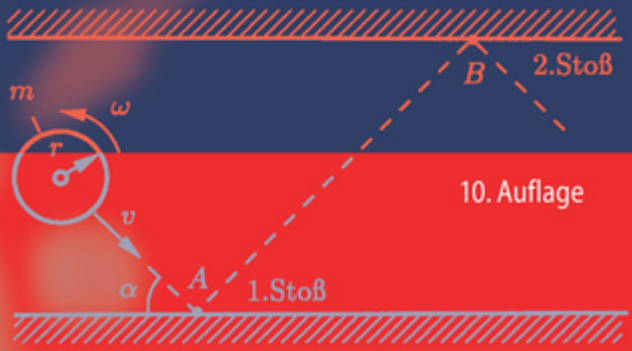
Gross · Ehlers · Wriggers
Schröder · Müller

Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 3

Kinetik, Hydrodynamik



10. Auflage

Springer Vieweg

Prof. Dr.-Ing. Dietmar Gross
studierte Angewandte Mechanik und promovierte an der Universität Rostock. Er habilitierte an der Universität Stuttgart und ist seit 1976 Professor für Mechanik an der TU Darmstadt. Seine Arbeitsgebiete sind unter anderem die Festkörper- und Strukturmechanik sowie die Bruchmechanik. Hierbei ist er auch mit der Modellierung mikromechanischer Prozesse befasst. Er ist Mitherausgeber mehrerer internationaler Fachzeitschriften sowie Autor zahlreicher Lehr-und Fachbücher.

Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Ehlers
studierte Bauingenieurwesen an der Universität Hannover, promovierte und habilitierte an der Universität Essen und war 1991 bis 1995 Professor für Mechanik an der TU Darmstadt. Seit 1995 ist er Professor für Technische Mechanik an der Universität Stuttgart. Seine Arbeitsgebiete umfassen die Kontinuumsmechanik, die Materialtheorie, die Experimentelle und die Numerische Mechanik. Dabei ist er insbesondere an der Modellierung mehrphasiger Materialen bei Anwendungen im Bereich der Geomechanik und der Biomechanik interessiert.

Prof. Dr.-Ing. Peter Wriggers
studierte Bauingenieur- und Vermessungswesen, promovierte 1980 an der Universität Hannover und habilitierte 1986 im Fach Mechanik. Er war Gastprofessor an der UC Berkeley, USA und Professor für Mechanik an der TH Darmstadt. Ab 1998 war er Professor für Baumechanik und Numerische Mechanik an der Universität Hannover, und er ist seit 2008 Professor für Kontinuumsmechanik in der dortigen Fakultät für Maschinenbau. Seit 2008 steht er der German Association for Computational Mechanics (GACM) als Präsident vor und ist seit 2010 Vizepräsident der IACM.

Prof. Dr.-Ing. Jörg Schröder
studierte Bauingenieurwesen, promovierte an der Universität Hannover und habilitierte an der Universität Stuttgart. Nach einer Professur für Mechanik an der TU Darmstadt ist er seit 2001 Professor für Mechanik an der Universität Duisburg-Essen. Seine Arbeitsgebiete sind unter anderem die theoretische und die computerorientierte Kontinuumsmechanik sowie die phänomenologische Materialtheorie mit Schwerpunkten auf der Formulierung anisotroper Materialgleichungen und der Weiterentwicklung der Finite-Elemente-Methode.

Prof. Dr.-Ing. Ralf Müller
studierte Maschinenbau und Mechanik an der TU Darmstadt und promovierte dort 2001. Nach einer Juniorprofessur mit Habilitation im Jahr 2005 an der TU Darmstadt leitet er seit 2009 den Lehrstuhl für Technische Mechanik im Fachbereich Maschinenbau und Verfahrenstechnik der TU Kaiserslautern. Seine Arbeitsgebiete sind unter anderem mehrskalige Materialmodellierung, gekoppelte Mehrfeldprobleme, Defekt- und Mikromechanik. Er beschäft igt sich im Rahmen numerischer Verfahren mit Randelemente- und Finite-Elemente-Methoden.

