

Benjamin Auer  
Franz Seitz

# **Grundkurs Wirtschaftsmathematik**

Prüfungsrelevantes Wissen –  
Praxisnahe Aufgaben –  
Komplette Lösungswege

3. Auflage



LEHRBUCH

Benjamin Auer / Franz Seitz

Grundkurs Wirtschaftsmathematik

Benjamin Auer  
Franz Seitz

# **Grundkurs Wirtschaftsmathematik**

Prüfungsrelevantes Wissen –  
Praxisnahe Aufgaben –  
Komplette Lösungswege

3. Auflage



Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek  
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der  
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über  
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

**Dr. Franz Seitz** ist Professor für Volkswirtschaftslehre, insbesondere Geldpolitik und Finanzmärkte, sowie Wirtschaftsmathematik an der Hochschule für angewandte Wissenschaften Amberg-Weiden.

**Dipl.-Betriebsw. (FH) Benjamin Auer** ist Doktorand an der wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Universität Leipzig sowie Buchautor in den Bereichen Mathematik, Statistik und Buchführung.

1. Auflage 2006
2. Auflage 2010
3. Auflage 2011

Alle Rechte vorbehalten  
© Gabler Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2011

Lektorat: Irene Buttkus

Gabler Verlag ist eine Marke von Springer Fachmedien.  
Springer Fachmedien ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.  
[www.gabler.de](http://www.gabler.de)



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkellOpka Medienentwicklung, Heidelberg  
Druck und buchbinderische Verarbeitung: Ten Brink, Meppel  
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier  
Printed in the Netherlands

ISBN 978-3-8349-2932-7

---

# Vorwort

---

## **Vorwort zur 3. Auflage**

Liebe Leserinnen und Leser,

wir freuen uns, Ihnen hiermit die 3. Auflage von „Grundkurs Wirtschaftsmathematik“ präsentieren zu dürfen. Aufgrund zahlreicher Rückmeldungen aus der Leserschaft, in denen betont wird, dass die einfache und verständliche Darstellung des Themengebietes der Wirtschaftsmathematik und die vielen Beispiele und Übungsaufgaben mit kompletten Lösungen (im Buch und im Online-Service) wesentliche Stärken des Buches darstellen, haben wir bei der Neuauflage die Grundkonzeption beibehalten und uns im Wesentlichen auf eine Korrektur der Fehler und kleine Ergänzungen inhaltlicher Art beschränkt.

Wir wünschen Ihnen weiterhin viel Erfolg bei der Arbeit mit dem Lehrbuch und den Online unter [www.wima-auer-seitz.de](http://www.wima-auer-seitz.de) zur Verfügung stehenden Materialien und danken an dieser Stelle Dipl.-Wirtsch.-Math. Martin Schuster und Steffen Burkhardt für ein abschließendes Korrekturlesen und -rechnen sowie wertvolle Hinweise und Verbesserungsvorschläge.

Weiden i. d. OPf. und Leipzig,  
Juli 2011

Prof. Dr. Franz Seitz  
Dipl.-Betriebsw. (FH) Benjamin R. Auer

## **Vorwort zur 2. Auflage**

Liebe Leserinnen und Leser,

mit dieser 2. Auflage erscheint „Grundkurs Wirtschaftsmathematik“ in vollständig neuer Optik und inhaltlich komplett überarbeitet. Konkrete Rechenbeispiele wurden in leserfreundlicher Form vom theoretischen Text abgehoben und Gleichungen zur besseren Referenz nummeriert. Die Fehler, die sich in die 1. Auflage eingeschlichen hatten, wurden korrigiert und die Inhalte um weitere Themenbereiche erweitert. So werden nun z. B. auch Abschreibungen, das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung, die Regel von l' Hospital, numerische Integrationsverfahren, elementare Differenzialgleichungen, Matrizengleichungen und die lineare Optimierung thematisiert.

