

HEYNE <

**Arthur Benjamin
Michael Shermer**

MATHE MAGIE

**Verblüffende Tricks für
blitzschnelles Kopfrechen und ein
phänomenales Zahlengedächtnis**

Aus dem Amerikanischen von Martin Bauer

**WILHELM HEYNE VERLAG
MÜNCHEN**



Verlagsgruppe Random House FSC-DEU-0100
Das für dieses Buch verwendete FSC-zertifizierte Papier
München Super liefert Mochenwangen.

Die amerikanische Erstausgabe erschien 2006 unter dem Titel
»Secrets of mental math« im Verlag Three Rivers Press, New York.

Aus dem Amerikanischen von Martin Bauer

3. Auflage

Deutsche Erstausgabe 07/2007

© 2007 der deutschsprachigen Ausgabe by
Wilhelm Heyne Verlag, München.

Der Wilhelm Heyne Verlag ist ein Unternehmen der
Verlagsgruppe Random House, GmbH

Redaktion: Ernst Dahlke

Umschlaggestaltung: Martina Eisele, Grafik-Design, München

Layout, DTP-Produktion: avak Publikationsdesign, München

Druck und Bindung: GGP Media GmbH, Pößneck

Printed in Gemany

ISBN: 978-3-453-61502-1

Ich widme dieses Buch meiner Frau Deena
und meinen Töchtern Laurel und Ariel

Arthur Benjamin

Meine Widmung gilt meiner Frau Kim, meiner
engsten Vertrauten und persönlicher Ratgeberin.

Michael Shermer

DANKSAGUNGEN

Die Autoren möchten Steve Ross und Katie McHugh von Random House für ihre Unterstützung dieses Projekts danken. Einen besonderen Dank an Natalya St. Clair für das Setzen des ersten Entwurfs, das teilweise durch einen Zuschuss von der Mellon Foundation finanziert wurde.

Arthur Benjamin möchte besonders jenen danken, die ihn dazu inspiriert haben, ein Mathematiker und Magier zu werden – der Wahrnehmungspsychologe William G. Chase, die Magier Paul Gertner und James Randi sowie die Mathematiker Alan J. Goldman und Edward R. Scheinerman. Zum Schluss noch Dank an all meine Kollegen und Studenten am Harvey Mudd College, an meine Frau Deena und meine Töchter Laurel und Ariel für ständige Inspiration.

Inhalt

Vorwort von Bill Nye (dem Science Guy®)	10
Vorwort von James Randi	15
Vorwort von Michael Shermer	18
Einleitung von Art Benjamin	22

0. KAPITEL

Schnelle Tricks – einfache (und beeindruckende) Rechnungen	24
---	----

1. KAPITEL

Ein bisschen Geben und nehmen – Addition und Subtraktion im Kopf	34
---	----

2. KAPITEL

Das Ergebnis einer verschwendeten Jugend – einfache Multiplikation	52
---	----

3. KAPITEL

Neue und noch bessere Produkte – Multiplikation mit Zwischenprodukten	76
--	----

4. KAPITEL

Teile und herrsche – Division im Kopf	103
---	-----

5. KAPITEL

Passt schon – die Kunst des Überschlagens	129
---	-----

6. KAPITEL

Mathe für die Tafel – rechnen mit Papier und Stift	153
---	-----

7. KAPITEL

Ein erinnerungswürdiges Kapitel – wie man sich Zahlen merkt	173
--	-----

8. KAPITEL

Das Schwere leicht gemacht – Multiplikation für Fortgeschrittene	184
---	-----

9. KAPITEL

Ohne Kaninchen und Zylinder – die Kunst der Mathe-Magie	221
--	-----

 ∞ . KAPITEL

Epilog – Mathematik und Übersinnliches	245
--	-----

Lösungen der Übungsaufgaben	257
Bibliographie	298
Sachregister	300
Die Autoren	304

Vorwort

von Bill Nye (dem Science Guy®)

Ich stelle mir gern die ersten Menschen vor, die darauf kamen, dass man Dinge zählen könnte. Sie müssen schnell gemerkt haben, dass abzählen mit den Fingern toll funktioniert. Vielleicht sagte Og (ein typischer damaliger Höhlenmensch), einer seiner Freunde oder Partner: »Hier sitzen eins, zwei, drei, vier, fünf von uns, wir brauchen also fünf Früchte. Später hat dann bestimmt jemand gesagt (oder gegrünzt): »Schaut mal! Man kann die Zahl der Leute um ein Lagerfeuer zählen, die Zahl der Vögel auf einem Baum, der Steine in einer Reihe, der Scheite für ein Feuer, der Beeren in einer Traube – allein mit den Fingern!« Das war ein guter Anfang. Wahrscheinlich sind auch Sie genau so zum ersten Mal mit Zahlen in Kontakt gekommen.