Dietmar Gross · Wolfgang Ehlers
Peter Wriggers · Jörg Schröder · Ralf Müller

Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 3

Kinetik, Hydrodynamik

10., erweiterte Auflage

Springer Vieweg

Prof. Dr.-Ing. Dietmar Gross
Technische Universität Darmstadt
Festkörpermechanik
Hochschulstr. 1
64289 Darmstadt
Deutschland
gross@mechanik.tu-darmstadt.de

Prof. Dr.-Ing. Jörg Schröder
Universität Duisburg-Essen
Institut für Mechanik
Universitätsstr. 15
45141 Essen
Deutschland
j.schroeder@uni-due.de

Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Ehlers
Universität Stuttgart
Institut für Mechanik
Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik
Pfaffenwaldring 7
70569 Stuttgart
Deutschland
wolfgang.ehlers@mechbau.uni-stuttgart.de

Prof. Dr.-Ing. Ralf Müller
TU Kaiserslautern
Lehrstuhl für Technische Mechanik
Gottlieb-Daimler-Straße
67663 Kaierslautern
Deutschland
ram@rhrk.uni-kl.de

Prof. Dr.-Ing. Peter Wriggers
Leibniz Universität Hannover
Institut für Kontinuumsmechanik
Appelstraße 11
30167 Hannover
Deutschland
wriggers@ikm.uni-hannover.de

ISSN 0937-7433
ISBN 978-3-642-29566-9
DOI 10.1007/978-3-642-29567-6
ISBN 978-3-642-29567-6 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Vieweg
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1996, 1998, 2003, 2005, 2006, 2008, 2011, 2012
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist eine Marke von Springer DE.
Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-vieweg.de

Vorwort

Dieser dritte Band schließt die Reihe der Aufgaben zum Grundkurs in Technischer Mechanik ab.

Erfahrungsgemäß bereitet die Kinetik den Studenten besondere Schwierigkeiten, da neben den Kraftbegriff nun zusätzliche kinematische Größen treten, die untereinander und mit den Kraftgrößen richtig verknüpft werden müssen. Wir haben uns daher bemüht, durch zahlreiche rein kinematische Aufgaben Verständnis für die bei einer Bewegung maßgebenden geometrischen Größen und ihre Beschreibung in verschiedenen Koordinatensystemen zu wecken. Ebenso kann man nur durch Übung, d.h. durch selbständiges Bearbeiten von Aufgaben, Erfahrungen darüber sammeln, welche der kinetischen Grundgleichungen bei welcher Aufgabe am einfachsten zum Ziel führt. Häufig gibt es mehrere Lösungswege, und wir haben diese auch oft nebeneinandergestellt, damit der Leser selbst Vor- und Nachteile erkennen kann.

Die Aufgaben werden - wie auch schon im ersten und zweiten Band - weitgehend formelmäßig gelöst, da das Aufstellen der Grundgleichungen und deren allgemeine Lösung zunächst wichtiger als reine Zahlenrechnungen sind.

Für das Studium aller drei Bände möchten wir die Studierenden nochmals ermuntern, sich an den Aufgaben zunächst selbst zu versuchen und dabei unter Umständen auch andere Lösungswege einzuschlagen. Eine Aufgabensammlung ist nur ein Hilfsmittel beim Studium der Mechanik. Um zu einem tieferen Verständnis, insbesondere über die Herkunft und Anwendung der verschiedenen Sätze und Formeln zu gelangen, muss der Studierende auch Lehrbücher zur Hand nehmen. Unser Literaturverzeichnis nennt einige Titel.

