

Heidrun Matthäus | Wolf-Gert Matthäus

# Mathematik für BWL-Bachelor: Übungsbuch

Ergänzungen für Vertiefung und Training

2. Auflage

**STUDIUM**

 Springer Gabler

**NEU**  
Finanz-  
mathematik

---

# **Studienbücher Wirtschaftsmathematik**

**Herausgegeben von**  
B. Luderer, Chemnitz

Die Studienbücher Wirtschaftsmathematik behandeln anschaulich, systematisch und fachlich fundiert Themen aus der Wirtschafts-, Finanz- und Versicherungsmathematik entsprechend dem aktuellen Stand der Wissenschaft.

Die Bände der Reihe wenden sich sowohl an Studierende der Wirtschaftsmathematik, der Wirtschaftswissenschaften, der Wirtschaftsinformatik und des Wirtschaftsingenieurwesens an Universitäten, Fachhochschulen und Berufsakademien als auch an Lehrende und Praktiker in den Bereichen Wirtschaft, Finanz- und Versicherungswesen.

**Herausgegeben von**  
Prof. Dr. Bernd Luderer  
Chemnitz

---

Heidrun Matthäus • Wolf-Gert Matthäus

# Mathematik für BWL-Bachelor: Übungsbuch

Ergänzungen für Vertiefung und Training

2., erweiterte Auflage

STUDIUM

 Springer Gabler

*Autoren*

Dipl. Math. Heidrun Matthäus  
Hochschule Magdeburg-Stendal  
Deutschland

Dr. Wolf-Gert Matthäus  
Stendal-Uenglingen  
Deutschland

ISBN 978-3-8348-1934-5  
DOI 10.1007/978-3-8348-2326-7

ISBN 978-3-8348-2326-7 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Gabler

© Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden 2010, 2012

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

*Planung und Lektorat:* Ulrike Schmickler-Hirzebruch, Barbara Gerlach

*Einbandentwurf:* KünkelLopka GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Gabler ist eine Marke von Springer DE.

Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

[www.springer-gabler.de](http://www.springer-gabler.de)

## Vorwort zur zweiten Auflage

Fast zeitgleich mit der dritten Auflage des Lehrbuches „Mathematik für BWL-Bachelor“, das durch die Hinzunahme eines ausführlichen Kapitels zu den Grundlagen der Finanzmathematik eine oft gewünschte Erweiterung erfuhr, kann diese Neuauflage des zugehörigen Beispiel- und Übungsbuches vorgelegt werden, die dazu passend durch zwei neue Abschnitte

- **A17** Finanzmathematik: Beispiele und Aufgaben
- **L17** Finanzmathematik: Lösungen

ergänzt wurde.

Wiederum haben wir großen Wert auf ausführlichste Darstellung gelegt, sollten einige Lösungen aus Platzgründen im Buch nur angedeutet werden, dann sind sie aber dafür im Internet bis ins Detail ausgeführt.

Uenglingen, im Frühjahr 2012

Heidrun Matthäus  
Wolf-Gert Matthäus

## Vorwort zur ersten Auflage

„An den höchsten Bildungsstätten des Landes vollzieht sich, von der breiten Öffentlichkeit weitgehend unbemerkt, eine der größten Umwälzungen des deutschen Hochschulwesens seit vielen Jahren: Gemäß den EU-Beschlüssen von Bologna erfolgt schrittweise die Umstellung des spezifisch deutschen Studiensystems auf die international üblichen Bildungsabschnitte Bachelor und Master.

Nahezu alle Studiengänge werden dafür auf den Prüfstand gestellt.

Insbesondere betrifft dies die vielfältigen Studienformen, in denen bisher die Betriebswirtschaftslehre vermittelt wurde – in wissenschaftlichen Diplomstudiengängen an den Universitäten und Fachhochschulen, in den stärker praxisnahen, dualen Studiengängen an Berufsakademien und Verwaltungs- und Wirtschaftsakademien.