Vielleicht haben Sie gehört, dass Mathematik die Sprache der Wissenschaft sei oder dass die Natur sich der Mathematik als Sprache bediene. Nun, das stimmt. Je mehr wir über das Universum lernen, desto klarer werden uns die mathematischen Zusammenhänge darin. Blütenblätter sind in Spiralen angeordnet, die einer speziellen Abfolge von Zahlen folgen (so genannten Fibonacci-Zahlen), die Sie verstehen und selbst generieren können. Muscheln formen sich in perfekten mathematischen Kurven (logarithmischen Spiralen), die aus einem chemischen Gleichgewicht resultieren. Sternenhaufen ziehen sich in einem mathematischen Tanz gegenseitig an, den wir aus Millionen und selbst Milliarden Kilometern Entfernung beobachten und verstehen können.

Wir haben Jahrhunderte damit verbracht, die mathematische

Natur der Natur zu entdecken. Bei jeder neuen Erkenntnis musste jemand die Berechnungen überprüfen und sicherstellen, dass die Zahlen stimmten. *Mathe-Magie* kann Ihnen dabei helfen, Zahlen aller Art zu beherrschen. Das Kopfrechnen wird Ihnen so vertraut werden, dass sich Ihnen einige Zahlengeheimnisse der Natur eröffnen werden. Und wer weiß, wohin Sie das führt?

Bei Zahlen fängt alles mit den Fingerspitzen an. Fast jeder hat zehn Finger, deswegen begann unser mathematisches System mit 1 und ging bis 10. (Im Englischen heißen sowohl die Zahlen als auch die Finger »digits«. Zufall? Wohl kaum.) Allerdings gingen unseren Vorfahren ziemlich schnell die Finger aus. Das gleiche ist Ihnen wahrscheinlich auch passiert. Dennoch können wir nicht einfach große Zahlen ignorieren und die Hände in den Schoß legen.

Wir brauchen Zahlen – sie gehören zum Alltagsleben, so sehr, dass es uns oft gar nicht mehr auffällt. Angenommen, Sie wollten mit einem Freund plaudern. Um ihn anzurufen, brauchten Sie eine Telefonnummer, und die Dauer des Gesprächs wurde mit Zahlen in Stunden und Minuten festgehalten. Alle historischen Daten, darunter so wichtige wie Ihr Geburtstag, werden in Zahlen festgehalten. Wir verwenden sogar Zahlen in Zusammenhängen, die nichts mehr mit Zählen zu tun haben. Dass mit »Gib mir mal den 17-er« ein Flaschenöffner gemeint ist, wissen inzwischen längst nicht mehr nur Bauarbeiter (mit dem 17-er Schlüssel kann man Kronkorken am besten öffnen) und die Zahlenfolge 9-11 ist längst zum Symbol für eine Zeitenwende geworden. Menschen beschreiben einander in Zahlen, die Größe oder Gewicht ausdrücken. Und natürlich wollen wir alle in Zahlen wissen, wie viel Geld wir haben und was etwas kostet, sei es in Euro, Dollar, Pesos, Yuan, Rupien, Kronen oder Yen. Zu-

sätzlich hat dieses Buch ein zeitsparendes Kapitel darüber, wie man sich Zahlen merkt – und zwar eine große Menge Zahlen.

Sollten Sie aus irgendeinem Grund nicht besonders versessen auf Mathe sein, lesen Sie trotzdem ein bisschen weiter. Natürlich hoffe ich als Wissenschaftsjournalist, dass Sie Mathe mögen. Tatsächlich hoffe ich sogar, dass Sie Mathe *lieben*. Doch egal, was Sie für Mathematik empfinden, Liebe oder Hass: Sicher geschieht es Ihnen oft, dass Sie ein Ergebnis sofort wissen wollen, ohne alles erst penibel hinschreiben und dann langsam und sorgfältig ausrechnen zu müssen. Oder gar einen Rechner suchen zu müssen. Sie wollen die Lösung sozusagen »wie durch Zauberei« erhalten. Nun ist es aber so, dass Sie viele, viele mathematische Probleme fast wie durch Zauberei lösen oder anpacken können. Dieses Buch zeigt Ihnen, wie.