Die Aufgabensammlung geht zu einem guten Anteil auf unseren verstorbenen Kollegen Prof. Dr. Dr. h.c. Walter Schnell zurück, der auch bis zur 5. Auflage Mitautor war. Mit der vorliegenden 10. Auflage sind die Professoren J. Schröder und R. Müller zum Autorenteam gestoßen. Sie haben mit dazu beigetragen, die Sammlung vollständig zu überarbeiten und zu ergänzen.

Wir danken dem Springer-Verlag, in dem auch unsere Lehrbücher zur Technischen Mechanik erschienen sind, für die gute Zusammenarbeit und die ansprechende Ausstattung des Buches. Wir wünschen auch dieser Auflage eine freundliche Aufnahme bei der interessierten Leserschaft.

Darmstadt, Stuttgart, Hannover,
Essen und Kaiserslautern, im Sommer 2012

D. Gross
W. Ehlers
P. Wriggers
J. Schröder
R. Müller

Inhaltsverzeichnis

	Literaturhinweise, Bezeichnungen	IX
1	Kinematik des Punktes	1
2	Kinetik des Massenpunktes	29
3	Bewegung des Massenpunktsystems	59
4	Kinematik des starren Körpers	73
5	Kinetik des starren Körpers	93
6	Stoßvorgänge	139
7	Schwingungen	159
8	Relativbewegung	183
9	Prinzipien der Mechanik	197
10	Hydrodynamik	213

Literaturhinweise

Lehrbücher

Gross, D., Hauger, W., Schröder, J., Wall, W., Technische Mechanik, Band 3: Kinetik, 12. Auflage. Springer-Verlag, Berlin 2012

Gross, D., Hauger, W., Wriggers, P., Technische Mechanik, Band 4: Hydromechanik, 8. Auflage. Springer-Verlag, Berlin 2011

Hagedorn, P., Technische Mechanik, Band 3: Dynamik, 3. Auflage. Harri Deutsch, Frankfurt 2006

Bahlke, H., Einführung in die Technische Mechanik, Kinetik, 3. Auflage. Springer-Verlag, Berlin 2011

Mahnken, R., Lehrbuch der Technischen Mechanik, Dynamik, 2. Auflage. Springer-Verlag, Berlin 2011

Hibbeler, R.C., Technische Mechanik 3: Dynamik, 10. Auflage. Pearson-Studium 2006

Brommund, E., Sachs, G., Sachau, D., Technische Mechanik, 4. Auflage. Oldenbourg, München 2006

Magnus, K., Müller-Slany, H.H., Grundlagen der Technischen Mechanik, 7. Auflage. Springer-Vieweg, 2005

Wriggers, P., Nackenhorst, U. u.a., Technische Mechanik kompakt, 2. Auflage. Teubner, Stuttgart 2006

Aufgabensammlungen

Bruhns, O. T., Aufgabensammlung Technische Mechanik 3, Vieweg, Braunschweig 1999

Dankert, H., Dankert, J., Technische Mechanik, 6. Auflage. Vieweg + Teubner, Stuttgart 2011

Hauger, W., Lippmann, H., Mannl, V., Aufgaben zu Technische Mechanik 1-3. Springer-Verlag, Berlin 2008

Hagedorn, P., Aufgabensammlung Technische Mechanik, 2. Auflage. Teubner, Stuttgart 1992

Bezeichnungen

Bei den Lösungen der Aufgaben wurden folgende Symbole verwendet:

$\uparrow$: Abkürzung für *Bewegungsgesetz (Kräftesatz, Impulssatz) in Pfeilrichtung.*

$\overset{\curvearrowleft}{A}$: Abkürzung für *Momentensatz (Drallsatz) bezüglich des Punktes A mit vorgegebener Drehrichtung.*

$\rightsquigarrow$ Abkürzung für *hieraus folgt.*

Kapitel 1

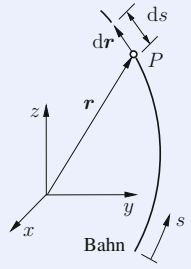
1 Kinematik des Punktes

D. Gross et al., *Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 3,*
DOI 10.1007/978-3-642-29567-6_1, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012

Die Lage eines Punkte P im Raum wird durch den **Ortsvektor**

$$\boldsymbol{r}(t)$$

beschrieben.



