

Vogel Fachbuch

Kamprath-Reihe

Josef Vogelmann

# Darstellende Geometrie

Josef Vogelmann  
Darstellende Geometrie

Kamprath-Reihe · Technik

Dipl.-Ing. (FH)  
Josef Vogelmann

# Darstellende Geometrie

Die Lehre vom richtigen Zeichnen — eine  
Grundlage des technischen Zeichnens

6. Auflage

Vogel Buchverlag

JOSEF VOGELMANN

Dipl.-Ing. (FH) für Maschinenbau. 1932 in Hofen (Kreis Aalen) geboren. Nach und vor dem Studium von 1956 bis 1959 an der Staatlichen Ingenieurschule in Esslingen a.N. langjährige Konstruktionstätigkeit auf dem Gebiet Sondermaschinenbau, Werkzeugmaschinenbau und Vorrichtungsbau. Seit 1964 Technischer Betriebsleiter an der Fachhochschule Aalen. Seit 1978 nebenberuflich als Lehrbeauftragter für Technisches Zeichnen beim Fachbereich Maschinenbau der FH Aalen und zuvor 7 Jahre als Lehrbeauftragter für Darstellende Geometrie an den Vorbereitungskursen der FH Aalen tätig.

ISBN 978-3-8343-3183-0

6. Auflage 2010

Alle Rechte, auch der Übersetzung, vorbehalten.  
Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (Druck, Fotokopie, Mikrofilm oder einem anderen Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden. Hiervon sind die in §§ 53, 54 UrhG ausdrücklich genannten Ausnahmefälle nicht berührt.

Printed in Germany

Copyright 1976 by Vogel Verlag und Druck KG,  
Würzburg

# Vorwort

Das vorliegende Buch ist für Schüler technischer Gymnasien gedacht, für Studierende der technischen Wissenschaften an Universitäten, Fachhochschulen und Technikerschulen und für Ingenieure, die in der Berufspraxis stehen.

Es soll als Nachschlagewerk bei der Arbeit im Hörsaal und am Konstruktionsbrett dienen und die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens unterstützen. Dementsprechend ist „Darstellende Geometrie – kub“ eine pädagogische Handreichung und kein Rezeptbuch.

Im Technischen Zeichnen, der weltweiten Sprache des Ingenieurs, Konstrukteurs und des Technikers, kommt den Grundlagen der Darstellenden Geometrie die Rolle einer „Orthographie“ zu: Ohne Darstellende Geometrie ist eine Verständigung in der Sprache der Zeichnung nicht möglich.

Mit Hilfe der Darstellenden Geometrie läßt sich ein vorhandenes oder erdachtes Gebilde so zeichnen, daß man aus der Zeichnung die Abmessungen und die Form des Gebildes erkennen kann.

Der Stoff wurde für dieses Buch so aufbereitet, daß man ihn auch im Selbststudium wirkungsvoll verarbeiten kann.

Es ist jenem Lehr- und Lernstoff der Vorzug gegeben, der die Aktivität des Lernenden herausfordert.

Neben den Grundlagen über Punkte, Linien, Strecken, ebenflächige und krummflächige Ebenen und ihre gegenseitigen Beziehungen werden die wichtigsten Körperschnitte und Körperdurchdringungen behandelt.

Klare mehrfarbige Zeichnungen mit knappem Text vermitteln in Verbindung mit anschaulichen Raumbildern die manchmal nicht einfache Stoffmaterie. Die Raumbilder sind in dimetrischer Parallelprojektion ausgeführt. Zur Selbstkontrolle sind am Schluß wichtiger Stoffabschnitte Aufgaben (mit Ergebnissen) gestellt, die der Leser selbständig lösen sollte, will er erfolgreich studieren.

