BIRKHÄUSER

Hans-Andreas Braunß
Heinz Junek
Thomas Krainer

Grundkurs Mathematik in den Biowissenschaften

Birkhäuser
Basel • Boston • Berlin

BIRKHÄUSER

Hans-Andreas Braunß
Heinz Junek
Thomas Krainer

Grundkurs Mathematik in den Biowissenschaften

Birkhäuser Verlag
Basel · Boston · Berlin

Autoren:

Hans-Andreas Braunß
Heinz Junek
Universität Potsdam
Institut für Mathematik
Haus 8
Am Neuen Palais 10
14469 Potsdam
Deutschland
e-mail: braunss@rz.uni-potsdam.de
junek@rz.uni-potsdam.de

Thomas Krainer
Universität Potsdam
Institut für Mathematik
Haus 8
Am Neuen Palais 10
14469 Potsdam
Deutschland
e-mail: krainer@math.uni-potsdam.de

und

Penn State Altoona
3000 Ivyside park
Altoona, PA 16601
USA

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-7643-7709-0 Birkhäuser Verlag, Basel – Boston – Berlin

Ein Unternehmen von Springer Science+Business Media
Gedruckt auf säurefreiem Papier, hergestellt aus chlorfrei gebleichtem Zellstoff. TCF ∞
Printed in Germany
ISBN-10: 3-7643-7709-7
ISBN-13: 978-3-7643-7709-0
e-ISBN-10: 3-7643-7710-0
e-ISBN-13: 978-3-7643-7710-6

9 8 7 6 5 4 3 2 1
www.birkhauser.ch

Vorwort

Durch die Umstellung auf Bachelor- und Masterstudiengänge im Zuge der Internationalisierung sind an deutschen Universitäten in den letzten Jahren neue Studienpläne entstanden. Mancherorts — so auch an unserer Universität — hat man dabei der zunehmenden Bedeutung von mathematischen Methoden für die Biowissenschaften durch die Konsolidierung oder sogar Ausweitung des mathematischen Anteils an der biowissenschaftlichen Grundausbildung Rechnung getragen. Dem gegenüber steht allerdings eine noch immer vergleichsweise geringe Auswahl an deutschsprachiger Lehrbuchliteratur zur Mathematik mit biowissenschaftlichem Bezug. Dies ist für uns, die wir seit vielen Jahren mit der Ausbildung von Studenten biowissenschaftlicher Studiengänge befasst sind, Ausgangspunkt und Anlass für dieses Lehrbuch.

Das vorliegende Buch ist geeignet als Kurs- oder Begleitbuch für eine 1–2 semestrige Einführungsveranstaltung zur Mathematik für Studierende der Biowissenschaften. Im Fokus stehen analytische Methoden. Die Statistik wird nur marginal behandelt, sie ist im allgemeinen Gegenstand einer separaten Lehrveranstaltung.

Beim Verfassen dieses Buches haben wir uns von folgenden Grundsätzen leiten lassen:

- *Vermittlung von Methoden*: Den Studierenden sollen in erster Linie mathematische Methoden vermittelt werden, wie sie in vielerlei Anwendungsbezügen benötigt werden. Diese Methoden werden systematisch entwickelt und dargestellt und durch biowissenschaftliche Anwendungen motiviert und illustriert.
- *Begriffliche Klarheit*: Wir haben uns dazu entschlossen, die notwendigen Begriffe sowohl mathematisch präzise als auch intuitiv einzuführen und anhand vieler Abbildungen und Anwendungen zu erörtern. Der Verzicht auf ein solides Maß an begrifflicher Klarheit führt nach unserer Erfahrung eher zu Unsicherheit und Unverständnis.
- *Übungsaufgaben*: Das präsentierte Material wird ergänzt durch eine Vielzahl von Übungsaufgaben mit biowissenschaftlichem Bezug.

An die Kapitelenden haben wir vielfach eine Rubrik *Weitere Informationen im WWW* gestellt, die sich vor allem auf die beiden folgenden Plattformen bezieht:

- *Calculus on the Web*: Calculus on the Web, kurz COW, ist ein interaktives und frei zugängliches Lernmedium der Temple University in Philadelphia (USA). Eine Vielzahl von Übungsaufgaben zu den verschiedensten Themen kann direkt im Internet bearbeitet werden, Anleitungen und Hilfestellungen stehen zur Verfügung. COW ist zugänglich unter

  `http://www.math.temple.edu/~cow/`[1]

- *Visual Calculus*: Visual Calculus wurde an der University of Tennessee in Knoxville (USA) entwickelt und bietet eine Reihe von Animationen und Visualisierungen von Lerninhalten. Visual Calculus ist zugänglich unter

  `http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/`

Zum Aufbau dieses Buches

Die ersten sieben Kapitel dieses Buches bauen unmittelbar aufeinander auf und bilden den Kern eines Kurses zur Differential- und Integralrechnung mit biowissenschaftlicher Schwerpunktsetzung. Behandelt werden die Themen Mengen und Abbildungen, elementare Funktionen, Interpolation und Ausgleichsrechnung, Folgen und Reihen, stetige Funktionen und Differential- und Integralrechnung.

