Alfred Göpfert | Thomas Riedrich | Christiane Tammer

Angewandte Funktionalanalysis

Motivationen und Methoden für Mathematiker und Wirtschaftswissenschaftler

STUDIUM

VIEWEG+TEUBNER

Alfred Göpfert | Thomas Riedrich | Christiane Tammer

Angewandte Funktionalanalysis

Herausgegeben von
Prof. Dr. Bernd Luderer, Chemnitz

Die Studienbücher Wirtschaftsmathematik behandeln anschaulich, systematisch und fachlich fundiert Themen aus der Wirtschafts-, Finanz- und Versicherungsmathematik entsprechend dem aktuellen Stand der Wissenschaft.
Die Bände der Reihe wenden sich sowohl an Studierende der Wirtschaftsmathematik, der Wirtschaftswissenschaften, der Wirtschaftsinformatik und des Wirtschaftsingenieurwesens an Universitäten, Fachhochschulen und Berufsakademien als auch an Lehrende und Praktiker in den Bereichen Wirtschaft, Finanz- und Versicherungswesen.

www.viewegteubner.de

Alfred Göpfert | Thomas Riedrich | Christiane Tammer

Angewandte Funktionalanalysis

Motivationen und Methoden für Mathematiker und Wirtschaftswissenschaftler

STUDIUM

VIEWEG+TEUBNER

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Prof. Dr. Alfred Göpfert
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Mathematik
Theodor-Lieser-Str. 5
06120 Halle

alfred.goepfert@mathematik.uni-halle.de

Prof. Dr. Thomas Riedrich
TU Dresden
Institut für Analysis
Mommsenstr. 13
01062 Dresden

Prof. Dr. Christiane Tammer
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Mathematik
Theodor-Lieser-Str. 5
06120 Halle

christiane.tammer@mathematik.uni-halle.de

1. Auflage 2009

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Nastassja Vanselow

Vieweg+Teubner ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.viewegteubner.de

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg
Druck und buchbinderische Verarbeitung: MercedesDruck, Berlin
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Germany

ISBN 978-3-8351-0133-3

Einleitung

In diesem Buch werden Motivationen, Arbeitsweisen, Resultate und Anwendungen der Funktionalanalysis für Wirtschaftsmathematik und Mathematische Ökonomie dargestellt, die aber auch für Wirtschafts- und Ingenieurwissenschaften allgemein und für Informatik und Physik zutreffen. Die erwähnten Arbeitsweisen und Resultate haben interessante historische Ursprünge, aus denen heraus sich durch umfassendere Modellierungen und Anwendungen funktionalanalytische Versionen gebildet haben, die heute normales Wissen in den jeweiligen Disziplinen sind. Wir möchten einige der historischen Quellen nennen.

Der schottische Ökonom Adam Smith schrieb in seinem Buch 1776, dass ein ökonomisches Marktgeschehen (etwa eine Austauschökonomie) so funktioniere, als ob es „von einer unsichtbaren Hand" gesteuert würde. Das kann man als einen frühen Hinweis auf einen gesteuerten Prozess ansehen mit dem Ziel, einen Gleichgewichtszustand in dem Marktgeschehen zu erreichen. Später, in den zwanziger Jahren des letzten Jahrhunderts, entwickelte sich die Spieltheorie, in der modernen Form wesentlich beginnend mit Arbeiten von John von Neumann (1903–1957), und in dem Buch von von Neumann und Morgenstern hatte sie ihren ersten Kulminationspunkt. Spiele wurden verallgemeinert (viele Spieler, Kontinua von Spielern, Koalitionen, allgemeinere Präferenzen, Ökonomien) und aus der Vielzahl der beitragenden Wissenschaftler möchten wir John Nash (geb. 1928), Träger des Nobelpreises für Wirtschaftswissenschaften 1994, nennen. Versionen von Nash-Gleichgewichtspunkten gehören zu den wichtigen Gegenständen der modernen Ökonomie. Harry M. Markowitz entwickelte 1952 ein Portfolio-Optimierungsproblem, welches die Entscheidungen eines Investors rational begründet. Für seine Forschungsarbeiten erhielt Markowitz 1990 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften.