Weitgehend einheitlich soll in Zukunft an den verschiedensten Studienorten in den höchsten Bildungsstätten des Landes der Erwerb des BWL-Bachelors erfolgen.“

Mit diesen Worten leiteten wir vor vier Jahren unser erstes Buch ein und begründeten damit, warum wir speziell für Studierende im BWL-Bachelor-Studium einen neuen Lehrbuchtyp entwickeln wollten: Weil wir eben der Meinung sind, dass diese neue Form des Studiums, die sich inzwischen als sehr anstrengend und mit hohen Anforderungen versehen herausgestellt hat, neue und angepasste Lehrbücher und Lehrmaterialformen benötigt.

Der Erfolg gab uns Recht: Die erste Auflage war überraschend schnell ausverkauft, und der Verlag forderte uns auf, möglichst schnell eine zweite, erweiterte Auflage vorzubereiten. Dabei sollten natürlich die vielfältig eingegangenen Hinweise von Leserinnen und Lesern, von Fachkolleginnen und Fachkollegen umfassend berücksichtigt werden.

Das aber stellte uns vor ein Problem: Denn als wir die Sammlung der eingegangenen Buchbeurteilungen und Leserstimmen, die Mails und die von uns während unserer eigenen Lehrveranstaltungen gemachten Notizen sichtetem, kristallisierten sich hauptsächlich zwei Wünsche heraus.

Da waren zuerst vielfältige Wünsche zur Erweiterung und Vertiefung der behandelten Stoffgebiete. Es wurde die Integralrechnung vermisst, die Behandlung von Differential- und Differenzgleichungen, die Vermittlung von Rechenmethoden für lineare Optimierungsaufgaben und vieles andere mehr.

Insbesondere studentische Leser aber wünschten sich mehr an Beispielen und vor allem viele Übungsaufgaben, mit deren Hilfe sie sich im Selbststudium besser mit dem spröden Stoff „Mathematik in der Betriebswirtschaftslehre“ auseinandersetzen können.

Nach Rücksprache mit dem Verlag entschieden wir uns dagegen, das mit ca. 300 Seiten noch übersichtliche Grundlagenbuch zu einer unhandlichen „Bibel“ auszubauen, so dass sich die im Herbst 2009 erschienene Zweitaufgabe des Bachelor-Buches als geringfügig erweitert, aber in ihrer Methodik und Gestaltung weiter verbessert präsentierte.

Parallel dazu erarbeiteten wir jedoch den Titel „Mathematik für BWL-Master“, in dem die themenmäßige Erweiterung des Bachelor-Buches stattfindet, und der seit dem Frühjahr 2009 im Handel verfügbar ist.

Mit dem nun vorgelegten Übungsbuch komplettieren wir unser Vorhaben „Mathematik für BWL“ und hoffen, damit auch den Wunsch nach vielen Beispielen und Übungen umfassend erfüllen zu können.

Alle Beispiele, sowohl die formal-mathematischen als auch die angewandten, werden grundsätzlich extrem ausführlich vorgerechnet. Insofern kann dieses „Übungsbuch“ durchaus auch als Beispielsammlung „Mathematik in der BWL“ angesehen werden.

Bei der Auswahl der Übungsaufgaben wurde viel Wert darauf gelegt, sowohl mathematisch-akademische Aufgaben zu stellen, so, wie es in vielen Lehrveranstaltungen üblich ist, als auch angewandte Aufgaben in ausreichendem Maße vorzulegen.

Unser grundlegendes Prinzip dabei ist:

Es gibt keine Übungsaufgabe ohne ausführliche Lösung.

Sollte aus Platzgründen im Buch nur die Mitteilung des Ergebnisses erfolgen, dann kann im Internet die ausführliche Lösung nachgelesen werden. Die Quelle ist stets angegeben.

Abschließend möchten wir allen, die uns zu diesem Übungsbuch anregten und ermunterten, herzlich danken, vor allem den vielen Rezensenten und Fachkollegen.

Dem Vieweg+Teubner Verlag in Wiesbaden danken wir, dass er unsere Anregung für dieses Buch so schnell aufgenommen hat und uns in jeder Weise anregend und hilfreich unterstützte.