Die letzten drei Kapitel sind weitgehend unabhängig voneinander und können individuell kombiniert bzw. weggelassen werden, abhängig von der für den Kurs zur Verfügung stehenden Zeit und der weiteren Schwerpunktsetzung. Sie umfassen jeweils Einführungen in die Methoden und Anwendungen der periodischen Prozesse und Fourieranalyse, der linearen Gleichungssysteme und Matrizenrechnung, sowie der Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme.

Danksagung

Unser Dank gilt Frau Professorin Gaedke vom Institut für Biologie und Biochemie der Universität Potsdam für ihre Unterstützung und fachliche Beratung. Frau Krüger hat uns bei der Anfertigung und der Überarbeitung vieler Abbildungen unterstützt, vielen Dank hierfür. Dem Birkhäuser Verlag, insbesondere Herrn Dr. Hempfling, danken wir für die gute Zusammenarbeit und die Unterstützung dieses Projektes.

Potsdam, im Juli 2006,

H.A. Braunß, H. Junek, T. Krainer

[1] Auf den Inhalt sämtlicher in diesem Buch genannten Webseiten haben wir keinen Einfluss und können daher für deren Inhalte keine Gewähr übernehmen. Für die Inhalte sind allein die Betreiber dieser Webseiten verantwortlich. Zum Zeitpunkt der Drucklegung wurden die Webseiten auf mögliche Rechtsverstöße überprüft, rechtswidrige Inhalte waren zu diesem Zeitpunkt nicht erkennbar.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Mengen und Abbildungen

In diesem einführenden Kapitel wollen wir die grundlegenden Begriffe zu Mengen und Abbildungen nur so weit entwickeln, wie sie für das Verständnis der folgenden Kapitel notwendig und zweckmäßig sind.

§1 Mengen

Mengen sind sinnvolle Zusammenfassungen von wohlunterschiedenen Objekten. Die Objekte, die einer Menge angehören, werden *Elemente* dieser Menge genannt. Die einfachste Art, Mengen zu definieren besteht darin, sämtliche Elemente aufzuführen. Hierbei werden die Objekte üblicherweise in geschweiften Klammern eingeschlossen und durch Kommas getrennt. Sind Verwechslungen mit Dezimalbrüchen zu befürchten, so verwenden wir statt des Kommas ein Semikolon. So definiert

$$D = \{\text{Goethe, Kleist, Schiller, Shakespeare}\}$$

eine vierelementige Menge bekannter Dichter(namen). Soll eine umfangreiche oder gar unendliche Menge definiert werden, ist obige Art der Definition nicht mehr zweckmäßig bzw. unmöglich. In diesen Fällen hilft eine verbale Beschreibung oder die Benutzung von „...“, wobei im zweiten Fall darauf zu achten ist, dass Missverständnisse ausgeschlossen sind.

Beispiel 1.1.

$$\begin{aligned} O &= \text{Menge aller Obstsorten} = \{\text{Apfel, Birne, Orange, Pflaume}, \ldots\}, \\ U &= \text{Menge aller positiven, ungeraden Zahlen} = \{1; 3; 5; 7; \ldots\}. \end{aligned}$$

Mengen werden wir in der Regel mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnen: $A, B, C, \ldots$. Zur Bezeichnung der Elemente sind kleine lateinische Buchstaben üblich. Ist x ein Objekt und A eine Menge, so bedeutet

$$x \in A \text{ bzw. } x \notin A,$$

dass x ein Element bzw. kein Element der Menge A ist. So gilt für das obige Beispiel: $7 \in U$ und Kartoffel $\notin O$.

Sind A und B zwei Mengen und ist jedes Element von A auch ein Element von B, so heißt A eine *Teilmenge* von B, in Zeichen $A \subseteq B$. In diesem Fall heißt B auch *Obermenge* von A, in Zeichen $B \supseteq A$. Soll deutlich gemacht werden, dass A eine *echte* Teilmenge von B ist, dass es also Elemente in B gibt, die nicht zu A gehören, so schreiben wir dafür $A \subset B$ oder analog $B \supset A$.