Eine weitere interessante Quelle der Mathematischen Ökonomie ist Paretos Effizienzbegriff. Der Sozial-Ökonom Pareto (1848–1923) beschäftigte sich mit der gleichzeitigen Maximierung mehrerer sich widersprechender Zielkriterien. Der mit seinem Namen verbundene Begriff für ein Maximum unter den genannten Bedingungen gehört heute samt seinen vielfältigen funktionalanalytischen Verallgemeinerungen zum Grundbestand der Mathematischen Ökonomie.

Wir möchten schließlich Lagrange (1736–1823) erwähnen. Mit seinem Namen ist u.a. die Methode verknüpft, Extremumaufgaben mit Nebenbedingungen durch das Einführen von Lagrange'sche Multiplikatoren zu lösen. Heute spielen Lagrange-Methoden und Ihre Verallgemeinerungen eine eminente Rolle in allen obengenannten Disziplinen, für die Mathematische Ökonomie sind sie Basiselemente der Dualitätstheorie und ihre ökonomische Interpretation ist nichts anderes als eine Antwort auf Störungen des Ausgangsoptimierungsproblems.

Um in der Wirtschaftsmathematik (und in der Stochastischen Analysis), aber ebenso in den weiteren eingangs genannten Gebieten, moderne Literatur lesen und verfolgen zu können, benötigt man (oft sogar tieferliegende) Kenntnisse aus verschiedenen Zweigen der Funktionalanalysis (in unendlichdimensionalen Räumen) und damit eng verbundener Gebiete:

- Normierte, metrische und topologische Räume,

- Arbeiten mit Funktionalen, Fortsetzung von linearen Funktionalen, Trennungsaussagen und Dualitätstheorie, Distributionen,
- Optimalitätsbedingungen, Existenz von Fixpunkten und Gleichgewichtspunkten, Minimaxsätze, praktische Lösungsverfahren,
- verallgemeinerte bzw. distributionelle Lösungen von Differentialgleichungen,
- Rechnen mit Abbildungen (Operatoren),
- Maß- und Integrationstheorie,
- Maximalpunktsätze,
- Kategoriesätze,
- Mengentheorie,
- halbgeordnete Räume, Präferenzen und Kegel.

Wir greifen dazu in den einzelnen Kapiteln unseres Buches solche Sätze, Beispiele und Anwendungen auf, die in enger Beziehung zur Wirtschaftsmathematik und Mathematischen Ökonomie stehen. Dies zeigt sich beim genaueren Hinschauen auf die entsprechende moderne Fachliteratur. Unser Buch ist auch eine wichtige Stufe zum Einstieg in die Stochastische Analysis (vgl. hierzu u.a. Aliprantis und Border [2]) und die Finanzmathematik (vgl. Föllmer und Schied [60]).

Grundlegend sind Existenzsätze für Gleichgewichtspunkte in Ökonomien (verallgemeinerten Spielen). Sie werden (für beliebige Mengen von Agenten und Gütern) in topologischen Räumen formuliert (die in einigen Fällen nicht einmal lokalkonvex, Hausdorffsch oder metrisierbar sein müssen) und nutzen dann entsprechend allgemeine Fixpunktsätze oder äquivalente Aussagen (KKM-Sätze, Maximalpunktsätze, Durchschnittsprinzip). Für eine Übersicht vgl. Tan [165] oder Yuan [173].

Wichtige Eigenschaften von nichtlinearen Funktionalen, die in der Mehrkriteriellen Optimierung und in der Finanzmathematik eine große Rolle spielen, werden in den Abschnitten 3.3 und 3.4 nachgewiesen. In Abschnitt 3.3 wird auf Differenzierbarkeitseigenschaften (Fréchet-Differenzierbarkeit, Gâteaux-Differenzierbarkeit, Subdifferentiale) eingegangen, die insbesondere bei numerischen Verfahren (Ritz'sches Verfahren, Newton-Verfahren (Abschnitte 9.2, 9.3), Proximal-Point-Algorithmus (Abschnitt 5.9)) eine wichtige Rolle spielen.