Aus der Verschiebung $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ des Punktes P in eine Nachbarlage während der Zeit $\mathrm{d}t$ folgt seine **Geschwindigkeit**

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}}\,.$$

Die Geschwindigkeit ist stets tangential zur Bahn gerichtet. Mit der Bogenlänge s und $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}s$ gilt für den Betrag der Geschwindigkeit

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}\,.$$

Die zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{v}(t)$ heißt **Beschleunigung**

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}}\,.$$

Die Beschleunigung ist im allgemeinen *nicht* tangential zur Bahn gerichtet!

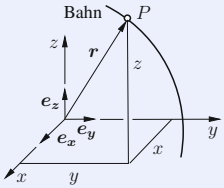
Die Vektoren $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{a}$ lassen sich in speziellen Koordinatensystemen wie folgt darstellen:

a) Kartesische Koordinaten mit den Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$:

$$\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{e}_x + y\,\boldsymbol{e}_y + z\,\boldsymbol{e}_z\,,$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\,\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\,\boldsymbol{e}_y + \dot{z}\,\boldsymbol{e}_z\,,$$

$$\boldsymbol{a} = \ddot{x}\,\boldsymbol{e}_x + \ddot{y}\,\boldsymbol{e}_y + \ddot{z}\,\boldsymbol{e}_z\,.$$

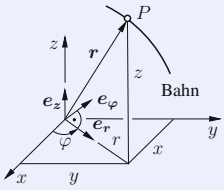


b) Zylinderkoordinaten mit den Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$:

$$\boldsymbol{r} = r\,\boldsymbol{e}_r + z\,\boldsymbol{e}_z\,,$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi + \dot{z}\,\boldsymbol{e}_z\,,$$

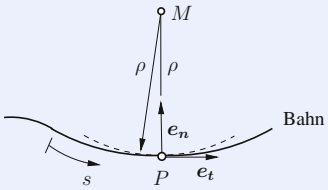
$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\,\boldsymbol{e}_\varphi + \ddot{z}\,\boldsymbol{e}_z\,.$$



c) Natürliche Koordinaten mit den Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_t$ und $\boldsymbol{e}_n$ in Richtung der Tangente bzw. der Hauptnormalen.

$$\boldsymbol{v} = v\,\boldsymbol{e}_t\ ,$$

$$\boldsymbol{a} = \dot{v}\,\boldsymbol{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\,\boldsymbol{e}_n\ .$$



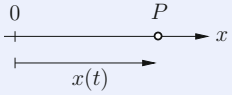
Dabei sind:

ρ	=	Krümmungsradius (Abstand zwischen P und Krümmungsmittelpunkt M),
$v = \dot{s} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$	=	Bahngeschwindigkeit,
$a_t = \dot{v} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$	=	Bahnbeschleunigung,
$a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$	=	Normal- oder Zentripetalbeschleunigung.

Anmerkung: Die beiden Komponenten der Beschleunigung liegen in der sogenannten *Schmiegungsebene*. Der Beschleunigungsvektor zeigt stets ins „Innere“ der Bahn.

Geradlinige Bewegung

Weg	$x(t)$,
Geschwindigkeit	$v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}$,
Beschleunigung	$a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v} = \ddot{x}$.

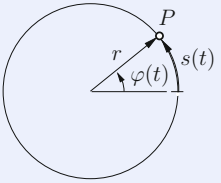


Kreisbewegung

Für $\rho = r = \text{const}$ und $s = r\varphi(t)$ erhält man in natürlichen Koordinaten

Geschwindigkeit	$v = r\dot{\varphi} = r\omega$,
Bahnbeschleunigung	$a_t = r\ddot{\varphi} = r\dot{\omega}$,
Zentripetalbeschleunigung	$a_n = \dfrac{v^2}{r} = r\omega^2$

mit $\omega = \dot{\varphi} =$ Winkelgeschwindigkeit.



