

Heidrun Matthäus, Wolf-Gert Matthäus

Mathematik für BWL-Bachelor

Schritt für Schritt mit
ausführlichen Lösungen



Teubner

Teubner Studienbücher Wirtschaftsmathematik

Heidrun Matthäus, Wolf-Gert Matthäus

Mathematik für BWL-Bachelor

Teubner Studienbücher *Wirtschaftsmathematik*

Herausgegeben von
Prof. Dr. Bernd Luderer, Chemnitz

Die Teubner Studienbücher Wirtschaftsmathematik behandeln anschaulich, systematisch und fachlich fundiert Themen aus der Wirtschafts-, Finanz- und Versicherungsmathematik entsprechend dem aktuellen Stand der Wissenschaft.

Die Bände der Reihe wenden sich sowohl an Studierende der Wirtschaftsmathematik, der Wirtschaftswissenschaften, der Wirtschaftsinformatik und des Wirtschaftsingenieurwesens an Universitäten, Fachhochschulen und Berufsakademien als auch an Lehrende und Praktiker in den Bereichen Wirtschaft, Finanz- und Versicherungswesen.

Heidrun Matthäus, Wolf-Gert Matthäus

Mathematik für BWL-Bachelor

Schritt für Schritt mit
ausführlichen Lösungen



Teubner

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <<http://dnb.ddb.de>> abrufbar.

Dipl.-Math. Heidrun Matthäus

studierte von 1970 bis 1975 Mathematik und Mathematik-Pädagogik an der Staatlichen Universität Charkow (Ukraine). Anschließend arbeitete sie an der Technischen Hochschule Merseburg und ab 1991 an der Martin-Luther-Universität Halle. Seit 1996 ist sie als Lehrkraft für besondere Aufgaben zuständig für die mathematische Grundausbildung im BWL-Direkt- und Fernstudium am Standort Stendal der Hochschule Magdeburg-Stendal (FH).

Dr. rer. nat. habil. Wolf-Gert Matthäus

studierte von 1964 bis 1969 Mathematik an der TU Dresden. Dann lehrte er an der TH in Merseburg, wo er 1973 promovierte und sich 1978 habilitierte.

Er wurde 1979 zum Dozenten für Numerische Mathematik berufen. Von 1991 bis 1998 wirkte er am Aufbau der deutschsprachigen Abteilungen an der Marmara-Universität in Istanbul (Türkei) mit. Nach seiner Rückkehr nach Deutschland übernahm er Lehraufträge an Universitäten, Fachhochschulen, Berufsakademien und Verwaltungs- und Wirtschaftsakademien.

1. Auflage September 2006

Alle Rechte vorbehalten

© B. G. Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2006

Lektorat: Ulrich Sandten / Kerstin Hoffmann

Der B. G. Teubner Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.

www.teubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de

Druck und buchbinderische Verarbeitung: Strauss Offsetdruck, Mörlenbach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Printed in Germany

ISBN-10 3-8351-0099-8

ISBN-13 978-3-8351-0099-2

Vorwort

Das Bildungswesen der Bundesrepublik ist in Bewegung. Frühkindliche Bildung ist wieder im Gespräch. In den Schulen der Allgemeinbildung zieht man die Konsequenzen aus den PISA-Studien. An den Gymnasien überlegt man konstruktiv die Verkürzung der Schulzeit auf 12 Jahre. Mehrere Bundesländer führen ein Zentralabitur ein.

An den höchsten Bildungsstätten des Landes vollzieht sich, von der breiten Öffentlichkeit weitgehend unbemerkt, eine der größten Umwälzungen des deutschen Hochschulwesens seit vielen Jahren: Gemäß den EU-Beschlüssen von Bologna erfolgt schrittweise die Umstellung des spezifisch deutschen Studiensystems auf die international üblichen Bildungsabschnitte Bachelor und Master.

Nahezu alle Studiengänge werden dafür auf den Prüfstand gestellt.

Insbesondere betrifft dies die vielfältigen Studienformen, in denen bisher die Betriebswirtschaftslehre vermittelt wurde – in wissenschaftlichen Diplomstudiengängen an den Universitäten und Fachhochschulen, in den stärker praxisnahen, dualen Studiengängen an Berufsakademien und Verwaltungs- und Wirtschaftsakademien.

Weitgehend einheitlich soll in Zukunft an den verschiedensten Studienorten in den höchsten Bildungsstätten des Landes der Erwerb des BWL-Bachelors erfolgen.