Uenglingen, im Herbst 2010

Heidrun Matthäus  
Wolf-Gert Matthäus

## Inhaltsverzeichnis

<b>A1</b>	<b>Mathematisches Handwerkszeug: Beispiele und Aufgaben.....</b>	<b>13</b>
	Grundsätzliches .....	13
	Beispiele dafür, wie es richtig gemacht wird .....	13
	Übungsaufgaben.....	14
<b>A2</b>	<b>Potenzen, Wurzeln, Logarithmen: Beispiele und Aufgaben .....</b>	<b>15</b>
	Grundsätzliches .....	15
	Beispiele dafür, wie es richtig gemacht wird .....	15
	Übungsaufgaben.....	18
<b>A3</b>	<b>Lineare und quadratische Gleichungen: Beispiele und Aufgaben .....</b>	<b>19</b>
	Grundsätzliches .....	19
	Beispiele dafür, wie es richtig gemacht wird .....	19
	Übungsaufgaben.....	23
	Beispiele für Anwendungen: .....	23
	Übungen mit Anwendungsaufgaben .....	25
<b>A4</b>	<b>Ungleichungen: Beispiele und Aufgaben.....</b>	<b>27</b>
	Grundsätzliches .....	27
	Beispiele dafür, wie es richtig gemacht wird .....	27
	Übungsaufgaben.....	32
	Übungen mit Anwendungsaufgaben .....	32
<b>A5</b>	<b>Ökonomische Funktionen: Beispiele und Aufgaben .....</b>	<b>33</b>
	Grundsätzliches .....	33
	Beispiele dafür, wie es richtig gemacht wird .....	33
	Übungsaufgaben.....	41
<b>A6</b>	<b>Weitere Funktionen: Beispiele und Aufgaben.....</b>	<b>43</b>
	Grundsätzliches .....	43
	Beispiele dafür, wie es richtig gemacht wird .....	43
	Übungsaufgaben .....	48

<b>A7</b>	<b>Formales Differenzieren: Beispiele und Aufgaben .....</b>	<b>49</b>
	Grundsätzliches .....	49
	Beispiele dafür, wie es richtig gemacht wird .....	49
	Übungsaufgaben.....	53
<b>A8</b>	<b>Anwendungen des Ableitungsbegriffs: Beispiele und Aufgaben .....</b>	<b>55</b>
	Grundsätzliches .....	55
	Beispiele dafür, wie es richtig gemacht wird .....	55
	Übungsaufgaben.....	61
<b>A9</b>	<b>Funktionen zweier Variabler: Beispiele und Aufgaben .....</b>	<b>63</b>
	Grundsätzliches .....	63
	Beispiele dafür, wie es richtig gemacht wird .....	63
	Übungsaufgaben.....	66
<b>A10</b>	<b>Partielle Ableitungen: Beispiele und Aufgaben.....</b>	<b>67</b>
	Grundsätzliches .....	67
	Beispiele dafür, wie es richtig gemacht wird .....	67
	Übungsaufgaben.....	70
<b>A11</b>	<b>Extremwertsuche bei zwei Variablen: Beispiele und Aufgaben .....</b>	<b>73</b>
	Grundsätzliches .....	73
	Beispiele dafür, wie es richtig gemacht wird .....	73
	Übungsaufgaben.....	77
<b>A12</b>	<b>Extremwerte mit Nebenbedingungen: Beispiele und Aufgaben .....</b>	<b>79</b>
	Grundsätzliches .....	79
	Beispiele dafür, wie es richtig gemacht wird .....	79
	Übungsaufgaben.....	83
<b>A13</b>	<b>Matrizen und ihre Anwendungen: Beispiele und Aufgaben.....</b>	<b>85</b>
	Grundsätzliches .....	85
	Beispiele dafür, wie es richtig gemacht wird .....	85
	Übungsaufgaben.....	90