Zauberei wird erst dadurch so verblüffend und unterhaltsam, dass das Publikum in der Regel nicht weiß, woraus der Trick besteht. »Wie hat sie das gemacht ...?« »Keine Ahnung, aber das war cool.« Wenn Sie ein Publikum haben, können die Tricks und Abkürzungen, die in *Mathe-Magie* vorgestellt werden, wie Zauberei wirken. Das Publikum weiß oft nicht, wie ein Trick funktioniert, es genießt einfach. Beachten Sie allerdings den Unterschied: Zauberkunststücke lohnen sich nicht, wenn keiner zuschaut. Auch geht der Spaß an den Tricks in diesem Buch nicht verloren, wenn man weiß, wie sie funktionieren. Wenn einem das Kopfrechnen leicht fällt, verheddert man sich nicht im Zahlengestrüpp – man behält den freien Blick auf die wunderbare Natur der Zahlen. Schließlich beruht das ganze Universum auf Mathematik.

Dr. Benjamin ist rein aus Spaß unter die Blitz-Kopfrechner gegangen. Wir müssen uns vorstellen, wie er seine Lehrer

und Mitschüler beeindruckt hat. Zauberer vermitteln ihrem Publikum die Illusion, sie beherrschten übernatürliche Kräfte. Mathemagiker scheinen auf den ersten Blick Genies zu sein. Leute darauf aufmerksam zu machen, was man tut, gehört seit jeher zum Prozess des Gedankenaustauschs. Wenn Leute beeindruckt sind, hören sie vielleicht auf das, was Sie zu sagen haben. Versuchen Sie sich also ein wenig als »Mathemagiker«. Na gut, vielleicht können Sie Ihre Freunde beeindrucken. Aber Sie werden feststellen, dass Sie auch Tricks vollführen, wenn Sie allein sind. Sie werden feststellen, dass Sie Probleme lösen können, von denen Sie das nie geglaubt hätten. Sie werden beeindruckt sein... *von sich selbst*.

An den Fingern abzählen, das ist eines. Aber haben Sie je beim Rechnen laut gezählt, geflüstert oder andere Geräusche gemacht? Dadurch wird Mathematik fast immer einfacher. Das Problem ist allerdings, dass die anderen Leute einen für ein wenig seltsam halten. Nun, in diesem Buch bringt Ihnen Dr. Benjamin bei, wie Sie die »laut vorsagen«-Funktion des Gehirns nutzen, um Matheprobleme einfacher, schneller und (überraschenderweise) genauer zu lösen, während das Gehirn weiterdenkt – es ist fast, als ob man laut dächte. Sie werden lernen, Mathematikaufgaben so anzugehen, wie Sie einen Text lesen, von links nach rechts. Sie werden lernen, komplizierten Aufgaben schnell mit einer guten Schätzung zu Leibe zu rücken. Sie werden lernen, die Berechnungen schnell durchzuführen – das gibt Ihnen Zeit, darüber nachzudenken, was die Zahlen bedeuten. Og fragte sich: »Haben wir genügend Früchte für alle, die hier ums Feuer sitzen? Wenn nicht, könnte es Probleme geben.« Heutzutage fragen Sie sich vielleicht: »Habe ich genug Platz auf dem Computer, um meine Musikdateien zu verwalten ... oder meine Bankdaten? Wenn nicht, könnte es Probleme geben.«

In diesem Buch geht es nicht nur um Kopfrechnen. Sie können lernen, ein beliebiges Datum zu nehmen und zu berechnen, was für ein Wochentag das war. Es ist fantastisch, fast magisch, wenn man jemandem sagen kann, an welchem Wochentag er geboren wurde. Noch beeindruckender aber ist es, wenn man berechnen kann, dass der amerikanische Unabhängigkeitstag, der 4. Juli 1776, auf einen Donnerstag fiel. Der 15. April 1912, der Tag, an dem die Titanic sank, war ein Montag. Der erste Mensch betrat am 20. Juli 1969 den Mond, einem Sonntag. Wahrscheinlich werden Sie nie vergessen, dass die Vereinigten Staaten am 11. September 2001 von Terroristen angegriffen wurden. Mit Hilfe dieses Buchs werden Sie jederzeit zeigen können, dass das an einem Dienstag geschah.

Es gibt Zusammenhänge in der Natur, die sich besser mit Zahlen beschreiben lassen als irgendwie sonst. Es gibt ganze Zahlen, die man mit den Fingern abzählen kann: eins, zwei, drei usw. Aber dazwischen gibt es unendlich viele Zahlen. Es gibt Bruchzahlen. Es gibt Zahlen, die niemals enden. Zahlen können so groß werden wie man will und so klein, dass man sie sich kaum mehr vorstellen kann. Sie können all diese Zahlen kennenlernen. Mit Hilfe von *Mathe-Magie* werden selbst diese Zahlen »dazwischen« so schnell in ihrem Gehirn auftauchen, dass Ihnen mehr Zeit dafür bleibt nachzudenken, warum unsere Welt so funktioniert. Dieses Buch wird Sie erkennen lassen, dass in der Natur alles aufgeht, so oder so.