Die vorgeschriebene Akkreditierung als Voraussetzung für den Erwerb der Lehrerlaubnis wird dazu führen, dass es keine wesentlichen Unterschiede im dreijährigen BWL-Bachelor-Studium an den verschiedenen hohen Schulen des Landes mehr geben wird. Damit wird bei sehr gut abgeschlossenem Bachelor-Studium die sofortige oder spätere Weiterqualifizierung zum BWL-Master an diesem oder anderem Ort ermöglicht.

Einheitlich wird vor allem die Ausbildung in den ersten Semestern erfolgen. Das betrifft insbesondere die überall erfolgende mathematischen Grundlagenausbildung, deren Rahmen neu abgesteckt wird. Häufig werden dafür zwei Semester vorgesehen, allgemein 5 bis 7 credit points erhält der Studierende dafür nach erfolgreichem Abschluss.

Rechnet man nach der international üblichen Formel, dass pro credit point ca. 30 Stunden erfolgreiche Beschäftigung mit dem vermittelten Lehrstoff in Lehrveranstaltung und Selbststudium angenommen werden, dann bekommt die eigenverantwortliche Beschäftigung mit dem spröden Stoff eine wesentlich höhere Bedeutung als bisher. Zumal mancherorts der Umfang der angebotenen Übungen und Tutorien dem strafferen Studienablauf zum Opfer fallen musste.

Das vorliegende Lehrbuch trägt der neuen Situation in jeder Hinsicht Rechnung. Es enthält in siebzehn Kapiteln zusammengefasst den grundsätzlichen mathematischen Lehrstoff, wie er in jedem BWL-Bachelor-Studiengang zu vermitteln ist. Zwei Kapitel widmen sich ganz speziell der Frage, wie die Mathematik sinnvoll auf betriebswirtschaftliche Fragestellungen angewandt werden kann.

Da es als begleitendes Buch zu den Vorlesungen und gleichzeitig als Hilfe für das Selbststudium gedacht ist, stellte es die Autoren immer wieder vor die Frage, wie die schwierige Balance zwischen strenger, aber nüchterner mathematischer Korrektheit und stärker populärem Erläutern und Erklären gehalten werden kann.

Im Zweifelsfall fiel die Entscheidung meist zugunsten der Erklärung aus. Wir hoffen, dass dies auch im Sinne der Leser sein wird.

Angesichts des vorgegebenen Umfangs musste auch überlegt werden, welche mathematischen Themen zugunsten ausführlich vorgerechneter Beispiele gekürzt oder nur indirekt aufgenommen werden. So mussten einführende, systematisch aufbauende Kapitel über mathematische Logik, Mengenlehre und den Aufbau des Zahlensystems entfallen, wichtige Begriffe werden aber im Kontext dort erklärt, wo sie benötigt werden.

Nicht gekürzt wurde aber bei den einführenden Kapiteln, die das elementare und höhere „mathematische Handwerkszeug“ wiederholend zusammenstellen, vertiefen und ergänzen. Denn die Erfahrung beider Autoren, zusammen mehr als siebenzig Jahre als Hochschul-Lehrende und als Hochschullehrer an diversen höheren und höchsten Bildungseinrichtungen tätig, weisen immer wieder aus, dass es nicht vordergründig intellektuelle Defizite oder das Unverständnis der Mathematik sind, die die BWL-Studierenden so oft an Mathematik-Klausuren scheitern lassen.

Sehr, sehr oft summieren sich nämlich die Kleinigkeiten auf – nicht gesetzte Klammern, vorschnell übersprungene Zwischenrechnungen, falsche Bruchrechnungen, falscher und flüchtiger Umgang mit Gleichungen und Ungleichungen, Kritiklosigkeit und das Fehlen der wichtigen Frage an sich selbst: „Kann das überhaupt stimmen?“.

Deshalb werden prinzipiell alle Beispielrechnungen so ausführlich vorgeführt, dass sie bis ins Detail nachvollziehbar sind. Kein Zwischenschritt wird ausgelassen, die beliebte Autoren-Floskel „man sieht leicht“, die jeden Leser zur Verzweiflung treibt, sollte sich in diesem Buch nicht finden lassen.

Einige Themengebiete können nur anreißend beleuchtet werden, das betrifft insbesondere die hochinteressante und wichtige lineare Optimierung. Hier konnte nur das Wesentliche angedeutet werden, aber eine umfangreiche Liste weiterführender und vertiefender Literatur hilft auf dem Weg zu weiterführenden Studien.

Für den Dialog mit den Lesern wird auf der Internet-Seite www.w-g-m.de unter der gesonderten Rubrik Leserservice auf oft gestellte Fragen zum Buch geantwortet.