Ebenso grundlegend sind Anwendungen von Hahn-Banach-Sätzen (vgl. Abschnitt 5.1). Einerseits sind diese Sätze nicht ganz leicht zu durchschauen und auch nicht ganz leicht zu beweisen (man nutzt Mengenlehre). Deshalb haben wir deren endlichdimensionale Version und eine Reihe verständlicher Anwendungen an den Anfang des entsprechenden Kapitels gestellt. Andererseits sind die Anwendungen der Gruppe der Hahn-Banach-Sätze mannigfach. Schon auf Seite 6 in Föllmer und Schied [60] wird das Fundamentaltheorem der Vermögenspreisbildung (fundamental theorem of asset pricing), eine notwendige und hinreichende Bedingung zur Arbitrage-Freiheit (unter gegebenen Umständen), bewiesen und dabei das Hahn-Banach-Theorem als Trennungssatz benutzt, ebenso im dynamischen Teil der Theorie (S. 242) und bei der Behandlung konvexer Risikomaße (S. 162). Das trennende Funktional ist ein Element aus dem Dualraum eines Funktionenraumes. In Inoue [91] ergibt ein trennendes Funktional den gesuchten Gleichgewichtspreisvektor und es werden u.a. Resultate aus der ersten Arbeit (1873) zur Dualitätstheorie der linearen Optimierung von Gordan (1837–1912) verwendet (vgl. Focke und Göpfert [58]).

Zur allgemeinen Herleitung von Existenzaussagen für Subgradienten, Summenregeln bei Subdifferentialen (vgl. 5.4) und der Dualitätstheorie in der konvexen Optimierung (vgl. Abschnitt 5.8) spielen Trennungssätze (Abschnitt 5.3) (als Folgerungen aus dem Hahn-Banach-Satz) eine wesentliche Rolle. Auch für Optimierungsprobleme aus der Finanzmathematik können Dualitätsaussagen gezeigt werden, insbesondere für Optimierungsprobleme, wo in der Zielfunktion Risikomaße auftreten. Die duale Aufgabe wird im Sinne der Finanzmathematik interpretiert (vgl. Abschnitt 5.8.3). Weitere Anwendungen der Dualitätstheorie werden in Abschnitt 5.8 für Standortprobleme diskutiert.

Wir verwenden häufig Halbordnungen und Ordnungskegel. Halbordnungen (oder allgemeiner Ordnungsstrukturen in Mengen, vgl. die Abschnitte 10.4 und 10.1.5) sind grundlegend sowohl für theoretische Fragen (beim Beweis des Hahn-Banach-Satzes werden halbgeordnete Räume benutzt, beim Ekeland'schen Prinzip und bei Maximalpunkttheoremen stecken Halbordnungen im Kern der Aussage, vgl. Lemma 7.2) als auch für die Anwendungen, denn mit Ordnungsstrukturen lassen sich Präferenzen von Entscheidungsträgern modellieren und in der Mehrkriteriellen Optimierung bilden Ordnungsstrukturen die Grundlage des Effizienzbegriffes (vgl. Abschnitt 10.2). Die Beziehungen zwischen Ordnungsstrukturen und Ordnungskegeln finden sich in Satz 10.28. Bei Verwendung von Ordnungskegeln werden Maximalpunkttheoreme (und das Ekeland'sche Variationsprinzip) und natürlich der Effizienzbegriff einprägsam anschaulich (vgl. Abb. 7.1). Aliprantis und Tourky widmeten ihr Buch [5] über halbgeordnete Vektorräume dem Mathematiker und Ökonom L.V.Kantorovich, der für seine Forschungsarbeiten 1975 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften erhielt,