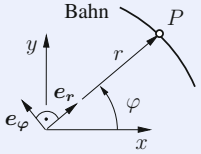
Ebene Bewegung in Polarkoordinaten

Aus den Beziehungen für Zylinderkoordinaten folgen für $z = 0$, $\dot{\varphi} = \omega$

$$\boldsymbol{v} = v_r \boldsymbol{e}_r + v_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi \,, \qquad \boldsymbol{a} = a_r \boldsymbol{e}_r + a_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi$$

mit

Radialgeschwindigkeit	$v_r = \dot{r}$,
Zirkulargeschwindigkeit	$v_\varphi = r\omega$,
Radialbeschleunigung	$a_r = \ddot{r} - r\omega^2$,
Zirkularbeschleunigung	$a_\varphi = r\dot{\omega} + 2\dot{r}\omega$.



Anmerkung: Bei einer *Zentralbewegung* verschwindet die Zirkularbeschleunigung. Aus $a_\varphi = r\dot{\omega} + 2\dot{r}\omega = (r^2\omega)^{\cdot}/r = 0$ ergibt sich dann der „Flächensatz“ (2. KEPLERsches Gesetz) $r^2\omega = \text{const}$.

Kinematische Grundaufgaben für geradlinige Bewegung

Der Bewegungsanfang zur Zeit t_0 sei durch den Anfangsweg x_0 und die Anfangsgeschwindigkeit v_0 gegeben.

Gegeben	Gesuchte Größen
$a = 0$	$v = v_0 = \text{const}\,, \qquad x = x_0 + v_0 t$ *gleichförmige Bewegung*
$a = a_0 = \text{const}$	$v = v_0 + a_0 t\,, \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$ *gleichmäßig beschleunigte Bewegung*
$a = a(t)$	$v = v_0 + \int\limits_{t_0}^{t} a(\bar{t})\mathrm{d}\bar{t}\,, \quad x = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} v(\bar{t})\mathrm{d}\bar{t}$
$a = a(v)$	$t = t_0 + \int\limits_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}\bar{v}}{a(\bar{v})} = f(v)\,, \quad x = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} F(\bar{t})\mathrm{d}\bar{t}$ mit der Umkehrfunktion $v = F(t)$
$a = a(x)$	$v^2 = v_0^2 + 2\int\limits_{x_0}^{x} a(\bar{x})\mathrm{d}\bar{x}\,, \quad t = t_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\bar{x}}{v(\bar{x})} = g(x)$ Die Umkehrfunktion liefert $x = G(t)$

Anmerkungen:

- Die Formeln lassen sich auch bei einer allgemeinen Bewegung anwenden, wenn man x durch s und a durch die Bahnbeschleunigung a_t ersetzt. Die Normalbeschleunigung folgt dann aus $a_n = v^2/\rho$.
- Falls die Geschwindigkeit als Funktion des Weges gegeben ist, folgt die Beschleunigung aus

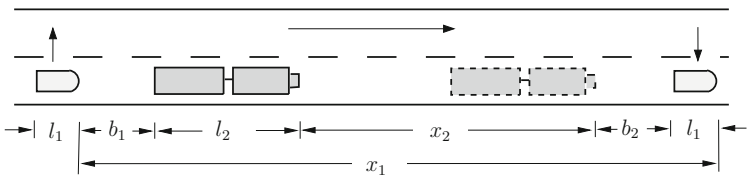
$$a = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v^2}{2}\right) \,.$$