Dort nehmen wir auch gern Hinweise, Anregungen und Kritiken entgegen. Sie können dieses Buch nur besser machen.

Dem Teubner-Verlag in Wiesbaden danken wir, dass er unsere Anregung für dieses Buch so schnell aufgenommen hat und uns in jeder Weise anregend und hilfreich unterstützte.

Uenglingen, im Sommer 2006

Heidrun Matthäus
Wolf-Gert Matthäus

Inhaltsverzeichnis

1	Analysis	17
1.1	Funktionen.....	17
1.1.1	Begriff	17
1.1.2	Nutzen von Funktionen	19
1.1.3	Graph der Funktion	19
1.2	Aufgaben der Analysis.....	21
1.3	Vorschau	21
2	Elementares Handwerkszeug	23
2.1	Klammersetzung	23
2.1.1	Punkt- vor Strichrechnung	23
2.1.2	Potenz- vor Punktrechnung	23
2.1.3	Klammern	23
2.2	Bruchrechnung	24
2.2.1	Grundsätzliches	24
2.2.2	Multiplikation und Division von Brüchen.....	25
2.2.3	Addition und Subtraktion von Brüchen	26
2.3	Größenverhältnisse bei Brüchen	27
3	Erweitertes Handwerkszeug.....	29
3.1	Potenzen, Wurzeln, Logarithmen	29
3.1.1	Potenzen	29
3.1.2	Potenzgesetze	29
3.1.3	Wurzeln.....	30
3.1.4	Wurzelgesetze.....	31
3.1.5	Der Begriff des Logarithmus.....	32
3.1.6	Dualer, dekadischer und natürlicher Logarithmus	33
3.1.7	Logarithmengesetze.....	34

3.2	Gleichungen, Ungleichungen, Beträge.....	35
3.2.1	Allgemeines zu Gleichungen	35
3.2.2	Quadratische Gleichungen	37
3.2.3	Ungleichungen – Begriff und Lösungsmenge.....	38
3.2.4	Ungleichungen – Multiplikation mit bekannten Zahlen.....	39
3.2.5	Ungleichungen – Division durch bekannte Zahlen.....	40
3.2.6	Ungleichungen – Multiplikation/Division ohne Vorzeicheninformation.....	40
3.2.7	Beträge	44
3.2.8	Betragsgleichungen und –ungleichungen.....	45
3.3	Umgang mit dem Summenzeichen.....	46
3.3.1	Einfache Summen.....	46
3.3.2	Rechenregeln für einfache Summen	48
3.3.3	Doppelsummen	49
3.3.4	Rechenregeln für Doppelsummen.....	49
4	Elementare Funktionen und ihre Graphen	51
4.1	Polynome	51
4.1.1	Allgemeines	51
4.1.2	Berechnung von Funktionswerten von Polynomen.....	51
4.1.3	Graphen von Polynomen n-ten Grades, wenn n ungerade ist.....	52
4.1.4	Graphen von Polynomen n-ten Grades, wenn n gerade ist	54
4.1.5	Graphen von Polynomen zweiten Grades.....	55
4.1.6	Parabeln zeichnen	57
4.1.7	Graphen von Polynomen ersten Grades.....	60
4.1.8	Polynome nullten Grades und ihre Graphen	61
4.2	Exponentialfunktionen	61
4.2.1	Begriff	61
4.2.2	Graphen von Exponentialfunktionen.....	62
4.2.3	Zeichnen des Graphen.....	63
4.3	Logarithmusfunktionen	63
4.3.1	Begriff	63
4.3.2	Graphen von Logarithmusfunktionen	64

5	Verwandte Funktionen und ihre Graphen.....	65
5.1	Begriffserklärung	65
5.2	Additionen und Subtraktionen.....	66
5.2.1	Addition und Subtraktion zur Funktion	66
5.2.2	Addition und Subtraktion zum Argument.....	67
5.3	Multiplikationen.....	68
5.3.1	Multiplikation der Funktion mit (-1)	68
5.3.2	Multiplikation des Arguments mit (-1)	68
5.4	Betragsbildungen.....	69
5.4.1	Betragsbildung im Argument.....	69
5.4.2	Von der Funktion zum Betrag der Funktion	70
6	Kurvendiskussion.....	73
6.1	Begriff und Aufgabenstellung.....	73
6.2	Definitionsbereich	73
6.2.1	Bestimmung des Definitionsbereiches	74
6.2.2	Beschreibung des Definitionsbereiches	75
6.2.3	Definitionsbereich als Lösung einer Ungleichung.....	75
6.2.4	Definitionsbereich als Lösung von Betragsgleichungen.....	77
6.2.5	Definitionsbereiche der Grundfunktionen.....	77
6.2.6	Definitionsbereiche verwandter Funktionen.....	78
6.3	Randuntersuchungen.....	80
6.3.1	Grundfunktionen.....	80
6.3.2	Beliebige Funktionen	81
6.3.3	Unbestimmte Ausdrücke	83
6.4	Wertebereich.....	84
6.4.1	Begriff und Bedeutung.....	84
6.4.2	Wertebereiche der Grundfunktionen	85
6.4.3	Wertebereiche verwandter Funktionen.....	86
6.4.4	Wertebereiche beliebiger Funktionen	89
6.5	Schnittpunkte mit den Achsen.....	89
6.5.1	Schnittpunkt mit der senkrechten Achse	89