Auffällig ist in letzter Zeit die Hinwendung zu approximativen Gleichgewichtspunkten. Nicht nur, dass hier häufig generische Aussagen (das ist ein Grund, das Kapitel 4.1 über Kategoriesätze, insbesondere Abschnitt 4.4, genauer zu beachten) auftreten (z.B., unter Bedingungen sind „fast alle“ approximativen Gleichgewichte auch wirkliche Gleichgewichte), sondern approximative Lösungen existieren natürlich unter weit schwächeren Bedingungen als exakte Lösungen. Der Brouwer'sche Fixpunktsatz wird (vgl. Bich [23]) auf eine spezielle Klasse approximativer Fixpunkte verallgemeinert. Eine wesentliche Quelle für die Betrachtung approximativer Lösungen von Extremalproblemen ist das Ekeland'sche Variationsprinzip. Dieses liefert Näherungslösungen zu Optimalproblemen bzw. exakte Lösungen zu einem (in kontrollierbarer Weise) gestörten Problem. Wir heben u.a. die „Gâteaux-differenzierbare Version“ des Prinzips hervor, wodurch die Beziehungen zur Regel „erste Ableitung gleich null setzen“ beim Suchen von Optimalstellen einer Gâteaux-differenzierbaren Funktion offenbar werden (vgl. Lemma 7.1). Für das bei Problemen der Optimalen Steuerung wichtige Pontryagin'sche Maximumprinzip wird als eine der Anwendungen des Ekeland'schen Prinzips eine Version für ε-optimale Steuerungen hergeleitet. Im Ekeland'schen Prinzip versteckt sich ein Maximalpunkttheorem (vgl. Beispiel 7.1).

In Hilbert-Räumen spielt die Orthogonalität eine effiziente Rolle. Dies drückt sich sowohl in Projektionssätzen als auch in der Entwicklung von Elementen eines Hilbert-Raumes in eine Orthogonalreihe aus. Beides wird bei numerischen Anwendungen oft ausgenutzt. Aber auch andere Eigenschaften von Hilbert-Räumen finden Anwendungen, so wird (vgl. Podczeck [132]) bei der Untersuchung von Beziehungen zwischen Kern und Walras-Gleichgewichten in Austausch-Ökonomien von nicht separablen Hilbert-Räumen (als Raum der Güter; commodity space) und einem atomfreien Maßraum (als Raum der Agenten) ausgegangen. Die Beziehungen zur Mengenlehre werden aber noch interessanter, denn in dieser Arbeit werden die Kontinuumhypothese und schließlich (für ein Gegenbeispiel) nicht Lebesgue-messbare Mengen eingesetzt.

Distributionen und Fourier-Transformationen treten in wirtschaftswissenschaftlichen Sachverhalten häufig, aber manchmal versteckt auf. Natürlich spielen sie bei linearen Differentialgleichungen eine wichtige Rolle, wenn die „rechten Seiten“ der Gleichung z.B. einen Stoßvorgang (δ-Distribution) darstellen. Die zugehörigen Lösungen (= Grundlösungen) gestatten oft eine Darstellung der Lösung mit Faltungscharakter (dann kann Fourier-Transformation verwendet werden) oder dienen zur Überleitung des Differentialgleichungsproblems in ein Integralgleichungsproblem. In Ökonomien mit überlappenden Generationen führt (unter Bedingungen) die Bestimmung der Gleichgewichtspreise in Abhängigkeit von der Zeit auf Faltungsgleichungen (vgl. Demichelis und Polemarchakis [40]). Die Dirac-Distribution tritt u.a. als Spezialfall des Atoms bei Maßen auf. Ein großes Gebiet der Anwendung von Fourier-Transformationen sind Signaltheorie und Bildverarbeitung. Da in der modernen Wirtschaftswelt das Senden und das korrekte Empfangen von Signalen samt deren Verarbeitung (Bildverarbeitung) zunehmend breiteren Raum einnimmt, haben wir die Umwandlung digitaler in analoge Signale als Anwendungen zum Kapitel über Distributionen und Fourier-Transformationen mit aufgenommen.