Häufig werden wir Mengen dadurch definieren, dass wir bestimmte Elemente durch Angabe von Bedingungen aus einer bereits definierten Menge aussondern. So wird mit U aus Beispiel 1.1 durch

$$A = \{ \underbrace{x \in U}_{\text{Obermenge}} \mid \underbrace{x < 10}_{\text{Bedingung}} \}$$

die Menge $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ definiert.

Mit $\emptyset$ bezeichnen wir die *leere Menge*, also die Menge, die kein Element enthält.

Zahlbereiche

Als feststehende Abkürzungen benutzen wir die folgenden, international üblichen Bezeichnungen.

$\mathbb{N}$	$=$	Menge der natürlichen Zahlen	$=$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$,
$\mathbb{N}_0$	$=$	Menge der natürlichen Zahlen und Null	$=$	$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$,
$\mathbb{Z}$	$=$	Menge der ganzen Zahlen	$=$	$\{0, 1, -1, 2, -2, 3, \ldots\}$,
$\mathbb{Q}$	$=$	Menge der rationalen Zahlen	$=$	$\left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$,
$\mathbb{R}$	$=$	Menge der reellen Zahlen.		

Es gilt offensichtlich $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Die reellen Zahlen können als Punkte einer Geraden veranschaulicht werden, wie die Abbildung 1 zeigt. Dabei entspricht jeder Punkt der Geraden einer reellen Zahl und umgekehrt.

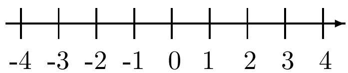

Abbildung 1: Die reelle Zahlengerade

Intervalle

Oft auftretende Teilmengen der Menge der reellen Zahlen sind *Intervalle*. Wir unterscheiden die folgenden Typen:

$$
\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, & [a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\},\\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, & (a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},\\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, & (-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\},\\
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, & (-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}.
\end{aligned}
$$

Die Intervalle $[a,b]$ heißen *abgeschlossen*. Andererseits wird ein Intervall der Form (a,b) *offen* genannt, wobei für a auch $-\infty$ oder für b auch ∞ stehen darf. Insbesondere ist $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$.

Operationen mit Mengen

Operationen mit Mengen erlauben es, „neue“ Mengen aus bereits definierten Mengen zu gewinnen. Wir führen kurz die Definitionen der in den folgenden Kapiteln verwendeten Mengenoperationen auf.

Definition 1.2. Es seien A und B beliebige Mengen. Dann heißt die Menge

i) $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder}^1\ x \in B\}$ die *Vereinigung* von A und B,

ii) $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$ der *Durchschnitt* von A und B,

iii) $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$ die *Differenz* von A und B,

iv) $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A,\ y \in B\}$ die *Kreuz- bzw. Produktmenge* von A und B, wobei (x,y) das geordnete Paar der Elemente x und y bezeichnet. Im Fall $A = B$ schreiben wir auch A^2 statt $A \times A$.

Beispiel 1.3. Häufig werden Teilmengen von $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auftreten. Geometrisch können $\mathbb{R}$ als Gerade, $\mathbb{R}^2$ als Ebene und $\mathbb{R}^3$ als Anschauungsraum interpretiert werden. Diese Interpretation erlaubt die Einführung von *Koordinatensystemen.*

Aufgaben

1. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen:

i) $A \cup A = A$.

ii) $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.

iii) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

[1] Die Aussage $x \in A$ oder $x \in B$ bedeutet, dass $x \in A$ oder $x \in B$ oder beides zutrifft. Grundsätzlich ist im mathematischen Sprachgebrauch zwischen den Wortverbindungen „oder“ und „entweder oder“ sauber zu unterscheiden.

2. Geben Sie die Menge aller Zahlen $x \in \mathbb{R}$, für die $1 - x^2 > 0$ gilt, in Intervallschreibweise an.

§2 Abbildungen

Naturwissenschaftliche Untersuchungen beschäftigen sich oft mit Beziehungen zwischen Größen, z.B.:

- Abhängigkeit des Lichteinfalls von der Tageszeit.
- Abhängigkeit des Ertrags von der Düngermenge.
- Abhängigkeit der Größe einer Population von der Beobachtungszeit.