Vorwort

Von James Randi

Die Mathematik ist eine wunderbare, elegante und außerordentlich nützliche Sprache. Sie hat ihr eigenes Vokabular und eine eigene Syntax, ihre eigenen Verben, Substantive und Adjektive, eigene Dialekte und Mundarten. Manche sprechen sie brillant, manche gebrochen. Manche von uns schrecken davor zurück, ihre esoterischen Einsatzmöglichkeiten auszunutzen, während andere sie wie ein Schwert schwingen und sich erfolgreich auf Steuererklärungsformulare stürzen oder auf Datenberge, an denen die Zaghafte scheitern. Dieses Buch verspricht nicht, Sie in einen Leibniz zu verwandeln (weder in den Keks, noch in den genialen Mathematiker) oder Sie zu einem bühnenreifen Zahlenakrobaten zu machen. Aber es wird Ihnen hoffentlich eine neue, spannende und sogar unterhaltsame Einsicht in das vermitteln, was man mit dieser wunderbaren Erfindung – Zahlen – anstellen kann.

Wir alle glauben, genug über Mathematik zu wissen, um uns so durchzuschlagen. Und fühlen uns überhaupt nicht schuldig, wenn wir zum praktischen Taschenrechner greifen, der so sehr Teil unseres Lebens geworden ist. Aber wenn wir uns zu sehr auf die Technik verlassen, entgeht uns ein Vergnügen, das uns dieses Buch vermitteln kann. Das verhält sich genau so, wie eine Fotografie uns möglicherweise für die Schönheit eines Gemäldes von Vermeer blind macht oder ein elektronisches Keyboard uns vielleicht vergessen lässt, wie großartig eine von Horowitz gespielte Sonate klingt.

Ich erinnere mich noch an meine Begeisterung, nachdem ich

als Kind entdeckt hatte, dass ich eine Zahl ganz einfach mit 25 multiplizieren konnte, indem ich zwei Nullen an sie anfügte und sie durch 4 teilte. Als nächstes kam die 9-er Probe zur Überprüfung von Multiplikationen. Und nachdem ich von der Kreuzmultiplikation erfahren hatte, wurde ich süchtig und, vorübergehend, ein unerträglicher Mathefreak. Eine Impfung gegen diesen Virus gibt es nicht. Sie müssen die Krankheit ganz aus eigener Kraft überstehen. Hüten Sie sich! Das ist ein unterhaltsames Buch. Sie hätten es nicht in die Hand genommen, wenn Sie nicht entweder ein Interesse daran hätten, schneller im Kopf rechnen zu lernen oder sich ganz allgemein für Mathematik interessierten. Und selbst wenn Sie nur einen Teil der verschiedenen hier vorgestellten Tricks und Methoden auch wirklich verinnerlichen und später anwenden sollten, hätten Sie Ihre Zeit schon gut angelegt. Ich kenne beide Autoren ziemlich gut. Art Benjamin ist nicht nur einer jener Wunderknaben, über die wir in der Schule so gestöhnt haben, sondern ist bekanntlich schon auf den Brettern des Magic Castle in Hollywood gestanden. Dort hat er seine Kunst auf der Bühne demonstriert. Einmal reiste er auch nach Tokio, um seine Fähigkeiten live im Fernsehen mit denen einer genialen Mathematikerin zu messen. Michael Shermer verfügt mit seinem Spezialistenwissen auf dem Gebiet der Naturwissenschaften über einen exzellenten Überblick über die praktischen Anwendungen der Mathematik in der Welt da draußen.

Falls dies das erste Mal sein sollte, dass Sie mit dieser Art von faszinierender Mathematik in Berührung kommen, beneide ich Sie. Bei jeder köstlichen neuen Art, mit Zahlen umzugehen, die Sie kennen lernen, werden Sie feststellen, was Sie in der Schule verpasst haben. Die Mathematik, insbesondere die Arithmetik, ist ein mächtiges und verlässliches Werkzeug

für den täglichen Gebrauch. Sie ermöglicht uns, unser kompliziertes Leben präziser und sicherer zu steuern. Lassen Sie sich von Art und Michael zeigen, wie man einige Klippen des Lebens umschiffet und mehr Klarheit gewinnt. Bedenken Sie die Worte von Dr. Samuel Johnson, eines in jeder Hinsicht außerordentlich praktisch denkenden Menschen: »Die Arithmetik unterhält, wenn man für sich übt, und beeindruckt, wenn man sie öffentlich nützlich anwendet.«

In allererster Linie sollten Sie dieses Buch genießen, sich von ihm unterhalten und amüsieren lassen. Was könnte man vom Leben mehr verlangen? Na gut, eine heiße Pizza (ohne Anchovis!) und gute Freunde. Ein gutes Gewissen. Und vielleicht einen Ferrari ...