Auch der Online-Service zum Buch unter [www.wima-auer-seitz.de](http://www.wima-auer-seitz.de) wurde überarbeitet und erweitert. Wie bisher finden sich dort die Grafiken des Buches zum Einsatz in der Vorlesung, eine auf das Buch abgestimmte Formelsammlung und zahlreiche Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen. Darüber hinaus bieten wir nun auch eine Vielzahl von MS-Excel-Tools, mit denen Rechenbeispiele und Verfahren einfach nachvollzogen und praktisch umgesetzt werden können. Sie sind in

der Praxis insbesondere für finanzmathematische Fragestellungen, numerische Verfahren und das Lösen von Gleichungssystemen relevant. Immer dann, wenn zu einem Thema oder Beispiel ein entsprechendes Tool im Online-Service zur Verfügung steht, wurde dies durch das Symbol  am Seitenrand kenntlich gemacht. *Benutzernamen und Passwort* für den Zugang zum Online-Service können Sie über das Kontaktmenu auf [www.wima-auer-seitz.de](http://www.wima-auer-seitz.de) anfordern.

Wir wünschen an dieser Stelle allen Leserinnen und Lesern viel Erfolg bei der Arbeit mit dem Lehrbuch und den neuen Materialien. Wir danken Gisela Becker, Prof. Dr. Hans Benker, Prof. Dr. Martin Biewen, Prof. Dr. Frank Brand, Prof. Dr. Claudia Cottin, Prof. Dr. Regina Fischer, Prof. Dr. Gert-Harald Fröhlich, Prof. Dr. Andreas Gadatsch, Dr. Andreas Hilpert, Björn Jensen, Anastasia Luja, Prof. Dr. Volker Nollau, Stefan Riebl, Prof. Dr. Albert Ruff, Prof. Dr. Ulrich Sax, Prof. Dr. Rainer Schwabe, Prof. Stephan Dempe, Prof. Dr. Jürgen Strobel und Prof. Dr. Rudolf Voller für wertvolle Hinweise und Verbesserungsvorschläge. Besonderer Dank gilt Herrn Steffen Burkhardt für ein abschließendes Korrekturlesen.

Weiden i. d. OPf. und Leipzig,  
August 2009

Prof. Dr. Franz Seitz  
Dipl.-Betriebsw. (FH) Benjamin R. Auer

## **Vorwort zur 1. Auflage**

Liebe Leserinnen und Leser,

mit diesem Buch liegt Ihnen ein Werk vor, das Ihnen die wesentlichen Themenbereiche der Wirtschaftsmathematik verständlich, anschaulich und doch knapp näherbringen soll. Vergessen Sie Mathematikbücher, bei denen Sie bereits nach den ersten Seiten an sich zu zweifeln beginnen, da Sie kein Wort verstehen.

Dieses wirtschaftsmathematische Grundlagenbuch soll Ihnen als Lehrendem helfen, das heikle Thema Mathematik verständlich und studentengerecht für Ihren Unterricht aufzubereiten. Ihnen als Studierenden soll es dazu dienen, alle relevanten Themen für Ihre Klausur noch einmal zu wiederholen und mit Hilfe zahlreicher Übungsaufgaben zu festigen. Bei der Lösung dieser Aufgaben werden Sie nicht alleine gelassen. Anders als in anderen Lehrbüchern wird Ihnen nicht einfach ein Ergebnis ohne Rechenweg und Erläuterung präsentiert. Stattdessen wird nachvollziehbar und anschaulich jeder einzelne Rechenschritt und die allgemeine Vorgehensweise erklärt.

Bei der Darstellung der Themenbereiche achten wir besonders auf Klarheit. Auf komplizierte Herleitungen und Beweise verzichteten wir bewusst, wo Sie unseres Erachtens nur das Verständnis behindern und für Sie nur von nachgeordneter Bedeutung sind. Es werden die traditionellen Bereiche Analysis, lineare Algebra und Finanzmathematik besprochen. Das Buch unterscheidet sich allerdings von anderen einschlägigen Lehrbüchern in der speziellen Darstellungsweise und Schwerpunktbildung. So wird im Kapitel zur linearen Algebra ausdrücklich auf die besondere Rolle der Determinanten zur Lösung einer Vielzahl von Problemstellungen hingewiesen. Des Weiteren bietet dieses Werk ein eigenes Kapitel zu den in der Praxis

bedeutenden Wachstumsraten und deren unterschiedliche Berechnungsweisen, die Sie nahezu in keinem anderen Lehrbuch finden. Und schließlich nimmt auch die Behandlung von Elastizitäten eine herausgehobene Stellung ein.

