiterhin wissenschaftlich tätig.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
www.oldenbourg-verlag.de

Lektorat: Kathrin Mönch
Herstellung: Constanze Müller
Titelbild: © Markus Wegner/PIXELIO
Einbandgestaltung: hauser lacour
Gesamtherstellung: Grafik + Druck GmbH, München

Dieses Papier ist alterungsbeständig nach DIN/ISO 9706.

ISBN 978-3-486-70542-3

C'est le ton qui fait la musique

Die Erschaffung der Töne

Geräusche kommen auf vielerlei Art zustande, ohne daß man sie als Töne bezeichnen würde. Töne sind eine Erfindung des Menschen. Ohne sein Zutun gibt es sie nicht. Darin gleichen sich Töne und Zahlen.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Mathematik und Musik stehen in einer engen Wechselbeziehung. Sie sprechen jedoch je eine – wenn auch weltweit verstandene – eigene Sprache, was die Verständigung zwischen ihnen durchaus erschwert. Ein Brückenschlag ist also erforderlich, wobei wir die Bringschuld der Mathematik zuweisen.

Die besondere Stärke der Mathematik liegt in ihrem hohen Grad der Abstraktion und Allgemeinheit. Diese Stärke birgt in sich zugleich die Gefahr, daß die Deutung der Ergebnisse hinter den Erkenntnissen zurückbleibt. So lernt wohl jeder Mathematikstudent recht früh die Wellengleichung kennen und ahnt sicher auch, daß sie etwas mit Musik zutun hat. Aber diese erscheint oft ohne weitere Begründung, und die musikalische Deutung unterbleibt aus Zeitmangel. Ähnliches gilt für die Kettenbrüche, die wegen ihrer Approximationseigenschaften zu Anwendungen im Bereich der Wohlklänge geradezu herausfordern. Wie bedauerlich für die beiden Verwandten, für die Mathematik wie auch für die Musik.

Unser "Streifzug" soll also eine Brücke schlagen und dem wechselseitigen Interesse und Verständnis dienen. Sollen unsere Fundamente tragen, können wir bei der Darstellung allerdings nicht auf die Sprache der Mathematik verzichten. Aber wir können sie in unserem Zusammenhang etwas lockerer handhaben, brauchen nicht alle Begriffe neu zu definieren, und brauchen auch nicht immer gleich das stärkste Geschütz aufzufahren, wenn dies der Verständlichkeit und der Verständigung dient. Auch brauchen wir nicht immer die genauen Voraussetzungen zu benennen. Der Fachmann kennt sie ohnehin, und der Laie hat kaum Nutzen von ihnen. Auch ich bin Laie – in der Musik! Darin liegt für mich ein gewisses Wagnis, das ich jedoch eingehen muß. Allerdings werde ich den eigentlichen künstlerischen Bereich wohlbedacht nicht betreten.

Unser Streifzug nimmt sich die Zeit, auch auf allgemeine kulturelle Zusammenhänge hinzuweisen, durch welche Mathematik und Musik seit Jahrhunderten verbunden sind. Um den Formeln aufzuhelfen, haben wir ihn mit vielen in Maple erstellten Tabellen und Abbildungen versehen. Sie könnten gerade dem Laien oft eingängiger sein als der reine mathematische Text.

Aus systematischen Gründen kommt im ersten Kapitel der Begriff der Frequenz – von einer Anmerkung abgesehen – nicht vor. Erst im zweiten Kapitel wird er zusammen mit der Wellenlänge eingeführt und dazu benutzt, Eigenschwingungen mit Tönen zu identifizieren.

Zwei Abschnitte sind als "fakultativ" gekennzeichnet. Man kann sie ohne Verlust im Gesamtverständnis jedenfalls zunächst einmal überspringen.

Dem Oldenbourg Verlag danke ich für die Aufnahme meines Streifzugs in sein Mathematik-Programm. Frau Kathrin Mönch, der Lektorin, danke ich für ihre wertvollen Vorschläge zum Erscheinungsbild.

Manfred Reimer

Kapitel 1

Die Geometrie der Töne

Die von Monochorden ausgehenden Geräusche werden von uns Menschen (wie auch von vielen Tieren) als angenehm empfunden. Wir nennen sie Töne und unterscheiden Töne nach ihrer 'Höhe'.