Vorwort

von Michael Shermer

Mein guter Freund Dr. Arthur Benjamin, Mathematikprofessor am Harvey Mudd College im kalifornischen Claremont, betritt unter Applaus die Bühne des Magic Castle, eines gefeierten Magieklubs in Hollywood. Er tritt als »Mathemagiker« auf, als unglaublich schneller Kopfrechenkünstler. Art sieht überhaupt nicht aus wie ein Mathematikprofessor an einem angesehenen College. Er ist erstaunlich geistesgegenwärtig und scheint prima zu den jungen Zauberern zu passen, die im Castle auftreten.

Was Art so auszeichnet, ist, dass er vor jedem beliebigen Publikum auftreten kann, auch vor Profi-Mathematikern und -Zauberern. Denn er kann etwas, was sonst fast niemand beherrscht. Art Benjamin kann Zahlen schneller im Kopf addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren als die meisten Leute mit einem Rechner. Er quadriert zwei-, drei- und vierstellige Zahlen, zieht Quadrat- und Kubikwurzeln, ohne etwas notieren zu müssen. Und er kann auch Ihnen beibringen, mathematische Kunststücke zu vollführen.

Normalerweise verraten Zauberer nie, wie ihre Tricks funktionieren. Täten sie das, wüsste bald jeder Bescheid. Das Mysterium, die Faszination wären dann weg. Aber Art möchte die Leute für Mathematik begeistern. Und er weiß, dass eine der besten Methoden dafür darin besteht, Ihnen und den anderen Lesern das Geheimnis hinter seinem »mathematischen Genie« zu verraten. Mit den hier vorgestellten Tricks kann fast jeder nachmachen, was Art Benjamin zeigt, wenn er auf die Bühne steigt.

Dieser Abend im Magic Castle beginnt damit, dass Art fragt, ob irgendjemand im Publikum einen Taschenrechner dabei habe. Eine Gruppe Ingenieure hebt die Hände und wird auf die Bühne gebeten. Art schlägt vor zu überprüfen, ob sie auch richtig funktionieren. Er bittet die Zuschauer, zweistellige Zahlen zu rufen. »Siebenundfünfzig«, ruft einer, »dreiundzwanzig« ein anderer.

Art wendet sich den Ingenieuren auf der Bühne zu und sagt: »Multiplizieren Sie auf den Taschenrechnern 57 mit 23 und kontrollieren Sie, ob Sie 1.311 bekommen. Sonst funktionieren die Rechner nicht richtig.« Geduldig wartet Art darauf, dass die Freiwilligen die Zahlen eintippen. Als alle das Ergebnis 1.311 bestätigen, geht ein kollektives Raunen durchs Publikum. Der verblüffende Art hat die Taschenrechner in ihrer eigenen Domäne geschlagen!

Als nächstes kündigt Art an, er werde vier zweistellige Zahlen schneller quadrieren, als die Ingenieure es mit ihren Taschenrechnern können. Das Publikum bittet ihn, die Zahlen 24, 38, 67 und 97 zu quadrieren. Art schreibt in großen Ziffern: 576, 1.444, 4.489, 9.409. Dann wendet er sich den Freiwilligen auf der Bühne zu und bittet sie, die Ergebnisse auszurufen, die sie bekommen. Ihre Antworten lösen Staunen und Applaus im Publikum aus: 576, 1.444, 4.489, 9.409. Der Frau neben mir steht vor Verblüffung der Mund offen.

Als nächstes kündigt Art an, dreistellige Zahlen zu quadrieren, ohne die Antwort auch nur hinzuschreiben. »Fünfhundertzweiundsiebzig«, ruft ein Herr. Art antwortet keine Sekunde später: »572 zum Quadrat macht 327.184.« Sofort zeigt er auf einen anderen Zuschauer, der ruft »389«. Ohne mit der Wimper zu zucken, antwortet Art: »389 zum Quadrat gibt 151.321«. Jemand platzt heraus: »262«. »Das macht 68.644.« Art spürt, dass er für die letzte Antwort etwas zu lange ge-

braucht hat, und verspricht, die Zeit bei der nächsten wieder hereinzuholen. Die Herausforderung kommt – 991. Art quadriert die Zahl ohne Zögern: »982.081«. Es folgen weitere dreistellige Zahlen, kontert jedes Mal mit der korrekten Lösung. Einige Leute im Publikum schütteln ihre Köpfe ungläubig.