Aalen-Wasseralfingen

*Josef Vogelmann*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1.</b>	<b>Einleitung</b> .....	11
1.1.	Einführung mit Zeichenerklärung .....	11
1.2.	Zentralprojektion .....	12
1.3.	Parallelprojektion .....	13
1.3.1.	Schräge Parallelprojektion .....	14
1.3.2.	Orthogonale Parallelprojektion .....	14
1.3.3.	Kotierte Parallelprojektion .....	15
<b>2.</b>	<b>Orthogonale Parallelprojektion als Mehrtafelprojektion</b> .....	16
2.1.	Prinzip der orthogonalen Mehrtafelprojektion .....	16
2.2.	Orthogonale Abbildung des Punktes .....	17
2.3.	Aufgaben .....	21
2.4.	Abbildung der Geraden .....	22
2.4.1.	Spezielle Raumlagen von Geraden .....	23
2.4.2.	Darstellung zweier Geraden .....	24
2.4.3.	Aufgaben .....	25
2.5.	Bestimmung der wahren Länge und des Neigungswinkels einer Strecke ..	26
2.5.1.	Paralldrehen zur Grundrißebene $\pi_1$ .....	27
2.5.2.	Paralldrehen zur Aufrißebene $\pi_2$ .....	27
2.5.3.	Paralldrehen zur Seitenrißebene $\pi_3$ .....	28
2.5.4.	Umklappkonstruktion .....	29
2.5.5.	Aufgaben .....	30
<b>3.</b>	<b>Orthogonale Parallelprojektion von ebenflächigen begrenzten und unbegrenzten Ebenen</b> .....	32
3.1.	Begriffe .....	32
3.2.	Besondere Lage von Ebenen im Raum .....	33
3.3.	Gegenseitige Lagebeziehungen von Ebenen, Punkten und Geraden zueinander .....	35
3.3.1.	Aufsuchen der Spurgeraden einer Ebene .....	35
3.3.2.	Aufgabe .....	37
3.4.	Hauptlinien in einer Ebene .....	37
3.4.1.	Höhen- und Frontlinien .....	37
3.4.2.	Falllinien erster und zweiter Art .....	39
3.4.3.	Aufgaben .....	39
3.5.	Der Punkt in der Ebene .....	41
3.6.	Gerade in der Ebene .....	42

3.7.	Aufgabe .....	42
3.8.	Schnitt zweier Ebenen .....	43
3.8.1.	Bestimmung der Schnittgeraden zweier Ebenen .....	43
3.8.2.	Bestimmung des Schnittwinkels $\alpha$ zwischen zwei sich schneidenden Ebenen $e$ und $e^*$ .....	45
3.9.	Durchstoßpunkt einer Geraden $g$ mit einer Ebene $e$ .....	47
3.10.	Senkrechte in oder von einem beliebigen Punkt $P$ auf eine Ebene $e$ ....	48
3.10.1.	Senkrechte von einem beliebigen Punkt $P$ außerhalb einer Ebene $e$ auf die Ebene $e$ .....	48
3.10.2.	Senkrechte in einem beliebigen Punkt $P$ innerhalb der Ebene $e$ .....	48
3.11.	Durchstoßpunkt einer Geraden mit einer begrenzten ebenen Figur ....	49
<b>4.</b>	<b>Achsenaffinität</b> .....	51
4.1.	Anwendung der Affinität .....	52
4.2.	Aufgabe .....	53
<b>5.</b>	<b>Ebene Schnitte, Abwicklungen und Durchdringungen an ebenflächig begrenzten Körpern</b> .....	55
5.1.	Ebenflächige Schnitte .....	55
5.1.1.	Schräger Schnitt am senkrechten Prisma, Schnittebene $e \perp \pi_2$ .....	55
5.1.2.	Beliebiger ebener Schnitt am senkrechten Prisma .....	56
5.1.3.	Aufgabe .....	58
5.1.4.	Schräger Schnitt an der Pyramide .....	59
5.1.4.1.	Schräger Schnitt einer Pyramide durch Ebene $e \perp \pi_2$ .....	60
5.1.4.2.	Beliebiger ebener Schnitt einer Pyramide .....	61
5.2.	Abwicklung ebenflächig begrenzter Körper .....	63
5.2.1.	Abwicklung von Prismen .....	63
5.2.2.	Abwicklung von Pyramiden .....	64
5.2.3.	Aufgaben .....	65
5.3.	Durchdringung ebenflächig begrenzter Körper .....	68
5.3.1.	Gerade durchdringt Prisma .....	68
5.3.2.	Gerade durchdringt Pyramide .....	68
5.3.2.1.	Hilfsebene $\perp$ Grundrißebene $\pi_1$ .....	68
5.3.2.2.	Hilfsebene $\perp$ Aufrißebene $\pi_2$ .....	70
5.3.3.	Durchdringung zweier Prismen .....	71
5.3.4.	Durchdringung von Pyramide und Prisma .....	73
5.3.5.	Durchdringung zweier Pyramiden .....	76
5.3.6.	Aufgaben .....	77