Der von der Saite eines Monochords ausgehende Ton klingt anders, wenn die Saite in ihrer Länge verkürzt wird. Wir nennen ihn dann 'höher', den ursprünglichen 'tiefer'. Und erklingen zwei Saiten gleicher physikalischer Beschaffenheit zugleich, so empfinden wir einen Wohlklang, wenn ihre Längen l und m in einem einfachen rationalen Verhältnis stehen. Man kann diese Empfindungen in einem gewissen Umfang ordnen. Besonders angenehm sind die Verhältnisse $l : m = 2 : 1$ und $3 : 2$.

In der Mathematik ist es üblich, statt 3:2 auch 3/2, oder $\frac{3}{2}$ zu schreiben. Davon werden wir nach Belieben Gebrauch machen. Außerdem ist es gelegentlich hilfreich, die natürlichen Zahlen in der Menge $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ zusammenzufassen. $n \in \mathbb{N}$ bedeutet also: n ist eine natürliche Zahl. Allgemein wird dann ein Wohlklang durch einen Bruch $\frac{p}{q}$ natürlicher Zahlen $p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit kleinem Zähler p und kleinem Nenner q beschrieben.

Das Tonsystem des griechischen Altertums

Wer unser heutiges Tonsystem verstehen will, kommt nicht umhin, sich das System der Alten Griechen anzuschauen, das auf **Tetrachorden** aufbaute. Seine Beschreibung mit Hilfe unserer heutigen Begriffe ist nur näherungsweise möglich, wobei die Vertauschung von *hoch/tief* das geringste der Probleme darstellt. Wir versuchen, das System ganz aus dem Denken des Altertums heraus zu entwickeln, also möglichst ohne Antizipation der Neuzeit, insbesondere ohne Antizipation des Begriffs der Frequenz.

Schon

Pythagoras von Samos

(ca. 580 bis ca. 500 v.Chr.)

experimentierte mit dem **Monochord**, einem Versuchsinstrument zur Darstellung einzelner Töne und zur Erforschung des Zusammenhanges zwischen den **Saitenlängen** und dem Wohlklang zweier zugleich erklingender Saiten gleicher Beschaffenheit. Ein besonderer **Wohlklang** ergibt sich, wenn die Saiten in einem einfachen Längenverhältnis stehen, besonders in einem der Verhältnisse

$$\begin{array}{ll} 1:2 & \text{(Oktave)}, \\ 2:3 & \text{(Quinte)}, \\ 3:4 & \text{(Quarte)}, \\ 4:5 & \text{(Terz)}. \end{array}$$

Da der Ton bei längerer Saite '*tiefer*', bei kürzerer Saite '*höher*' genannt wird, kann die *Höhe* $H(t)$ des Tones t mit der Saitenlänge $S(t)$ [in einer beliebigen Längeneinheit] durch die Größe

$$H(t) := \frac{const}{S(t)}$$

gemessen werden, und zwar mit einer beliebigen Konstanten *const*, die der Eichung dienen kann. Ist der Ton v höher als der Ton u, so stehen ihre Tonhöhen in den folgenden Verhältnissen:

$$\begin{aligned}
\tfrac{H(v)}{H(u)} &= \tfrac{2}{1} \quad \text{im Falle der Oktave,}\\
\tfrac{H(v)}{H(u)} &= \tfrac{3}{2} \quad \text{im Falle der Quinte,}\\
\tfrac{H(v)}{H(u)} &= \tfrac{4}{3} \quad \text{im Falle der Quarte,}\\
\tfrac{H(v)}{H(u)} &= \tfrac{5}{4} \quad \text{im Falle der Terz.}
\end{aligned}$$

Theoretisch erhält man Töne beliebiger Höhe und beliebiger Tiefe, wenn man die Saitenlänge nur klein genug oder groß genug macht. Da das aber praktisch unmöglich ist, realisiert man die Tonskala mithilfe verschiedener Saiten unterschiedlicher Beschaffenheit, wie Durchmesser und Dichte, eventuell aber gleicher Länge. Auf diesem Prinzip basieren schon im Altertum Instrumente wie Kithara und Harfe.