Nun hat Art das Publikum ganz in seinen Bann gezogen. Er erklärt, eine vierstellige Zahl quadrieren zu wollen. Eine Frau ruft: »1.036«. Art antwortet unverzüglich: »Das macht 1.073.296.« Das Publikum lacht, während Art erklärt: »Nein, nein, das war eine zu einfache Zahl. Bei dieser Art Problem dürfte ich die Taschenrechner eigentlich nicht schlagen können. Noch eine bitte.« Ein Mann schlägt schwierigere 2.843 vor. Art antwortet, mit kurzen Pausen zwischen den Zahlen: »Mal sehen, das Quadrat davon müsste sein 8 Millionen ... 82 Tausend ... 649.« Natürlich stimmt das. Stürmisch bekundet das Publikum seine Begeisterung – genauso laut wie bei dem Magier zuvor, der eine Frau entzweisägte und einen Hund verschwinden ließ.

Es ist immer das Gleiche, egal wo Art Benjamin erscheint: im Hörsaal einer High School, im Seminarraum eines College, im Magic Castle oder in einem Fernsehstudio. Professor Benjamin hat seine spezielle Art der Magie in ganz Amerika vorgeführt und ist in zahlreichen Talkshows aufgetreten. Er wurde von einem Wahrnehmungspsychologen an der Carnegie Mellon University untersucht und taucht in einem Fachbuch von Steven Smith auf: *The Great Mental Calculators: The Psychology, Methods, and Lives of Calculating Prodigies, Past and Present*. Art wurde am 19. März 1961 in Cleveland geboren (nach seiner Berechnung ein Sonntag. Im 9. Kapitel wird er Ihnen beibringen, wie das geht). Als hyperaktives Kind trieb er seine Lehrer mit seinen Possen im Unterricht zum Wahn-

sinn, unter anderem damit, dass er die Rechenfehler korrigierte, die sie gelegentlich machten. Im Verlauf des Buchs wird Art jeweils zurückblicken, wann er einen mathematischen Trick gelernt hat, bevor er ihn Ihnen beibringt. Deswegen werde ich hier auf diese faszinierenden Anekdoten nicht weiter eingehen.

Art Benjamin ist ein ganz außergewöhnlicher Mensch mit einem außergewöhnlichen Ansatz, wie er Ihnen schnelles Kopfrechnen beibringen wird. Diese Behauptung kommt mir über die Lippen, ohne dass ich zögern müsste. Allerdings möchte ich Sie bitten, im Auge zu behalten, dass wir Ihnen hier nicht das Blaue im Himmel versprechen, wenn Sie nur unsere 0190-er Nummer anrufen. Art und ich haben in zwei reichlich konservativen akademischen Fachbereichen einen Ruf zu verlieren – Art auf dem Feld der Mathematik, ich auf dem Feld der Wissenschaftsgeschichte – und wir würden nie riskieren, uns beruflich (oder sonst wie) zu blamieren, indem wir unhaltbare Versprechen machen. Schlicht gesagt: Dieses Zeug funktioniert, und fast jeder kann es beherrschen, weil diese Art »mathematischen Genies« eine erworbene Fähigkeit ist. Freuen Sie sich also darauf: Sie werden Ihre Mathekünste verbessern, Ihre Freunde beeindrucken, Ihr Gedächtnis schulen und, vor allen Dingen, sich köstlich amüsieren.

Einleitung

Schon als Kind spielte ich gerne mit Zahlen, und ich hoffe, Ihnen über dieses Buch meine Leidenschaft vermitteln zu können. Ich fand immer, dass Zahlen eine gewisse *magische* Anziehungskraft haben, und verbrachte zahllose Stunden damit, mich und andere mit ihren schönen Eigenschaften zu unterhalten.

Schon im Teenager-Alter trat ich als Zauberer auf und verband dann später meine zwei großen Leidenschaften, die Mathematik und die Magie zu einer abendfüllenden Show. Als *Mathemagiker* demonstrierte und erklärte ich die Geheimnisse blitzschnellen Kopfrechnens vor Zuschauern aller Altersgruppen.

Ich lehre am Harvey Mudd College, seit ich meinen Doktor gemacht habe, und es macht mir noch immer Spaß, meine Freude an Zahlen mit Kindern und Erwachsenen in aller Welt zu teilen. In diesem Buch werde ich alle meine Geheimnisse verraten, wie man im Kopf rechnet, schnell und einfach. (Mir ist klar, dass Magier ihre Tricks nicht verraten sollen, aber *Mathemagiker* folgen einem anderen Verhaltenskodex. Mathematik sollte Ehrfurcht einflößend sein, nicht mysteriös.)

Was werden Sie aus diesem Buch lernen? Sie werden lernen, schneller im Kopf zu rechnen, als Sie je für möglich gehalten hätten. Mit ein bisschen Übung werden Sie Ihr Zahlengedächtnis dramatisch verbessern. Sie werden Geisteskunststücke erlernen, mit denen Sie Freunde, Kollegen und Lehrer beeindruckend können. Aber Sie werden auch erfahren, dass die

Beschäftigung mit Mathematik tatsächlich *Freude* bereiten kann.