<b>6.</b>	<b>Ebener Schnitt und Abwicklung zylindrischer Körper</b>	81
6.1.	Ebener schräger Schnitt am Zylinder	81
6.2.	Bestimmung der wahren Größe der Schnittfläche	83
6.2.1.	Wahre Größe der Schnittfigur mittels Achsenaffinität	83
6.2.2.	Bestimmung der wahren Größe der Schnittfigur mittels Umklappen	84
6.2.3.	Ebener Schnitt, Schnittebene beliebig	85
6.3.	Schnittkurvenkonstruktionen am zylindrischen Drehkörper	86
6.3.1.	Hilfsschnitte parallel zur Seitenrißebene	86
6.3.2.	Hilfsschnitte parallel zur Grundrißebene	86
6.4.	Abwicklung zylindrischer Drehkörper	87
6.4.1.	Senkrechter zylindrischer Drehkörper	87
6.4.2.	Schiefer zylindrischer Drehkörper	89
<b>7.</b>	<b>Ebene Schnitte und Abwicklungen an kegeligen Körpern</b>	90
7.1.	Ebene Kegelschnitte	90
7.1.1.	Elliptischer Schnitt	90
7.1.2.	Hyperbolischer Schnitt	93
7.1.3.	Parabelschnitt	94
7.1.4.	Kegelschnitt bei beliebiger Raumlage der Schnittebene $e$ .	94
7.2.	Abwicklung kegeliger Körper	96
7.2.1.	Gerader Kreiskegel	96
7.2.2.	Schiefer Kreiskegel	97
<b>8.</b>	<b>Schnittkurven an verschiedenen Drehkörpern</b>	99
8.1.	Abgeflachtes Stangenende	99
8.2.	Hebel mit zwei Augen	99
<b>9.</b>	<b>Durchdringungen an zylindrischen Drehkörpern</b>	101
9.1.	Rechtwinklige Durchdringung zweier Rundsäulen	101
9.1.1.	Hilfsschnitte parallel zur Grundrißebene	101
9.1.2.	Hilfsschnitte parallel zur Aufrißebene	102
9.1.3.	Durchdringungskurve mittels Mantellinien	103
9.1.4.	Aufgabe	103
9.2.	Schräge, außermittige Zylinderdurchdringung	105
9.3.	Dreieitiges Prisma durchdringt zylindrischen Drehkörper	106
9.4.	Zylindrischer Drehkörper durchdringt vierseitige Pyramide	107
9.5.	Aufgabe	108

<b>10.</b>	<b>Durchdringung an kegeligen Körpern</b> .....	110
10.1.	Rechtwinklige Durchdringung eines Kegels mit einem Zylinder .....	110
10.2.	Rechtwinklige Durchdringung zweier Kegel .....	111
10.3.	Rechtwinklige Durchdringung eines Kegels mit einem sechsseitigen Prisma.....	114
10.4.	Rechtwinklige Durchdringung eines Kegels mit vierseitigem Prisma ....	115
<b>11.</b>	<b>Durchdringungskurven an Drehkörpern, deren Achsen sich schneiden unter Anwendung des Hilfskugelverfahrens</b> .....	117
11.1.	Hilfskugelverfahren .....	117
11.1.1.	Schrägliegender Zylinder durchdringt waagrechten Zylinder .....	117
11.1.2.	Kegel durchdringt Kegel.....	118
11.1.3.	Kegel durchdringt Rohrkrümmer .....	118
11.1.4.	Zylinder durchdringt Rohrkrümmer .....	119
	<b>Stichwortverzeichnis</b> .....	120



# 1. Einleitung

## 1.1. Einführung mit Zeichenerklärung

Die darstellende Geometrie lehrt, wie man **räumliche Objekte** und im Raum auszuführende Konstruktionen auf einer Ebene – **Zeichenebene** – durch Zeichnung abbildet und aus diesen Abbildungen die **Größe, Gestalt** und **Lage** sowie bestehende Beziehungen zwischen abgebildeten Gegenständen erkennen kann.

Beachte: Die darstellende Geometrie lehrt Abbildungsverfahren, die räumliche Objekte (**dreidimensional**) durch ebene Zeichnungen (**zweidimensional**) wiedergeben.