Das Pythagoräische System

Pythagoras versuchte, die Oktave mit Hilfe der Quinte in 6 gleichgroße Tonschritte zu unterteilen. Durch Reduktion der 2-ten Quinte um eine Oktave gewann er das Verhältnis

$$q = \tfrac{1}{2} \cdot (\tfrac{3}{2})^2 = \tfrac{9}{8},$$

mit dem er aus einem Grundton u_0 der Höhe $H(u_0) = 1$ die Töne $u_1, u_2, \ldots, u_6$ mit den Tonhöhen

$$H(u_j) = q^j \cdot H(u_0) = q^j, \quad j = (0), 1, 2, \ldots, 6$$

konstruierte. Der j-te Ton entsteht also aus der $(2j)$-ten Quinte durch Erniedigung um j Oktaven. Wie schon Pythagoras bemerkte, verfehlt der letzte Ton wegen

$$\left(\tfrac{9}{8}\right)^6 = 2 + \tfrac{7153}{262144}$$

leider die Oktave um das später nach ihm benannte sogenannte **pythagoräische Komma**. Auch verfehlt das (dissonante) Verhältnis

$$\tfrac{H(u_2)}{H(u_0)} = \tfrac{81}{64} = \tfrac{5}{4} + \tfrac{1}{64}$$

ein wenig die (reine) Terz. Man nennt es die **pythagoräische Terz**.

Dennoch ist die Idee von Pythagoras, die Oktave gleichmäßig zu teilen, fundamental. Sie wird aber erst in der Neuzeit, nach der Erfindung der Potenzen und der Logarithmen, in gültiger Form verwirklicht werden, nämlich in der gleichschwebenden Temperatur.

Das Größere Vollkommene System

Das pythagoräische System hat also – trotz eines überzeugenden Ansatzes – einstweilen seine Tücken. Schon in der Antike wurde ihm deshalb durch

Aristoxenos von Tarent

(354 bis ca. 300 v.Chr.)

ein theoretisch begründetes Tonsystem gegenübergestellt, das zwei verschiedene Tonschritte (mit $q = \frac{9}{8}$ und $\frac{10}{9}$) kannte, die wegen

$$\tfrac{9}{8} \cdot \tfrac{10}{9} = \tfrac{5}{4}$$

zusammen eine reine (harmonische) Terz ergeben. Die Festlegung auf zwei solche Tonschritte wurde aber erst nach Aufkommen der Tasteninstrumente (Claviere) im späten Mittelalter verbindlich.

Bei

Archytas von Tarent

(4. Jh. v. Chr.)

spielte stattdessen wohl auch noch der Tonschritt mit $q = \frac{8}{7}$ eine Rolle.

Bevor wir das griechische Tonsystem erklären, bemerken wir, daß man mit den Tonhöhen rechnen kann. Dabei sind folgende Regeln wichtig:

A1. Sind u und v zwei Töne, so sind sie gleich, oder einer von ihnen ist der höhere. Führen wir ein Paar (u, v) von Tönen auf, so gilt als vereinbart, daß v höher ist als u. Entsprechendes gilt für Tripel (u, v, w), Quadrupel (u, v, w, x), usw.

A2. Bilden (u,v) eine Quinte und (v,w) eine Quarte, oder umgekehrt, so bilden (u,w) stets eine Oktave. Denn es gilt

$$\frac{H(w)}{H(u)} = \frac{H(w)}{H(v)} \cdot \frac{H(v)}{H(u)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2.$$

Bei Vertauschung von Quinte und Quarte erhält man aufgrund des Kommutativgesetzes der Multiplikation dasselbe Ergebnis.

A3. Bilden (u,v) eine Quarte und (u,w) eine Quinte, so gilt

$$\frac{H(w)}{H(v)} = \frac{H(w)}{H(u)} \cdot \frac{H(u)}{H(v)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8} \quad \textit{(Sekunde).}$$

Wir sagen, (v,w) bilden eine *Sekunde.*

Im Prinzip reichen also Quinte und Quarte aus, um die Oktave und die Sekunde zu definieren. Das reizt den Mathematiker, das griechische Tonsystem unter Benutzung von **A1–A3** allein aus diesen beiden Begriffen **axiomatisch** abzuleiten, und zwar ohne weiteren Bezug auf die Geometrie der Saiten, die diesen Begriffen zugrundeliegt.