---

<b>A14</b>	<b>Determinanten: Beispiele und Aufgaben .....</b>	<b>93</b>
	Grundsätzliches .....	93
	Beispiele dafür, wie es richtig gemacht wird .....	93
	Übungsaufgaben.....	99
<b>A15</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme: Beispiele und Aufgaben.....</b>	<b>101</b>
	Grundsätzliches .....	101
	Beispiele dafür, wie es richtig gemacht wird .....	101
	Übungsaufgaben.....	109
<b>A16</b>	<b>Lineare Optimierung: Beispiele und Aufgaben .....</b>	<b>115</b>
	Grundsätzliches .....	115
	Beispiele dafür, wie es richtig gemacht wird .....	115
	Übungsaufgaben.....	120
<b>A17</b>	<b>Finanzmathematik: Beispiele und Aufgaben.....</b>	<b>123</b>
	Grundsätzliches .....	123
	Zinseszinsformel - Beispiele dafür, wie sie richtig angewandt wird .....	123
	Zinseszinsformel - Übungsaufgaben .....	125
	Vergleich von Angeboten - Beispiele dafür, wie es richtig gemacht wird.....	126
	Vergleich von Angeboten - Übungsaufgaben.....	128
	Einfache Verzinsung - Beispiele dafür, wie sie richtig angewandt wird .....	129
	Einfache Verzinsung - Übungsaufgaben.....	131
	Regelmäßige Ein- und Auszahlungen, Ratenverträge und Renten - Beispiele.....	131
	Regelmäßige Ein- und Auszahlungen, Ratenverträge und Renten - Übungen .....	135
	Tilgungen - Beispiele dafür, wie es richtig gemacht wird .....	136
	Tilgungen - Übungsaufgaben .....	141

---

<b>L1</b>	<b>Elementares mathematisches Handwerkszeug: Lösungen.....</b>	<b>143</b>
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 1.1 von Seite 14.....	143
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 1.2 von Seite 14.....	143
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 1.3 von Seite 14.....	144
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 1.4 von Seite 14.....	144

<b>L2</b>	<b>Potenzen, Wurzeln, Logarithmen: Lösungen</b> .....	<b>145</b>
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 2.1 von Seite 18 .....	145
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 2.2 von Seite 18 .....	145
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 2.3 von Seite 18 .....	146
<b>L3</b>	<b>Lineare und quadratische Gleichungen: Lösungen</b> .....	<b>147</b>
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 3.1 von Seite 23 .....	147
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 3.2 von Seite 23 .....	147
	Ergebnisse und Lösungen zu den Anwendungsaufgaben von Seite 25 / 26 .....	148
<b>L4</b>	<b>Ungleichungen: Lösungen</b> .....	<b>149</b>
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 4.1 von Seite 32 .....	149
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 4.2 von Seite 32 .....	152
<b>L5</b>	<b>Ökonomische Funktionen: Lösungen</b> .....	<b>153</b>
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 5.1 von Seite 41 .....	153
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 5.2 von Seite 41 .....	153
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 5.3 von Seite 41 .....	153
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 5.4 von Seite 42 .....	155
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 5.5 von Seite 42 .....	155
<b>L6</b>	<b>Weitere Funktionen: Lösungen</b> .....	<b>157</b>
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 6.1 von Seite 47 .....	157
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 6.2 von Seite 48 .....	157
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 6.3 von Seite 48 .....	158
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 6.4 von Seite 48 .....	158
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 6.5 von Seite 48 .....	158
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 6.6 von Seite 48 .....	159
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 6.7 von Seite 48 .....	160
<b>L7</b>	<b>Formales Differenzieren: Lösungen</b> .....	<b>161</b>
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 7.1 von Seite 53 / 54.....	161
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 7.2 von Seite 54.....	164
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 7.3 von Seite 54.....	164
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 7.4 von Seite 54.....	165
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 7.5 von Seite 54.....	165
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 7.6 von Seite 54.....	166