Was dieses Buch besonders auszeichnet, ist die Tatsache, dass es als Co-Produktion von Professor und Student entstanden ist. So ist zum einen die sachliche Richtigkeit und zum anderen auch die studentengerechte Darstellung der Themen gewährleistet. Didaktik und anwendungsorientierte Wissenschaft konnten dadurch auf anschauliche Weise kombiniert werden.

Zur Unterstützung von Lehrenden und Lernenden wurde eigens die Internetseite [www.wima-auer-seitz.de](http://www.wima-auer-seitz.de) eingerichtet. Hier finden Sie als Dozent alle Grafiken des Buches und weiteres Material zum Einsatz in der Vorlesung. Als Student bieten wir Ihnen zusätzliche Übungsaufgaben inklusive der ausführlichen Lösungen und eine auf das Buch abgestimmte Formelsammlung.

Allen Lesern wünschen wir auf diesem Weg, dass sie zum einen durch dieses Buch Ihre Klausuren erfolgreich meistern und außerdem einen Zugang zu den interessanten Fragestellungen finden, die sich mit Hilfe der Mathematik lösen lassen. Bei Fragen, Anregungen und Kritik würden wir uns über eine kurze E-Mail via [www.wima-auer-seitz.de](http://www.wima-auer-seitz.de) sehr freuen.

Weiden i. d. OPf., November 2005

Prof. Dr. Franz Seitz  
Benjamin R. Auer

---

# Inhaltsverzeichnis

---

Vorwort .....	V
Inhaltsverzeichnis.....	IX
Abbildungsverzeichnis.....	XV
Symbolverzeichnis .....	XIX
<b>I Allgemeine Grundlagen.....</b>	<b>1</b>
1. Aussagenlogik .....	3
1.1 Einführung.....	3
1.2 Logische Verknüpfungen.....	4
1.3 Logische Folgerungen.....	5
2. Mengenlehre .....	9
2.1 Grundlegendes .....	9
2.2 Mengenoperationen .....	11
2.3 Mengenalgebra .....	13
3. Grundlagen der Arithmetik.....	15
3.1 Grundregeln des Rechnens.....	15
3.1.1 Grundgesetze .....	15
3.1.2 Vorzeichenregeln .....	17
3.1.3 Binomische Formeln .....	18
3.1.4 Bruchrechnung.....	19
3.1.5 Umformung linearer Gleichungen.....	23
3.2 Summen-, Produkt- und Fakultätszeichen .....	26
3.2.1 Summenzeichen .....	26
3.2.2 Produktzeichen.....	30
3.2.3 Fakultätszeichen und Binomialkoeffizienten.....	31
3.3 Ungleichungen und Absolutbeträge.....	33
3.3.1 Ungleichungen .....	33
3.3.2 Absolutbeträge.....	36
3.4 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen.....	38
3.4.1 Potenzen mit natürlichen Exponenten .....	38
3.4.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten .....	41
3.4.3 Potenzen mit gebrochenen Exponenten (Wurzeln).....	42
3.4.4 Logarithmen.....	45