Auf die Natur der Töne kommen wir erst im 2. Kapitel wieder zu sprechen, wenn uns die mathematischen und naturwissenschaftlichen Begriffe der Neuzeit zur Verfügung stehen.

Struktur des griechischen Tonsystems

Um uns einen späteren Übergang zur Neuzeit zu erleichtern, werden wir einzelne Töne mit den uns heute geläufigen Bezeichnungen benennen, wie *e, a, h,* e', usw., ohne daß damit zunächst irgendeine Bedeutung antizipiert wird.

Tetrachorde

bestehen aus vier Tönen

$$(uxxv),$$

von denen (u, v) eine Quarte bilden. Die mit x bezeichneten Töne bleiben dabei zunächst undefiniert. Jedenfalls gilt

$$\frac{H(v)}{H(u)} = \frac{4}{3} \quad (\textit{Quarte}).$$

Vielleicht konnten die vier Töne eines Tetrachords auf einer Saite gegriffen werden. Ob die Zahl *vier* hier ins Spiel kommt, weil der Daumen zum Halten des Instruments gebraucht wurde, sei dahingestellt. Jedenfalls ist der Ton v durch den Ton u bereits eindeutig bestimmt, und umgekehrt.

Zentrale Tetrachorde

sind zwei Tetrachorde

$$(exxa) \text{ und } (hxxe'),$$

bei denen (e, h) eine Quinte bilden. Es gilt also

$$\frac{H(a)}{H(e)} = \frac{4}{3} = \frac{H(e')}{H(h)} \quad (\textit{Quarten}) \tag{1}$$

und

$$\frac{H(h)}{H(e)} = \frac{3}{2} \quad (\textit{Quinte}). \tag{2}$$

Da (e, h) eine Quinte ist und (h, e') eine Quarte, so gilt nach unserer Überlegung von oben, **A2**, daß (e, e') eine Oktave ist,

$$\frac{H(e')}{H(e)} = 2 \quad (\textit{Oktave}). \tag{3}$$

Damit stehen alle bereits ausgezeichneten Töne (e,a,h und e') in einem wohl definierten Verhältnis zu e, aber auch zu jedem anderen von ihnen, so daß die Tonhöhe eines jeden von ihnen die Tonhöhe der übrigen bereits eindeutig bestimmt.

Da nunmehr die Quarte (e, a) und das Paar (a, e') sich zu einer Oktave ergänzen, bilden (a, e'), wieder nach **A2**, eine Quinte,

$$\frac{H(e')}{H(a)} = \frac{3}{2} \quad (\textit{Quinte}). \tag{4}$$

Auch ergänzen sich die Quarte (e, a) und das Paar (a, h) zu einer Quinte. Daraus folgt nach **A3**, daß (a, h) eine Sekunde ist,

$$\frac{H(h)}{H(a)} = \frac{9}{8} \quad (\textit{Sekunde}). \tag{5}$$

Struktur-Diagramm

Wir fassen die Ergebnisse zusammen in einem Diagramm, welches die Faktoren zeigt mit welchen sich die Töne erhöhen:

$$\begin{array}{ccc} e\ .\ .\ a & & h\ .\ .\ e' \\ \overline{} & \overline{} & \overline{} \\ \frac{4}{3} & \frac{9}{8} & \frac{4}{3} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\frac{2}{1}} \end{array} \tag{6}$$

Über die mit x markierten Töne ist noch nichts gesagt. Wir bezeichnen sie mit *f,g* bzw. mit *c',d'*, so daß die zentralen Tetrachorde die Form

$$(efga) \text{ und } (hc'd'e')$$

annehmen. Dabei wird zunächst nur verlangt, daß (*f,c'*) und (*g,d'*) wie (*e,h*) im Quintenverhältnis stehen, daß also

$$H(c') := \tfrac{3}{2}H(f), \quad \textit{und} \quad H(d') := \tfrac{3}{2}H(g) \tag{7}$$

gilt. Geometrisch gesehen bedeutet das: Wenn die beiden Tetrachorde durch zwei gleichlange Saiten realisiert werden, dann können die beiden Tonpaare je mit einem **Doppelgriff** erzeugt werden.