Um solche Beziehungen mathematisch zu beschreiben, wird das Konzept der *Abbildung* verwendet:

Definition 1.4. Es seien A und B Mengen. Eine *Abbildung* oder *Funktion f von A in B* liegt genau dann vor, wenn durch eine Vorschrift jedem $x \in A$ genau ein *Bildelement* oder *Funktionswert* $y = f(x) \in B$ zugeordnet wird. Hierbei wird x die *unabhängige Variable* und y die *abhängige Variable* genannt. In diesem Fall schreiben wir $f : A \to B$ gefolgt von der Zuordnungsvorschrift. Für diese ist auch die Symbolik $x \mapsto f(x)$ üblich. Des Weiteren setzen wir:

- Die Menge A heißt *Definitionsbereich* von f und wird mit $\mathrm{D}(f)$ bezeichnet.
- Die Menge B heißt *Wertebereich* von f und wird mit $\mathrm{W}(f)$ bezeichnet.
- Die Menge $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$ heißt die *Bildmenge* von f.

Für konkrete Anwendungen ist die Bezeichnung der Variablen den verwendeten Größen entsprechend anzupassen. So steht z.B. t für die Zeit, und die Düngermenge kann durch d symbolisiert werden.

Beispiel 1.5. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vermöge $x \mapsto x^2$. Die Bildmenge $f(\mathbb{R})$ dieser Funktion ist das Intervall $[0, \infty)$, also eine *echte* Teilmenge von $\mathrm{W}(f) = \mathbb{R}$.

Darstellung von Abbildungen

Analytische Darstellung: In vielen Fällen kann die Vorschrift durch eine Formel ausgedrückt werden.

Beispiel 1.6. i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vermöge $f(x) = 2x + x^2$.

ii) Absolutbetrag $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vermöge $|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases}$

iii) $g : \{1, 4, 9, 16\} \to \mathbb{N}$ vermöge $u \mapsto \sqrt{u}$.

Darstellung durch Wertetabellen:

x	$f(x)$
$\vdots$	$\vdots$

bzw.

x	y
$\vdots$	$\vdots$

Beispielsweise wird die Funktion g aus Beispiel 1.6 äquivalent durch die Wertetabelle

u	$g(u)$
1	1
4	2
9	3
16	4

dargestellt. Experimentell ermittelte Daten werden üblicherweise in eine Wertetabelle eingetragen.

Graphische Darstellung: Die Menge $\{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq A \times B$ heißt der *Graph* der Abbildung $f : A \to B$. Graphen sind insbesondere zur Darstellung reeller Funktionen geeignet. In Abbildung 2 sind die Funktionen $|\cdot|$ und g aus Beispiel 1.6 dargestellt.

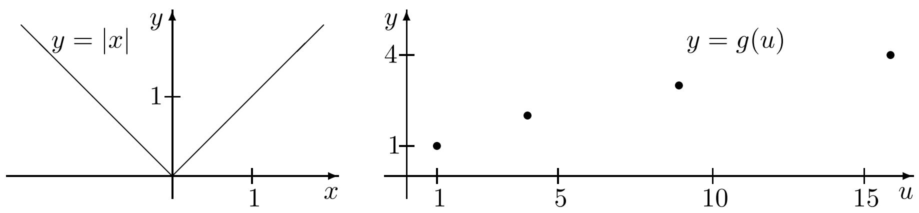

Abbildung 2: Graphische Darstellung von $|\cdot|$ und g

Operationen mit Abbildungen

Wir beginnen mit der Definition der Nacheinanderausführung von Abbildungen.

Definition 1.7. Es seien $g : A \to B$ und $f : C \to D$ Abbildungen mit $g(A) \subseteq C$. Dann heißt die Abbildung $f \circ g : A \to D$ vermöge $x \mapsto f(g(x))$ die *Verkettung* der Abbildungen f und g.

Beispiel 1.8. Es seien $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ vermöge $f(x) = \sqrt{x}$ sowie $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ vermöge $g(x) = x^2 + 1$. Dann sind

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ vermöge } x \mapsto \sqrt{x^2 + 1},$$
$$g \circ f : [0, \infty) \to [0, \infty) \text{ vermöge } x \mapsto x + 1.$$

Insbesondere gilt $f \circ g \neq g \circ f$.

1.9. Für reellwertige Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich D sind Summe, Differenz, Vielfaches, Produkt und, sofern der Nenner den Wert Null nicht annimmt, der Quotient auf D wie folgt definiert. Für $f, g : D \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ setzen wir:

$$\begin{aligned} f \pm g : D \to \mathbb{R} \quad &\text{vermöge} \quad (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \\ \lambda \cdot f : D \to \mathbb{R} \quad &\text{vermöge} \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x), \\ f \cdot g : D \to \mathbb{R} \quad &\text{vermöge} \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \\ \frac{f}{g} : D \to \mathbb{R} \quad &\text{vermöge} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Umkehrabbildung: Abschließend wollen wir Umkehrabbildungen betrachten. Hierzu benötigen wir noch den folgenden Begriff.