3.5 Weitere Gleichungstypen .....	47
3.5.1 Weitere äquivalente Umformungen .....	47
3.5.2 Quadratische Gleichungen .....	49
3.5.3 Wurzelgleichungen .....	51
3.5.4 Logarithmusgleichungen.....	52
3.5.5 Produkt- und Quotientengleichungen .....	54
4. Aufgaben.....	55
<b>II Finanzmathematik .....</b>	<b>61</b>
1. Folgen und Reihen .....	63
1.1 Folgen .....	63
1.1.1 Grundlagen .....	63
1.1.2 Arithmetische Folgen.....	64
1.1.3 Geometrische Folgen.....	65
1.2 Reihen .....	66
1.2.1 Grundlagen .....	66
1.2.2 Arithmetische Reihen.....	66
1.2.3 Geometrische Reihen.....	67
1.3 Einige spezielle Reihen.....	68
1.3.1 Unendliche geometrische Reihe.....	68
1.3.2 Die Euler'sche Zahl $e$ .....	68
2. Finanzmathematische Anwendung .....	69
2.1 Allgemeines.....	69
2.2 Zinsen.....	70
2.2.1 Einfache Verzinsung .....	70
2.2.2 Zinseszins.....	73
2.2.3 Unterjährige und stetige Verzinsung .....	76
2.3 Raten und Renten .....	78
2.3.1 Raten .....	78
2.3.2 Renten .....	81
2.3.3 Kombinationen aus Raten und Renten .....	85
2.3.4 Unterjährige Raten und Renten .....	87
2.4 Tilgungen .....	89
2.5 Abschreibungen.....	93
3. Aufgaben.....	97

<b>III Funktionen einer Variablen .....</b>	<b>103</b>
1. Funktionsbegriff und Funktionseigenschaften.....	105
1.1 Definition.....	105
1.2 Darstellungsformen .....	106
1.3 Verschiedene Funktionstypen.....	109
1.4 Funktionseigenschaften.....	113
2. Elementare Funktionen.....	129
2.1 Elementare Funktionen.....	129
2.1.1 Ganz rationale Funktionen .....	130
2.1.2 Gebrochen rationale Funktionen.....	138
2.1.3 Algebraische Funktionen .....	144
2.1.4 Transzendente Funktionen .....	145
2.1.4.1 Exponentialfunktion .....	145
2.1.4.2 Logarithmusfunktion .....	147
2.2 Spezielle Funktionen.....	149
2.2.1 Absolutfunktion.....	149
2.2.2 Minimum- und Maximumfunktion.....	150
2.2.3 Vorzeichenfunktion.....	152
2.3 Ökonomische Funktionen .....	153
2.3.1 Angebots- und Nachfragefunktionen .....	153
2.3.2 Umsatzfunktion .....	155
2.3.3 Kostenfunktion .....	156
2.3.4 Gewinnfunktion .....	159
3. Differenzialrechnung .....	163
3.1 Einführung.....	163
3.2 Der Differenzialquotient .....	164
3.3 Technik des Differenzierens .....	167
3.4 Das Differenzial.....	174
3.5 Das Newton-Verfahren.....	176
3.6 Kurvendiskussion allgemeiner Funktionen.....	178
3.7 Diskussion ökonomischer Funktionen.....	184
3.7.1 Kostenfunktion .....	185
3.7.2 Umsatzfunktion .....	189
3.7.3 Gewinnfunktion .....	190
3.7.4 Elastizitäten.....	197
3.7.5 Wachstumsraten .....	203

3.7.5.1	Stetige Wachstumsraten .....	203
3.7.5.2	Diskrete Wachstumsraten .....	205
3.7.5.3	Zusammenhänge .....	208
3.8	Exkurs: Die Regel von l'Hospital .....	211
4.	Aufgaben .....	215
<b>IV Funktionen mehrerer Variablen .....</b>		<b>225</b>
1.	Begriff, Darstellung, Eigenschaften .....	227
1.1	Begriff .....	227
1.2	Darstellungsformen .....	229
1.3	Funktionseigenschaften .....	236
2.	Differenzialrechnung .....	239
2.1	Allgemeines .....	239
2.2	Partielle Ableitungen erster Ordnung .....	239
2.3	Partielle Ableitungen höherer Ordnung .....	243
2.4	Partielles und totales Differenzial .....	245
2.5	Ökonomische Anwendungen .....	246
2.6	Extremwertbestimmung .....	249
2.6.1	Extremwerte ohne Nebenbedingungen .....	250
2.6.2	Einbeziehen von Nebenbedingungen .....	253
3.	Aufgaben .....	259
<b>V Integralrechnung .....</b>		<b>263</b>
1.	Begriff und Integrationstechnik .....	265
1.1	Allgemeines .....	265
1.2	Unbestimmtes Integral .....	265
1.3	Technik des Integrierens .....	267
1.4	Bestimmtes Integral .....	274
1.5	Uneigentliches Integral .....	282
2.	Ökonomische Anwendungen .....	285
2.1	Kosten-, Umsatz- und Gewinnfunktion .....	285
2.2	Konsumenten- und Produzentenrente .....	286
2.3	Investitionen und Kapitalstock .....	288
2.4	Die Standardnormalverteilung .....	289
2.5	Numerische Integrationsverfahren .....	292
2.6	Exkurs: Elementare Differenzialgleichungen .....	295
2.6.1	Einführung .....	295