Nur zu oft wird Mathematik als ein System aus festen Regeln gelehrt, in dem wenig Platz für *kreatives* Denken bleibt. Eines aber werden Sie in diesem Buch lernen: Es gibt oft mehrere Wege zur Lösung eines Problems. Komplexe Aufgaben können in kleinere, leichter lösbare Teile zerlegt werden. Besonderheiten in den Zahlen können genutzt werden, um Lösungswege abzukürzen. Aus diesem Ansatz kann man meiner Ansicht nach etwas Wertvolles fürs Leben lernen, egal ob es um mathematische oder sonstige Aufgabenstellungen geht.

Ständig werde ich gefragt: »Aber wird man nicht einfach mit einer Begabung für Mathematik geboren?« Viele Leute sind überzeugt, dass schnelle Kopfrechner über besondere Talente verfügen. Vielleicht wurde ich mit einer gewissen Neugier dafür geboren, wie Dinge funktionieren, sei es jetzt ein mathematisches Problem oder ein Zaubertrick. Aber aufgrund meiner jahrelangen Lehrtätigkeit bin ich überzeugt, dass schnelles Kopfrechnen eine Fähigkeit ist, die jeder erlernen kann. Wie bei jeder nützlichen Fähigkeit allerdings benötigt man Übung und Hingabe, will man ein Experte werden. Um diese Ergebnisse aber effizient zu erreichen, muss man unbedingt *richtig* üben. Lassen Sie mich zeigen, wie!

Mit mathemagischen Grüßen
Dr. Arthur Benjamin
Claremont (Kalifornien)

Schnelle Tricks – einfache (und beeindruckende) Rechnungen

Auf den folgenden Seiten werden Sie lernen, schneller im Kopf zu rechnen, als Sie je für möglich gehalten hätten. Wenn Sie die vorgestellten Methoden nur eine kurze Zeit lang üben, werden Sie Ihre Fähigkeit, mit Zahlen umzugehen, dramatisch verbessern. Mit zusätzlicher Übung werden Sie viele Berechnungen schneller anstellen können als jemand mit einem Taschenrechner. In diesem Kapitel verfolge ich das Ziel, Ihnen einige einfache und doch beeindruckende Rechenmethoden beizubringen, die Sie sofort anwenden können. Das ernsthaftere Zeug sparen wir uns für später.

SOFORT-MULTIPLIKATION

Lassen Sie uns mit einer meiner Lieblingsmethoden beim Kopfrechnen anfangen: wie man jede zweistellige Zahl mal elf nimmt. Das ist ganz einfach, wenn man erst den Trick kennt. Nehmen Sie die Aufgabe:

$$32 \times 11$$

Um sie zu lösen, addiert man einfach die Ziffern der Zahl, $3 + 2 = 5$, setzt die 5 zwischen die 3 und die 2 und erhält die Lösung:

$$\underline{352}$$

Was könnte einfacher sein? Jetzt sind Sie dran:

$$53 \times 11$$

Da $5 + 3 = 8$ lautet die Antwort einfach

$$583$$

Noch eine. Schauen Sie nicht auf die Lösung, schreiben Sie nichts hin. Wie viel macht

$$81 \times 11?$$

Haben Sie 891 erhalten? Glückwunsch!

Jubeln Sie aber nicht zu früh, denn ich habe Ihnen erst die Hälfte dessen gezeigt, was Sie wissen müssen. Angenommen, die Aufgabe lautet:

$$85 \times 11$$

Obwohl $8 + 5 = 13$, lautet die Lösung **nicht** 8.135!

Wie zuvor, schiebt man die 3 zwischen die Ziffern, aber die 1 muss zur 8 hinzu gezählt werden, damit man die richtige Antwort erhält:

$$935$$

Betrachten Sie die Aufgabe folgendermaßen

$$\begin{array}{r} 1 \\ 835 \\ \hline 935 \end{array}$$

Hier kommt ein weiteres Beispiel. Versuchen Sie 57×11 .

Da $5 + 7 = 12$, ist die Lösung

$$\begin{array}{r} 1 \\ 527 \\ \hline 627 \end{array}$$

Gut, nun sind Sie dran. Sagen Sie so schnell wie möglich, wie viel ist

$$77 \times 11?$$

Wenn Sie auf 847 gekommen sind, dürfen Sie sich auf die Schultern klopfen. Sie sind auf dem besten Weg, Mathemagiker zu werden.