Aus der Integrationstheorie haben wir aus Platzgründen nur einige Sätze dargestellt. Diese werden aber bei vielerlei Beweisen im Rahmen der Mathematischen Ökonomie, bei denen aus der (geeigneten) Konvergenz von Folgen z.B. auf die Existenz und Summierbarkeit des Grenzwertes geschlossen wird, angewandt.

Wir nennen schließlich stetige Transportprobleme (Massentransporte) etwa bei Stadtplanungen. Nicht nur, dass damit eines der historisch ersten Optimierungsprobleme in nicht endlichdimensionalen Räumen mit erfasst wird (Monge, 1746–1813), sondern in der modernen Literatur hierzu werden vielerlei funktionalanalytische Sachverhalte benutzt, es seien (vgl. z.B. Buttazzo, Santambrogio [29]) spezielle Metriken, die schwache* Topologie und die Dualitätstheorie erwähnt. Eine Diskussion von stetigen Transportproblemen (Massentransporte) unter Berücksichtigung stochastischer Aspekte wird in der Arbeit von Rüschendorf [147] vorgenommen. Auf eine Nutzung der Dualitätstheorie zur Herleitung von Lösungsverfahren für Standortprobleme und deren Anwendung in der Regionalplanung wird in der Arbeit von Hamacher, Klamroth und Chr. Tammer [74] im Buch „Die Kunst des Modellierens“ von Luderer eingegangen, vgl. auch [162]. In Abschnitt 7.4 unseres Buches wird ein Standortproblem gelöst.

Das vorliegende Buch richtet sich sowohl an Studierende in Bachelor- als auch in Master-Studiengängen. Für Studierende in Bachelor-Studiengängen sind die Abschnitte zur Approximationstheorie (Kapitel 2), zu linearen und nichtlinearen Funktionalen (Kapitel 3) und der Anhang (Kapitel 10) als Grundlage für Anwendungsgebiete in der Mathematischen Ökonomie geeignet. Wichtige Sätze der Funktionalanalysis wie zum Beispiel Trennungssätze in Hilbert-Räumen basierend auf Projektionen (Satz 5.7) sind für Studierende der Bachelor-Studiengänge nachvollziehbar. Allgemeinere Trennungssätze in Abschnitt 5.3 sind für Studierende in Master-Studiengängen von Bedeutung, ebenso die Kapitel zum Hahn-Banach-Theorem (Kapitel 5), zu Fixpunktsätzen (Kapitel 6), Variationsprinzipien (Kapitel 7), Distributionen (Kapitel 8) und zu halbbeschränkten Operatoren (Kapitel 9). Auch Wissenschaftler, die auf den Gebieten Angewandte Funktionalanalysis, Optimierungstheorie und Stochastik tätig sind, finden in unserem Buch eine umfassende Darstellung der funktionalanalytischen Grundlagen.

Auf Anwendungen der dargestellten Aussagen aus der Funktionalanalysis wird in unserem Buch großes Gewicht gelegt. Dazu sind in den Kapiteln Abschnitte mit Anwendungen und anwendungsorientierten Übungsaufgaben enthalten, wo geeignete Beispiele aus der Finanzmathematik, der Mathematischen Ökonomie und der Signaltheorie vorgestellt werden.

Zum ertragreichen Studium des Buches wäre es günstig, wenn der Leser bereits gute Grundlagenkenntnisse in der Analysis erworben und dabei Beweisführungen verstehen, nachvollziehen und selbst durchzuführen gelernt hat. Der Anhang ist bewusst sehr ausführlich ausgestaltet worden und kann auch unabhängig vom Haupttext im Selbststudium durchgearbeitet werden, er stellt den unverzichtbaren Kern dar, mit dessen Hilfe die weiteren Entfaltungsmöglichkeiten wahrgenommen werden können, die sich in den neun Kapiteln des Haupttextes eröffnen. Nach dem Studium des Buches und dem Durcharbeiten der Beispiele sollte der Leser imstande sein, einerseits in tiefergehende Kapitel der Optimierung und Stochastik eindringen zu können und andererseits einen leichteren Zugang für umfangreichere Anwendungsgebiete in der Mathematischen Ökonomie zu gewinnen.