2.6.2	Lösung von Differenzialgleichungen durch Variablentrennung.....	296
2.6.3	Ökonomische Anwendungen separabler Differenzialgleichungen ...	298
3.	Aufgaben.....	301
<b>VI</b>	<b>Lineare Algebra .....</b>	<b>303</b>
1.	Vektoren.....	305
1.1	Begriff.....	305
1.2	Ordnungsrelationen und Vektoroperationen .....	306
1.3	Grafische Darstellung und Vektorraum.....	308
1.4	Vektoreigenschaften.....	310
1.4.1	Linearkombination von Vektoren .....	310
1.4.2	Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit.....	312
1.4.3	Einheitsvektoren.....	315
1.4.4	Interpretation des Skalarprodukts.....	316
2.	Matrizen.....	319
2.1	Begriff.....	319
2.2	Spezielle Matrizen .....	320
2.3	Ordnungsrelationen und Matrizenoperationen .....	324
2.4	Rang einer Matrix.....	333
3.	Lineare Gleichungssysteme .....	335
3.1	Einführung.....	335
3.2	Lösung linearer Gleichungssysteme .....	337
3.3	Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit.....	340
3.4	Der Gauß'sche Lösungsalgorithmus .....	342
4.	Determinanten .....	349
4.1	Begriff, Berechnung und Eigenschaften.....	349
4.2	Determinanten und der Rang von Matrizen.....	355
4.3	Determinanten und die Berechnung von Inversen .....	356
4.4	Determinanten und lineare Gleichungssysteme.....	358
4.5	Exkurs: Matrizenungleichungen.....	359
5.	Lineare Optimierung.....	361
5.1	Grundlagen.....	361
5.2	Das Simplexverfahren .....	366
6.	Aufgaben.....	373
<b>VII</b>	<b>Lösungen .....</b>	<b>379</b>
1.	Allgemeine Grundlagen.....	381

---

2. Finanzmathematik .....	391
3. Funktionen einer Variablen.....	403
4. Funktionen mehrerer Variablen .....	431
5. Integralrechnung .....	441
6. Lineare Algebra.....	449
Literaturverzeichnis.....	463
Stichwortverzeichnis .....	465