<b>L8</b>	<b>Anwendungen des Ableitungsbegriffs: Lösungen</b> .....	<b>167</b>
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 8.1 von Seite 61 .....	167
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 8.2 von Seite 61 .....	170
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 8.3 von Seite 61 .....	170
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 8.4 von Seite 61 .....	170
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 8.5 von Seite 62 .....	171
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 8.6 von Seite 62 .....	172
<b>L9</b>	<b>Funktionen zweier Variabler: Lösungen</b> .....	<b>173</b>
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 9.1 von Seite 66 .....	173
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 9.2 von Seite 66 .....	174
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 9.3 von Seite 66 .....	174
<b>L10</b>	<b>Partielle Ableitungen: Lösungen</b> .....	<b>175</b>
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 10.1 von Seite 70 .....	175
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 10.2 von Seite 71 .....	176
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 10.3 von Seite 71 .....	177
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 10.4 von Seite 71 .....	177
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 10.5 von Seite 72 .....	178
<b>L11</b>	<b>Extremwertsuche bei zwei Variablen: Lösungen</b> .....	<b>179</b>
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 11.1 von Seite 77 .....	179
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 11.2 von Seite 77 .....	181
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 11.3 von Seite 77 .....	182
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 11.4 von Seite 78 .....	183
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 11.5 von Seite 78 .....	184
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 11.6 von Seite 78 .....	184
<b>L12</b>	<b>Extremwerte mit Nebenbedingungen: Lösungen</b> .....	<b>185</b>
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 12.1 von Seite 83 .....	185
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 12.2 von Seite 83 .....	189
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 12.3 von Seite 84 .....	190
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 12.4 von Seite 84 .....	191
<b>L13</b>	<b>Matrizen und ihre Anwendungen: Lösungen</b> .....	<b>193</b>
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 13.1 von Seite 90 .....	193
	Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 13.2 von Seite 90 .....	193

Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 13.3 von Seite 90 .....	194
Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 13.4 von Seite 90 .....	194
Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 13.5 von Seite 90 .....	194
Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 13.6 von Seite 91 .....	196
<b>L14 Determinanten: Lösungen.....</b>	<b>199</b>
Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 14.1 von Seite 99 .....	199
Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 14.2 von Seite 99 .....	199
Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 14.3 von Seite 100 .....	200
Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 14.4 von Seite 100 .....	201
Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 14.5 von Seite 100 .....	202
<b>L15 Lineare Gleichungssysteme: Lösungen.....</b>	<b>203</b>
Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 15.1 von Seite 109 .....	203
Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 15.2 von Seite 111 .....	207
Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 15.3 von Seite 112 .....	208
Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 15.4 von Seite 113 .....	209
Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 15.5 von Seite 113 .....	210
<b>L16 Lineare Optimierung: Lösungen.....</b>	<b>211</b>
Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 16.1 von Seite 120 .....	211
Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 16.2 von Seite 121 .....	213
Ergebnisse und Lösungen zu Aufgabe 16.3 von Seite 121 .....	214
<b>L17 Finanzmathematik: Lösungen.....</b>	<b>215</b>
Ergebnisse und Lösungen zu den Aufgaben 17.1 bis 17.3 von Seite 125/126 .....	215
Ergebnisse und Lösungen zu den Aufgaben 17.4 bis 17.7 von Seite 128 .....	215
Ergebnisse und Lösungen zu den Aufgaben 17.8 bis 17.11 von Seite 131 .....	217
Ergebnisse und Lösungen zu den Aufgaben 17.12 bis 17.19 von Seite 135/136 .....	218
Ergebnisse und Lösungen zu den Aufgaben 17.20 bis 17.22 von Seite 141/142 .....	222
<b>Quellennachweis .....</b>	<b>225</b>
<b>Weiterführende und vertiefende Literatur .....</b>	<b>227</b>
<b>Sachwortverzeichnis .....</b>	<b>229</b>

# A1 Mathematisches Handwerkszeug: Beispiele und Aufgaben

## Grundsätzliches

Wie im Abschnitt 1 der Drittauflage des Buches „Mathematik für BWL-Bachelor“ ab Seite 23 angeführt wurde, sind es oft *Mängel im elementaren Rechnen*, die zu Fehlern führen.

Zu derartigen Mängeln gehören das *Nichtbeachten von Vorzeichenregeln* ebenso wie *vergessene Klammern* oder Defizite in der *Bruchrechnung*.