Bei der Herstellung der computergestützten Anfertigung des Manuskripts haben uns Frau Sauter (Halle) und Frau M. Gaede-Samat (Dresden) in hervorragender Weise unterstützt. Wir möchten uns herzlich bedanken, ebenso beim Vieweg+Teubner Verlag für die gute Zusammenarbeit. Besonderen Dank richten wir an Herrn B. Luderer und Herrn W. Breckner für die gründliche Durchsicht des Manuskriptes und sehr konstruktive Anregungen. Weiterhin danken wir Herrn S. Dietze, Herrn A. Hamel und Herrn A. Löhne für nützliche Hinweise.

Im Dezember 2008,

Alfred Göpfert, Leipzig

Thomas Riedrich, Dresden

Christiane Tammer, Halle

Inhaltsverzeichnis

1 Anwendung der Funktionalanalysis

1.1 Beispiele zur Optimierungstheorie in allgemeinen Räumen

Betriebswirtschaftliche Aufgabenstellungen können oft als Approximationsprobleme oder als Probleme der optimalen Steuerung modelliert werden. Den natürlichen Rahmen dieser Problemstellungen bildet die Optimierung auf Funktionenräumen. Im Folgenden diskutieren wir einige Beispiele solcher Optimierungsprobleme.

Beispiel 1.1 (Ein Investitionsproblem als Optimierungsproblem auf Funktionenräumen)
In einem Unternehmen wird ein Mittel A hergestellt. Ein Teil des hergestellten Mittels soll durch Reinvestition (Allokation) zur Steigerung der Produktionskapazität genutzt werden (zum Beispiel Verkauf und anschließender Erwerb von weiteren Produktionsmitteln). Der Rest steht zur Konsumtion zur Verfügung. Der betrachtete Zeitrahmen wird durch einen Endzeitpunkt $T > 0$ fest vorgegeben. Für $t \in [0,T]$ bezeichnen

$x_P(t)$	die Produktionsrate (vorgegeben)
$x_I(t)$	die Reinvestitionsrate (gesucht)
$x_C(t)$	die Konsumrate (gesucht)

zur Zeit t. Dann gilt für alle $t \in [0,T]$ einerseits

$$x_P(t) = x_I(t) + x_C(t),$$

andererseits sind an die Funktionen x_I (und x_C) weitere Bedingungen zu stellen wie z.B.: Aus welchem Funktionenraum darf man x_I wählen? Eine Möglichkeit wäre $x_I \in C_{\mathbb{R}}[0,T]$ (aber man könnte auch an Funktionen mit Sprungstellen denken). Es gibt weitere Einschränkungen an x_I: x_I muss mindestens für einige $t \in [0,T]$ positiv sein. Wir wollen deshalb alle Bedingungen, denen die Reinvestitionsrate genügen muss, als $x_I \in K \subset C_{\mathbb{R}}[0,T]$ zusammenfassen.
Zielstellung im Unternehmen sei es, durch geschicktes und zulässiges Reinvestieren x_I den Gesamtkonsum zu maximieren:

$$\int_0^T x_C(t)\mathrm{d}t \;\to\; \max, \tag{1.1}$$

wobei

$$x_P(t) = x_I(t) + x_C(t),\; x_I \in K \subset C_{\mathbb{R}}[0,T],\; x_C \in C_{\mathbb{R}}[0,T].$$

Das ist ein Optimierungsproblem auf dem Funktionenraum $C_{\mathbb{R}}[0,T]$.