6.5.2	Schnittpunkte mit der waagerechten Achse.....	90
6.6	Ausblick	92
7	Eigenschaften von Funktionen	93
7.1	Stetigkeit.....	93
7.1.1	Definition.....	93
7.1.2	Konsequenzen von Stetigkeit und Unstetigkeit.....	94
7.1.3	Arten der Unstetigkeit	95
7.1.4	Suche nach Unstetigkeitsstellen.....	96
7.2	Beschränktheit	98
7.2.1	Definitionen	98
7.2.2	Stetigkeit und Beschränktheit	99
7.3	Monotonie.....	100
7.3.1	Definitionen.....	100
7.3.2	Rechnerische Bestimmung des Monotonieverhaltens	102
7.3.3	Stetigkeit und Monotonie.....	103
7.4	Umkehrfunktion	104
7.4.1	Fragestellung.....	104
7.4.2	Berechnung der Umkehrfunktion	106
7.5	Mittelbare Funktionen: Funktionen von Funktionen.....	107
8	Differentialrechnung	113
8.1	Vorbemerkung, Bilanz, Ausblick	113
8.2	Der erste Ableitungswert.....	113
8.2.1	Begriff und Bedeutung.....	113
8.2.2	Symbolik	114
8.3	Berechnung des ersten Ableitungswertes: Theorie	115
8.4	Berechnung des ersten Ableitungswertes: Praxis	116
8.4.1	Erster Ableitungswert und erste Ableitungsfunktion	116
8.4.2	Erste Ableitungsfunktion von wichtigen Grundfunktionen	116
8.4.3	Faktor- und Summenregel	118
8.4.4	Produktregel	119

8.4.5	Quotientenregel.....	120
8.5	Kettenregel.....	120
8.6	Logarithmisches Differenzieren	123
9	Kurvendiskussion (Fortsetzung).....	125
9.1	Bedeutung des ersten Ableitungswertes für den Graphen	125
9.1.1	Anstieg der Tangente	125
9.1.2	Waagerechte Tangente.....	128
9.1.3	Existenz des ersten Ableitungswertes.....	129
9.2	Bedeutung der ersten Ableitungsfunktion für den Graphen	132
9.2.1	Grundsätzliches	132
9.2.2	Nullstellen der ersten Ableitung	134
9.3	Zweite Ableitungsfunktion.....	135
9.3.1	Begriff und Berechnung.....	135
9.3.2	Bedeutung für die Kurvendiskussion	135
9.3.3	Kriterien und hinreichende Bedingungen für relative Extrema.....	138
9.3.4	Lösung von Extremwertaufgaben	138
9.3.5	Höhere Ableitungsfunktionen.....	140
9.4	Ableitungsfunktionen nicht überall differenzierbarer Funktionen.....	140
9.5	Grenzwerte unbestimmter Ausdrücke	141
10	Folgen mit Reihen	143
10.1	Folgen als spezielle Funktionen	143
10.2	Beschränktheit und Monotonie, alternierende Folgen	144
10.2.1	Beschränktheit von Folgen	144
10.2.2	Monotonie von Folgen.....	144
10.2.3	Alternierende Folgen.....	145
10.3	Konvergenz und Divergenz von Folgen	145
10.3.1	Das Problem mit dem Unendlichen	145
10.3.2	Definitionen der bestimmten Divergenz	147
10.3.3	Definition der Konvergenz	148
10.3.4	Unbestimmte Ausdrücke	149