## Beispiele dafür, wie es richtig gemacht wird

**Beispiel 1.1:** Der folgender Bruch soll so weit wie möglich vereinfacht werden:

$$(1.01) \quad \frac{10ax + 15bx - 10ay - 15by}{8ax - 8ay + 12by - 12bx}$$

Zunächst versucht man, in Zähler und Nenner durch geeignetes Ausklammern eine *Produktzerlegung* zu finden, da *nur Faktoren gekürzt* werden können:

$$(1.02) \quad = \frac{10a(x-y) + 15b(x-y)}{8a(x-y) - 12b(x-y)} = \frac{\cancel{(x-y)}(10a+15b)}{\cancel{(x-y)}(8a-12b)}$$

Nach dem Kürzen (d. h. nachdem Zähler und Nenner durch den gemeinsamen Faktor  $(x-y)$  dividiert worden sind), kann dann durch *Ausklammern* die nicht weiter zu vereinfachende Form des Bruches gefunden werden:

$$(1.03) \quad = \frac{(10a+15b)}{(8a-12b)} = \frac{5(2a+3b)}{4(2a-3b)}$$

**Beispiel 1.2:** Man vereinfache

$$(1.04) \quad \frac{1}{a^2 + 2ab + b^2} + \frac{1}{a^2 - b^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{b^2}{a^4 - a^2b^2}$$

Im ersten Nenner ist das Ergebnis einer *binomischen Formel* erkennbar (meist wird sie als *erste binomische Formel* bezeichnet), und im vierten Nenner kann ausgeklammert werden:

$$(1.05) \quad = \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{a^2 - b^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{b^2}{a^2(a^2 - b^2)}$$

Mit dem geeigneten Hauptnenner  $a^2(a^2 - b^2)$  können der zweite, dritte und vierte Bruch zusammengefasst werden. Schließlich bleibt nur noch der erste Bruch übrig:

$$(1.06) \quad = \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{a^2 - (a^2 - b^2) - b^2}{a^2(a^2 - b^2)} = \frac{1}{(a+b)^2}$$

**Übungsaufgaben**

Die Lösungen finden Sie ab Seite 143

**Aufgabe 1.1:** Man fasse so weit wie möglich zusammen:

(1.07)  $(3x)(-2y) - (-5x)(-4y) + (-y)(6x) - (4x)(-9y)$

(1.08)  $(5n - 7p - 8m) - (2p - m - 3n) + (9m - 8n + 7p)$

(1.09)  $6x - [2y - \{4z + (3x - 2y) + 2x\} - 5z]$

(1.10)  $18a^2 - \{24a^2 + [-36b^2 - (-18a^2 + 4b^2) + 48b^2] - 20a^2\}$

**Aufgabe 1.2:** Man vereinfache und berechne:

(1.11)  $(\frac{3}{4}a + \frac{2}{3}b)(-\frac{4}{5}a - \frac{9}{8}b)$

(1.12)  $(2a + 3b + 4c)(a - 2b - 3c)$

(1.13)  $(k + 9)(k + 7) - (k + 4)^2 - (k + 1)(k - 1) + (k - 2)^2$

(1.14)  $(12uvw - 2uvz + 6uvwz) : (9uv)$

**Aufgabe 1.3:** Die folgenden Brüche sind so weit wie möglich zu kürzen:

(1.15)  $\frac{a^2b - ab^2}{a^2c - ac^2}$

(1.16)  $\frac{(u - v)^2}{u^2 - v^2}$

(1.17)  $\frac{u - v}{v - u}$

**Aufgabe 1.4:** Man berechne:

(1.18)  $\frac{x}{x - y} - 1$

(1.19)  $\frac{u}{v} + \frac{u + v}{u - v} - \frac{v}{u}$

(1.20)  $\frac{x + y}{x - y} + \frac{x - y}{x + y} - 2\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$

(1.21)  $\frac{q + 1}{q^2 - q} - \frac{q - 1}{q^2 + q} + \frac{1}{q} - \frac{4}{q^2 - 1}$