Beispiel 1.2 (Energieminimierung als Approximationsproblem)
Viele betriebswirtschaftliche Probleme lassen sich folgendermaßen formulieren: Die Bewegung eines Objektes mit festem Anfangs- und Endpunkt wird durch ein System von Differentialgleichungen beschrieben und soll so bestimmt werden, dass der dazu erforderliche Energieaufwand minimal wird. Die mathematische Formulierung dieses Problems lautet:

Es seien $T > 0$, $t \in [0,T]$ und $A : t \to A(t)$ ($A(t)$ ist eine reelle $(n \times n)$-Matrix für jedes $t \in [0,T]$) und $B : t \in [0,T] \to B(t) \in \mathbb{R}^n$ gegebene stetige Abbildungen. Wir untersuchen nun das Problem, den **Zustand** des Systems $x \in (C_{\mathbb{R}}[0,T])^n$, stückweise stetig differenzierbar, und eine **Steuerung** $u \in S[0,T]$, stückweise stetig, so zu bestimmen, dass für gegebene $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\forall t \in [0,T] \ : \ \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0,\ x(T) = x_T \tag{1.2}$$

und der gesamte Energieaufwand minimal wird, also

$$\int_0^T (u(t))^2 \mathrm{d}t \to \min \tag{1.3}$$

erfüllt ist. Die Beziehungen (1.2) und (1.3) zusammen werden ein **Problem der optimalen Steuerung** genannt. Wir setzen voraus, dass eine Steuerung $u \in S[0,T]$ existiert, sodass das Randwertproblem (1.2) lösbar ist. Diese Lösung hat folgende Struktur (und hängt von u ab):

$$x(t) = \Phi(t) \left(x_0 + \int_0^t (\Phi(s))^{-1} B(s)u(s)\mathrm{d}s \right),$$

wobei Φ eine Fundamental-Matrix der Differentialgleichung in (1.2) ist. Mittels

$$(y_1(s), \ldots, y_n(s)) := \Phi(T)(\Phi(s))^{-1} B(s)$$

und

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix} := x_T - \Phi(T)x_0,$$

kann das eben beschriebene Problem als **Approximationsproblem** vom Typ (2.2) formuliert werden:

$$(P_{CP}) \qquad ||u||^2 = \int_0^T (u(t))^2 \mathrm{d}t \to \min_{u \in S},$$

wobei

$$S := \{u \in S[0,T] \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \ \langle y_i \mid u \rangle = c_i\}.$$

In Problem (P_{CP}) ist die Abstandsfunktion (vergleiche (2.2)) mit $x_0 = 0$ gegeben durch $d(u,0) = ||u - 0||$, $u \in K = S$. Die Zielfunktion in (P_{CP}) ist das Quadrat des Abstandes. Es ist nun möglich, das Problem (P_{CP}) unter Nutzung des Approximationssatzes (Satz 2.1) zu lösen (vgl. Beispiel 2.5).

Beispiel 1.3 (Ein Modell zur Ermittlung des optimalen Abbaus nicht erneuerbarer Ressourcen)
Im Folgenden soll mit einem kontrolltheoretischen Ansatz ein weiteres Beispiel für ein Optimierungsproblem auf einem Funktionenraum diskutiert werden. Der Bestand einer Ressource zum Zeitpunkt t werde mit $z(t)$ bezeichnet und stellt den Zustand des Systems dar, wobei zu Beginn des Betrachtungszeitraums $[0, \overline{T}]$ noch $z(0) := z_0$ Einheiten der Ressource vorhanden sind. Als Kontrollvariable fungiert die Abbauintensität $q(t)$. Die Zielstellung des Unternehmens, das Eigentümer der nicht erneuerbaren Ressource ist, besteht darin, den Abbau der Ressource so vorzunehmen (zu steuern), dass der Gewinn maximal wird. Dabei wird angenommen, dass kein anderes Unternehmen diese Ressource am Markt anbietet, sodass der Ressourceneigner als Monopolist agieren kann. Ein monopolistisches Unternehmen kann entweder den Preis oder die Absatzmenge in gewissen Grenzen frei wählen. Der jeweils andere Wert ist mit Hilfe der **Preis-Absatz-Funktion** ableitbar.

Der Preis stellt den Erwartungsparameter dar und ist eine Funktion der Kontrollvariable q. Dabei wird unterstellt, dass die im Zeitpunkt t abgebaute Ressourcenmenge $q(t)$ sofort am Markt abgesetzt wird, wodurch Zwischenlagerungen ausgeschlossen werden und die Abbauintensität der Absatzmenge entspricht.