---

# Abbildungsverzeichnis

---

Abbildung II 1: Zeitstrahl.....	69
Abbildung II 2: Einfache Verzinsung .....	71
Abbildung II 3: Zinseszins .....	74
Abbildung II 4: Endkapital bei vorschüssigen Ratenverträgen.....	78
Abbildung II 5: Endkapital bei nachschüssigen Ratenverträgen .....	80
Abbildung II 6: Barwert nachschüssiger Renten.....	81
Abbildung II 7: Barwert vorschüssiger Renten .....	84
Abbildung II 8: Kombinationen aus Raten und Renten.....	86
Abbildung II 9: Allgemeiner Tilgungsplan bei annuitätischer Tilgung .....	91
Abbildung III 1: Abbildungen.....	106
Abbildung III 2: Kartesisches Koordinatensystem .....	109
Abbildung III 3: Stetige und diskrete Funktionen.....	110
Abbildung III 4: Eindeutige und eineindeutige Funktionen.....	111
Abbildung III 5: Nullstellen .....	113
Abbildung III 6: Relative Extrema .....	114
Abbildung III 7: Absolute Extrema .....	115
Abbildung III 8: Steigung.....	116
Abbildung III 9: Steigende und fallende Funktion .....	116
Abbildung III 10: Beschränktheit.....	117
Abbildung III 11: Konkave Funktionen .....	117
Abbildung III 12: Konvexe Funktionen .....	118
Abbildung III 13: Krümmungsbeispielfunktionen .....	118
Abbildung III 14: Grenzwerte.....	119
Abbildung III 15: Stetige und unstetige Funktionen.....	126
Abbildung III 16: Elementare mathematische Funktionen .....	129
Abbildung III 17: Lineare Funktionen .....	131
Abbildung III 18: Geradensteigung aus zwei Punkten.....	132
Abbildung III 19: Nach oben/unten geöffnete Parabeln .....	133
Abbildung III 20: Gestauchte und gestreckte Parabeln .....	133
Abbildung III 21: Nullstellen bei Parabeln.....	135
Abbildung III 22: Polstellen bei gebrochen rationalen Funktionen.....	140

Abbildung III 23: Gerade (links) und ungerade (rechts) Polstellen .....	141
Abbildung III 24: Wurzelfunktionen .....	145
Abbildung III 25: Verlauf von Exponentialfunktionen .....	146
Abbildung III 26: Exponential- und Logarithmusfunktionen.....	148
Abbildung III 27: Verlauf von Logarithmusfunktionen .....	149
Abbildung III 28: Vorzeichenfunktion .....	152
Abbildung III 29: Angebots- und Nachfragefunktion.....	154
Abbildung III 30: Umsatzfunktionen bei linearer Preis-Absatz-Funktion .....	155
Abbildung III 31: Fixkostendegression .....	156
Abbildung III 32: Lineare Kostenfunktion .....	157
Abbildung III 33: Progressive Kostenfunktion.....	158
Abbildung III 34: Degressive Kostenfunktion.....	158
Abbildung III 35: Ertragsgesetzliche Kostenfunktion .....	159
Abbildung III 36: Lineare Gewinnfunktion.....	160
Abbildung III 37: Differenzenquotient.....	164
Abbildung III 38: Herleitung Differenzialquotient.....	165
Abbildung III 39: Nicht differenzierbare, aber stetige Funktionen .....	166
Abbildung III 40: Herleitung Differenzial .....	175
Abbildung III 41: Newton-Verfahren .....	177
Abbildung III 42: Funktionsbeispiel zur Kurvendiskussion .....	178
Abbildung III 43: Zusammenhang zwischen Steigung und Krümmung.....	181
Abbildung III 44: Extrema und Sattelpunkte .....	182
Abbildung III 45: Eigenschaften ertragsgesetzlicher Kostenfunktionen .....	187
Abbildung III 46: Langfristiges Angebot .....	192
Abbildung III 47: Kurzfristiges Angebot .....	193
Abbildung III 48: Cournot-Punkt bei linearem Kostenverlauf .....	196
Abbildung III 49: Cournot-Punkt bei ertragsgesetzlichem Kostenverlauf.....	196
Abbildung III 50: Preiselastizität der Nachfrage .....	200
Abbildung III 51: Umsatz und Elastizität .....	202
Abbildung III 52: Differenz stetiger und diskreter Wachstumsraten.....	209
Abbildung IV 1: Punktkonstruktion im dreidimensionalen Raum .....	230
Abbildung IV 2: Ebene im dreidimensionalen Raum.....	231
Abbildung IV 3: Grafen nichtlinearer Funktionen.....	232
Abbildung IV 4: ceteris-paribus-Bedingung bei quadratischer Funktion.....	233
Abbildung IV 5: Isolinien bei quadratischer Funktion .....	234
Abbildung IV 6: Maximum und Minimum quadratischer Funktionen.....	237