Aufgabe 1.1 Der Mindestabstand b zwischen zwei Kraftfahrzeugen soll so groß sein wie die Strecke, die das nachfolgende Fahrzeug innerhalb von $t_S = 2\,\mathrm{s}$ bei seiner jeweiligen Geschwindigkeit zurücklegt. **A1.1**

a) Wie groß ist die Überholstrecke x_1?

b) Für welche Zeit $t_{ü}$ befindet sich ein PKW (Länge $l_1 = 5\,\mathrm{m}$, konstante Geschwindigkeit $v_1 = 120\,\mathrm{km/h}$) mindestens auf der Überholspur, wenn er einen LKW (Länge $l_2 = 15\,\mathrm{m}$, Geschwindigkeit $v_2 = 80\,\mathrm{km/h}$) korrekt überholt? (Die Zeiten für das Wechseln der Spur sollen unberücksichtigt bleiben.)

Lösung



zu a) Bei gleichförmiger Bewegung folgen die Mindestabstände mit $1\,\mathrm{km/h} = 1000\,\mathrm{m}/3600\,\mathrm{s}$ zu

$$b_1 = v_1\, t_S = \frac{120}{3,6} \cdot 2 = \frac{200}{3}\,\mathrm{m}\,, \qquad b_2 = v_2\, t_S = \frac{80}{3,6} \cdot 2 = \frac{400}{9}\,\mathrm{m}\,.$$

Die Überholstrecke beträgt daher

$$x_1 = b_1 + l_2 + x_2 + b_2 + l_1\,.$$

Außerdem gilt

$$x_2 = v_2\, t_{ü}\,, \qquad x_1 = v_1 t_{ü}\,.$$

Elimination von $t_{ü}$ liefert

$$\underline{\underline{x_1}} = \frac{b_1 + b_2 + l_1 + l_2}{1 - \frac{v_2}{v_1}} = \frac{\frac{200}{3} + \frac{400}{9} + 5 + 15}{1 - \frac{80}{120}} = \frac{1180}{3} = \underline{\underline{393,33\,\mathrm{m}}}\,.$$

zu b) Für die Überholzeit ergibt sich damit

$$\underline{\underline{t_{ü}}} = \frac{x_1}{v_1} = \frac{1180 \cdot 3,6}{3 \cdot 120} = \underline{\underline{11,8\,\mathrm{s}}}\,.$$

A1.2 **Aufgabe 1.2** Zur Simulation schwereloser Zustände werden Vakuum-Fallschacht-Anlagen benutzt. Ein solcher Schacht habe eine Tiefe von $l = 200$ m.

Welche maximale Versuchszeit t_1 und welche Versuchsstrecke x_1 im freien Fall stehen zur Verfügung, wenn der Versuchskörper nach Durchfallen der Meßstrecke mit $a_{II} = -50\ g$ auf $v = 0$ abgebremst wird?

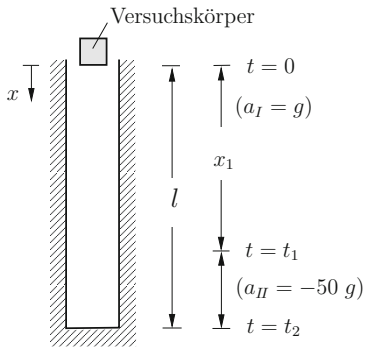
Lösung Da der Körper aus der Ruhelage losgelassen wird ($x_0 = v_0 = 0$), gilt mit $a_I = \text{const} = g$ für den freien Fall

$$v_I = gt\,, \qquad x_I = \frac{g}{2}t^2\,.$$

Beim Abbremsen folgen mit $a_{II} = -50\ g$ für Geschwindigkeit und Weg

$$v_{II} = v_{II_0} - 50\ gt\,,$$

$$x_{II} = x_{II_0} + v_{II_0}\ t - 50\ gt^2/2\,.$$



Man beachte, dass die Integrationskonstanten x_{II_0} und v_{II_0} hier keine direkte physikalische Bedeutung haben.