Absolut sind die Tonhöhen damit noch nicht festgelegt. Auch blieb es zunächst dem Spieler überlassen, die Töne f und g einzufügen, z.B. f als Sekunde über der Prime e und g als Terz – was diese Begriffe, wie auch Quarte, Quinte und Oktave, zunächst einmal aus der Stellung des zweiten Tones innerhalb der zentralen Tetrachorde als Ordinalzahlen erklärt.

Allerdings war aus rein musikalischen Gründen noch eine gewisse Regel zu beachten. Um sie herzuleiten betrachten wir noch einmal das Diagramm (6). Es fällt auf, daß eine dreimalige Erhöhung von e um den dort auftretenden Faktor $\frac{9}{8}$ wegen

$$\left(\tfrac{9}{8}\right)^3 = 1{,}42\ldots > 1{,}33\ldots = \tfrac{4}{3}$$

deutlich über den Ton a hinwegschießen würde. In anderen Worten, im (geometrischen) Mittel sind die drei Abstände zwischen den Tönen e, f, g, a deutlich kleiner als der Abstand von a und h. Genauer treffen würde man mit dem Faktor

$$\left(\tfrac{9}{8}\right)^{\frac{5}{2}} = 1{,}34\ldots > 1{,}33\ldots = \tfrac{4}{3},$$

also bei "zweieinhalb-maliger" Anwendung des Faktors $\frac{9}{8}$.

Ganzton- und Halbtonschritte

Nennt man nun eine Erhöhung um (etwa) den Faktor $\frac{9}{8}$ einen **Ganztonschritt**, die Erhöhung um (etwa) den Faktor $(\frac{9}{8})^{\frac{1}{2}}$ einen **Halbtonschritt**, so war die Regel, daß f und g im Tetrachord $(e..a)$ so einzufügen sind, daß 2 Ganztonschritte und 1 Halbtonschritt entstehen, und zwar nach dem Schema

$$e_{\vee} f_{\vee\vee} g_{\vee\vee} a,$$

wobei $_{\vee}$ jeweils einem Halbtonschritt, $_{\vee\vee}$ einem Ganztonschritt entspricht. Die zentralen Tetrachorde nehmen damit die folgende Struktur an:

$$e_{\vee} f_{\vee\vee} g_{\vee\vee} a_{\ \vee\vee}\, h_{\vee} c'_{\vee\vee} d'_{\vee\vee} e', \tag{8}$$

wobei (7) berücksichtigt wurde.

Es gab im Altertum eine Fülle an Realisierungsvorschlägen, auf die wir nicht im einzelnen eingehen können. Platon sah nur eine Art von Ganztonschritten im Verhältnis 9:8 vor, was aber für die Halbtonschritte zwingend das viel zu komplizierte Verhältnis

$$\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{256}{243}$$

nach sich zieht. Durchgesetzt haben sich später die Verhältnisse

9:8 (großer Ganztonschritt)

10:9 (kleiner Ganztonschritt)

des Aristoxenos, nicht jedoch das Verhältnis

$$8:7 \quad \text{(übergroßer Ganztonschritt)}$$

des Archytas. Wir kommen darauf zurück, und fassen einstweilen zusammen:

> Die Töne der zentralen Tetrachorde erfüllen in Bezug auf ihre Abstände das Schema (8). Jeder der Töne *e, a, h, e'* bestimmt die übrigen drei auf eindeutige Weise. *f* und *g* werden durch den Spieler festgelegt. Sie bestimmen danach c' und d' auf eindeutige Weise.

Die Alten Griechen begnügten sich nicht mit den zwei zentralen Tetrachorden (II und III). Durch ein **verschränktes Anfügen** je eines weiteren Tetrachords nach unten (I) und nach oben (IV) erweiterten sie das System und erhielten

Das Größere Vollkommene System (GVS)
(σύστημα τέλειον μεῖζον)

Es hat die Struktur

Quinten

A H c d e f g a h c'd' e'f'g'a'

II III

I IV

Quarten