Hierbei nimmt man den Nachteil der wenig guten Anschaulichkeit zugunsten einer maßgetreuen Abbildung gern in Kauf, da durch entsprechende Schulung des Vorstellungsvermögens die Nachteile abgebaut werden können.

**Maßgetreue Abbildung**  $\longleftrightarrow$  **schlechte Anschaulichkeit**

### Zeichenerklärung

Es bedeuten:

Große lateinische Buchstaben = Punkte ( $A, B, C \dots$ )

Kleine lateinische Buchstaben = Linien ( $g, l, s \dots$ )

Kleine griechische Buchstaben = Winkel ( $\alpha, \beta, \gamma \dots$ )

$P'$  = Bildpunkt von  $P$  im Grundriß  $\pi_1$

$P''$  = Bildpunkt von  $P$  im Aufriß  $\pi_2$

$P'''$  = Bildpunkt von  $P$  im Seitenriß  $\pi_3$

$S$  = Spurpunkt einer Geraden

$g'$  = Bildgerade von  $g$  im Grundriß  $\pi_1$

$g''$  = Bildgerade von  $g$  im Aufriß  $\pi_2$

$g'''$  = Bildgerade von  $g$  im Seitenriß  $\pi_3$

Der Buchstabe (klein)  $e$  wird für die Bezeichnung einer Ebene verwendet.

$e_1$  = Ebenenspur der Ebene  $e$  im Grundriß  $\pi_1$

$e_2$  = Ebenenspur der Ebene  $e$  im Aufriß  $\pi_2$

$e_3$  = Ebenenspur der Ebene  $e$  im Seitenriß  $\pi_3$

$\alpha'$	= Bild des Winkels $\alpha$ im Grundriß $\pi_1$
$\alpha''$	= Bild des Winkels $\alpha$ im Aufriß $\pi_2$
$\alpha'''$	= Bild des Winkels $\alpha$ im Seitenriß $\pi_3$
$g_0, l_0, s_0$	= Wahre Länge der Strecke $g, l$ oder $s$
$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$	= Wahre Größe der Winkel $\alpha, \beta, \gamma$
$\pi_1$	= Grundrißebene
$\pi_2$	= Aufrißebene
$\pi_3$	= Seitenrißebene
$\pi_4$	= beliebige Hilfsebene
$\parallel$	= parallel
$\sphericalangle$	= rechter Winkel
$\sphericalangle$	= Winkel
$\perp$	= senkrecht
$\triangle$	= Dreieck
$x_{12}$	= Schnittlinie von $\pi_1$ und $\pi_2$
$x_{23}$	= Schnittlinie von $\pi_2$ und $\pi_3$
$x_{13}$	= Schnittlinie von $\pi_1$ und $\pi_3$
$h$	= Höhenlinie
$f$	= Frontlinie
$H$	= horizontaler Spurpunkt
$V$	= vertikaler Spurpunkt
$\overline{AB}$	= Strecke $AB$

## 1.2. Zentralprojektion

Die Anschaulichkeit des Bildes von einem räumlichen Gegenstand wird mittels der **Zentralprojektion**, die nichts anderes ist als eine naturgetreue Nachempfindung des natürlichen Sehvorganges, am besten verwirklicht.

Sämtliche **Sehstrahlen**, **Projektionsstrahlen**, gehen bei der Zentralprojektion wie in Bild 1.1 skizziert, von einem oder zwei im **Endlichen** liegenden punktförmigen **Projektionszentrum**, Auge, aus und bilden zu jedem Punkt des abzubildenden Körpers Verbindungslinien. Die Bildebene wird von diesen Strahlen in den sogenannten **Bildpunkten** durchstoßen. Die meist senkrecht angeordnete Bildebene kann vor oder hinter dem abzubildenden Gegenstand, in beliebigem Abstand, angeordnet sein. Die Lage des Projektionszentrums sollte nicht mit der Bildebene zusammenfallen.

Die Zentralprojektion liefert **naturgetreue Abbildungen** von räumlichen Gegenständen.

Bei allen, infolge Zentralprojektion abgebildeten Gegenständen erhält man eine **sehr gute Anschaulichkeit**, die **Maßhaltigkeit** dagegen ist **unbefriedigend**.