Für $t = t_2$ muss gelten:

$$v_{II}(t_2) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad v_{II_0} = 50\,gt_2\,,$$

$$x_{II}(t_2) = l \quad \rightsquigarrow \quad x_{II_0} = l - v_{II_0}\,t_2 + \frac{50}{2}\,gt_2^2 = l - 25\,gt_2^2\,.$$

Aus den Übergangsbedingungen

$$v_I(t_1) = v_{II}(t_1) \quad \rightsquigarrow \quad gt_1 = 50\,g(t_2 - t_1)\,,$$

$$x_I(t_1) = x_{II}(t_1) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{g}{2}\,t_1^2 = l - \frac{50}{2}\,gt_2^2 + 50\,gt_1t_2 - \frac{50}{2}\,gt_1^2$$

folgen durch Auflösen

$$\underline{\underline{t_1}} = \sqrt{\frac{100\ l}{51\ g}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 200}{51 \cdot 9,81}} = \underline{\underline{6,32\ \text{s}}}\,,$$

$$\underline{\underline{x_1}} = x_I(t_1) = \frac{g}{2}\,t_1^2 = \frac{g}{2}\,\frac{100\,l}{51\,g} = \frac{50}{51}\,l = \underline{\underline{196\ \text{m}}}\,.$$

Aufgabe 1.3 Eine U-Bahn legt zwischen 2 Stationen einen Weg von 3 km zurück. Aus der Anfahrbeschleunigung $a_A = 0,2\,\mathrm{m/s^2}$, der Bremsverzögerung $a_B = -0,6\,\mathrm{m/s^2}$ und der Höchstgeschwindigkeit $v^* = 90\,\mathrm{km/h}$ sollen der Anfahrweg, der Bremsweg, die Wegstrecke der gleichförmigen Bewegung und die Fahrzeit ermittelt werden. A1.3

Lösung Aus der konstanten Beschleunigung a_A folgt beim Anfahren ein Geschwindigkeitsverlauf

$$v_A = a_A t\ .$$

Mit der vorgegebenen Höchstgeschwindigkeit findet man die Anfahrtzeit

$$t_A = \frac{v^*}{a_A} = \frac{90 \cdot 1000}{3600 \cdot 0,2} = 125\,\mathrm{s}$$

und den Anfahrweg

$$\underline{\underline{s_A}} = \frac{1}{2}\, a_A t_A^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 125^2 = \underline{\underline{1563\,\mathrm{m}}}\ .$$

Beim Bremsen mit konstanter Verzögerung a_B gilt für die Geschwindigkeit

$$v_B = v^* + a_B t\ .$$

Die Zeit t_B bis zum Anhalten ($v_B = 0$) wird daher

$$t_B = -\frac{v^*}{a_B} = -\frac{90 \cdot 1000}{3600 \cdot (-0,6)} = 41,67\,\mathrm{s}\ ,$$

und der zughörige Bremsweg ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\underline{\underline{s_B}} &= v^* t_B + \frac{1}{2}\, a_B t_B^2 = \frac{90 \cdot 1000}{3600} \cdot 41,67 - \frac{1}{2} \cdot 0,6 \cdot 41,67^2 \\ &= 1041,75 - 520,92 = \underline{\underline{521\,\mathrm{m}}}\ .\end{aligned}$$

Für die Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit v^* bleibt dann ein Weg von

$$\underline{\underline{s^*}} = 3000 - s_A - s_B = \underline{\underline{916\,\mathrm{m}}}\ .$$

Hierzu gehört eine Zeit

$$t^* = \frac{s^*}{v^*} = \frac{916 \cdot 3600}{90 \cdot 1000} = 36,64\,\mathrm{s}\ .$$

Die Gesamtfahrzeit wird damit

$$\underline{\underline{T}} = t_A + t^* + t_B = 203,31\,\mathrm{s} = \underline{\underline{3,39\,\mathrm{min}}}\ .$$