10.3.5	Grenzwertsätze	150
10.4	Rekursiv beschriebene Folgen	151
10.5	Reihen	154
10.5.1	Begriff, Reihen als spezielle Folgen	154
10.5.2	Untersuchung von Reihen	155
10.5.3	Geometrische Reihen	158
10.5.4	Konvergenz von Reihen.....	160
11	Funktionen zweier Veränderlicher.....	163
11.1	Begriff, Vorstellung, Graph	163
11.1.1	Aufgabenstellung.....	163
11.1.2	Veranschaulichung	165
11.1.3	Möglichkeiten und Grenzen	167
11.2	Zahlenmäßige Informationen zum Graphen.....	168
11.2.1	Erste partielle Ableitungswerte	168
11.2.2	Das totale Differential	171
11.2.3	Waagerechte Tangentialebenen.....	173
11.3	Differentialrechnung für Funktionen zweier Veränderlicher	175
11.3.1	Theorie und Praxis	175
11.3.2	Zusätzliche Regel des partiellen Differenzierens	176
11.3.3	Beispiele	176
11.3.4	Bezeichnungen	179
11.4	Höhere partielle Ableitungen.....	179
11.5	Bestimmung von Hoch- und Tiefpunkten	180
11.6	Linien gleicher Funktionswerte: Niveaulinien.....	183
11.6.1	Begriff und Beispiel	183
11.6.2	Ermittlung von Niveaulinien	185
11.6.3	Höhenlinien	188
12	Funktionen mit mehr als zwei Veränderlichen.....	189
12.1	Begriff.....	189
12.2	Unvorstellbarkeit.....	189

12.3	Erste partielle Ableitungswerte und totales Differential	190
12.4	Differentialrechnung für Funktionen von n Veränderlichen ($n > 2$)	191
12.4.1	Regeln des partiellen Differenzierens.....	191
12.4.2	Gradient	191
12.4.3	Höhere partielle Ableitungsfunktionen	192
12.4.4	Hesse-Matrix	193
12.5	Relative Extremwerte.....	193
13	Extremalaufgaben	195
13.1	Freie Extremalaufgaben.....	195
13.1.1	Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen	195
13.1.2	Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher	200
13.2	Nebenbedingungen in Ungleichungsform	200
13.2.1	Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen	200
13.2.2	Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher	202
13.3	Nebenbedingungen in Gleichungsform	202
13.3.1	Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen	202
13.3.2	Funktionen von zwei und mehr unabhängigen Veränderlichen	203
13.3.3	Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren: Einführung	204
13.3.4	Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren: Ausblick.....	205
14	Analysis und Betriebswirtschaftslehre	207
14.1	Preis-Absatz-Funktionen.....	207
14.2	Angebotsmonopolisten.....	208
14.3	Sättigungsprozess	211
14.4	Gewinnmaximum und Durchschnittskosten.....	211
14.5	Rentabilität und Marktanteil	212
14.6	Gewinnmaximierung	213
14.7	Monotonie der Nachfrage	214
14.8	COBB-DOUGLAS-Funktion.....	214
14.9	Stückkostenkurve und Grenzkosten.....	215
14.10	Grenzerträge	215

14.11	Zwei Güter.....	217
14.12	Minimalkostenkombinationen.....	218
14.13	Output-Maximierung	220
15	Lineare Algebra: Matrizen.....	221
15.1	Allgemeines.....	221
15.1.1	Der Matrixbegriff	221
15.1.2	Der Matrixbegriff in der Mathematik.....	222
15.2	Matrizen-Begriffe	223
15.2.1	Zeilen und Spalten, Format	223
15.2.2	Vektoren als spezielle Matrizen.....	224
15.2.3	Beziehungen zwischen Matrizen	224
15.2.4	Transponieren.....	225
15.3	Quadratische Matrizen.....	226
15.3.1	Diagonalen.....	226
15.3.2	Diagonal- und Einheitsmatrix	226
15.3.3	Symmetrie	227
15.4	Einfache Rechenregeln für Matrizen.....	227
15.4.1	Addition und Subtraktion, Nullmatrix	227
15.4.2	Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl	228
15.5	Matrizenmultiplikation.....	229
15.5.1	Herstellbarkeit von Matrizenprodukten.....	229
15.5.2	Vertauschbarkeit.....	231
15.5.3	Rechenregeln	231
15.5.4	Besonderheiten der Nullmatrix.....	231
15.5.5	Einselement der Matrizenmultiplikation.....	232
15.5.6	Division von Matrizen	233
15.6	Inverse Matrix	234
15.6.1	Fragestellung.....	234
15.6.2	Definition der inversen Matrix.....	234
15.6.3	Inverse von Diagonalmatrizen.....	236
15.6.4	Lösung einer Matrizengleichung mit quadratischer Matrix	236
15.6.5	Einzigkeit der Inversen	238