Definition 1.10. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt *bijektiv*, falls es zu jedem $y \in B$ *genau* ein $x \in A$ derart gibt, dass $y = f(x)$ gilt. In diesem Fall wird f auch eine *Bijektion von A auf B* genannt.

Beispiel 1.11.
i) Die Funktion $f : [0, \infty) \to [1, \infty)$ vermöge $x \mapsto x^2 + 1$ ist bijektiv, siehe Beispiel 1.14.

ii) Die Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ vermöge $x \mapsto x^2 + 1$ ist nicht bijektiv, denn zu der reellen Zahl -1 gibt es kein $x \in [0, \infty)$ mit $g(x) = -1$.

iii) Die Funktion $h : \mathbb{R} \to [1, \infty)$ vermöge $x \mapsto x^2 + 1$ nicht bijektiv, denn es gilt $h(-3) = h(3) = 10$. Also werden verschiedene Elemente des Definitionsbereichs auf den gleichen Funktionswert abgebildet.

Dies zeigt, dass die Bijektivität einer Funktion nicht nur von der Abbildungsvorschrift, sondern auch vom Definitions- und Wertebereich abhängig ist.

Definition 1.12. Es sei f eine Bijektion von A auf B. Dann heißt

$$g : B \to A \text{ vemöge } y \mapsto g(y) = x, \text{ falls } f(x) = y$$

die *Umkehrfunktion* oder *Umkehrabbildung* zu $f : A \to B$ und wird mit f^{-1} bezeichnet.

Der folgende, leicht zu beweisende Satz illustriert die Beziehung der Begriffe Bijektion und Umkehrabbildung einerseits mit der Verkettung von Funktionen andererseits.

Satz 1.13. *Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to A$ Funktionen. Dann sind f und g Bijektionen und g ist die Umkehrfunktion zu f genau dann, wenn $(g \circ f)(x) = x$ für alle $x \in A$ und $(f \circ g)(y) = y$ für alle $y \in B$ gelten.*

Beispiel 1.14. Wir bestimmen die Umkehrfunktion zu f aus Beispiel 1.11. Dazu stellen wir die Gleichung $y = x^2 + 1$ nach x um.

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= y, \\ x^2 &= y - 1, \\ \sqrt{x^2} &= \sqrt{y-1}, \\ |x| &= \sqrt{y-1}. \end{aligned}$$

Wegen $x \geq 0$ ist dies äquivalent zu $x = \sqrt{y-1}$. Wir erhalten somit $f^{-1} : [1, \infty) \to [0, \infty)$ vermöge $y \mapsto \sqrt{y-1}$.

Aufgaben

1. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vermöge $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

i) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f.

ii) Bestimmen Sie die Bildmenge $f(\mathbb{R})$ der Funktion f.

2. Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vermöge $f(x) = x^2$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vermöge $g(x) = 3 + x$. Bestimmen Sie eine Abbildungsvorschrift für $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie für $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3. Es seien $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ vermöge $f(x) = \frac{1}{x+1}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vermöge $g(x) = 2x^2$. Ermitteln Sie jeweils eine Abbildungsvorschrift zu $f \circ g$ und $g \circ f$.

4. Es sei $f : [3, \infty) \to [14, \infty)$ vermöge $f(x) = x^2 + 2x - 1$ gegeben.

i) Finden Sie eine Abbildungsvorschrift der Umkehrfunktion g zu f.

ii) Rechnen Sie zur Probe die Gleichungen $(g \circ f)(x) = x$ für alle $x \in \mathrm{D}(f)$ und $(f \circ g)(y) = y$ für alle $y \in \mathrm{W}(f)$ explizit nach.

5. Wir nehmen einen quadratischen Bogen Papier und nummerieren die Ecken gemäß Abbildung 3 durch.

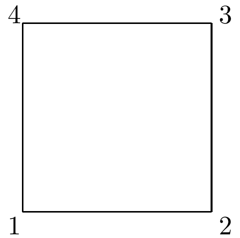

Abbildung 3: Der Papierbogen mit nummerierten Ecken

Der Papierbogen wird damit durch die Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ modelliert. Durch Drehen und Wenden des Papiers haben wir mehrere Möglichkeiten, *Deckabbildungen* des Bogens zu erzeugen. Jede dieser Deckabbildungen korrespondiert zu