Nun weiß ich aus Erfahrung: Wenn man einem Freund oder Lehrer erzählt, man könne jede zweistellige Zahl mit elf multiplizieren, fragt der einen über kurz oder lang, wie viel 99×11 ist. Rechnen wir das gleich aus, dann sind Sie vorbereitet. Da $9 + 9 = 18$, lautet die Antwort

$$\begin{array}{r} 1 \\ 989 \\ \hline 1.089 \end{array}$$

Schön; nehmen Sie sich einen Moment Zeit und üben Sie Ihre neue Kunst ein paar Mal, bevor Sie anfangen, sie öffentlich zu präsentieren. Sie werden erstaunt über die Reaktionen sein, die Sie bekommen. (Es steht Ihnen frei, das Geheimnis zu verraten oder nicht.)

Willkommen zurück. Mittlerweile werden Sie vermutlich ein paar Fragen haben, zum Beispiel:

»Kann man diese Methode auch benutzen, um drei- (oder mehr)stellige Zahlen mit elf zu multiplizieren?«

Absolut. Beispielsweise beginnt die Lösung der Aufgabe 314×11 noch immer mit 3 und endet mit 4. Da $3 + 1 = \underline{4}$ und $1 + 4 = \underline{5}$, lautet die Antwort $3,\underline{4}54$. Aber wir heben uns Aufgaben dieser Art für später auf.

Wenn Sie etwas praktischer orientiert sind, fragen Sie sich vielleicht:

»Nun, das ist ja prima, um mit 11 zu multiplizieren. Aber wie steht es mit größeren Zahlen? Wie nehme ich mal zwölf, dreizehn oder sechsenddreißig?«

Meine Antwort darauf lautet: *Geduld!* Davon handelt der ganze Rest des Buches. In den Kapiteln 2, 3, 6 und 8 werden Sie lernen, wie man so ziemlich alle beliebigen Zahlen miteinander multipliziert. Noch besser: Sie brauchen sich nicht für jede Zahl eine eigene Regel zu merken. Um beliebige Zahlen schnell und problemlos im Kopf zu multiplizieren, braucht man nur eine Handvoll Methoden.

QUADRIEREN UND MEHR

Hier kommt noch ein schneller Trick.

Sie wissen wahrscheinlich, dass man, um das Quadrat einer Zahl zu erhalten, diese Zahl mit sich selbst multipliziert. Das Quadrat von 7 zum Beispiel ist $7 \times 7 = 49$.

Später werde ich Ihnen eine einfache Methode beibringen, wie Sie das Quadrat einer Zahl mit zwei, drei oder noch mehr Stellen ganz einfach berechnen. Besonders einfach geht der Trick, wenn die Zahl auf eine Fünf endet, deswegen fangen wir damit an.

Um eine zweistellige Zahl zu quadrieren, die auf 5 endet, müssen Sie sich nur zwei Dinge merken:

1. Den vorderen Teil des Ergebnisses erhält man, indem man die erste Stelle mit der nächsthöheren Zahl multipliziert.
2. Das Ergebnis endet auf 25.

Um beispielsweise die Zahl 35 zu quadrieren, multiplizieren wir einfach die erste Stelle (3) mit der nächsthöheren Zahl (4) und hängen 25 dran. Da $3 \times 4 = 12$, lautet die Lösung 1.225. Also: $35 \times 35 = 1.225$. Unsere Schritte können so dargestellt werden:

$$\begin{array}{r}
 35 \\
 \times 35 \\
 \hline
 3 \times 4 = 12 \\
 5 \times 5 = 25 \\
 \hline
 \text{Ergebnis: } 1.225
 \end{array}$$

Wie sieht es mit dem Quadrat von 85 aus? Da $8 \times 9 = 72$, erhalten wir sofort $85 \times 85 = 7.225$

$$\begin{array}{r}
 85 \\
 \times 85 \\
 \hline
 8 \times 9 = 72 \\
 5 \times 5 = 25 \\
 \hline
 \text{Ergebnis: } 7.225
 \end{array}$$

Einen ähnlichen Trick können wir anwenden, wenn wir zweistellige Zahlen multiplizieren, die mit der gleichen Ziffer beginnen und deren zweite Stellen zusammen 10 ergeben. Den vorderen Teil des Ergebnisses bekommen wir auf die gleiche Weise wie zuvor (die erste Stelle wird mit der nächsthöheren Zahl multipliziert), gefolgt vom Produkt der Ziffern an der zweiten Stelle. Probieren wir beispielsweise 83×87 . (Beide Zahlen beginnen mit einer 8 und die Summe der Endziffern ergibt $3 + 7 = 10$.) Da $8 \times 9 = 72$ und $3 \times 7 = 21$, lautet die Lösung 7.221.

$$\begin{array}{r}
 83 \\
 \times 87 \\
 \hline
 8 \times 9 = 72 \\
 3 \times 7 = 21 \\
 \hline
 \text{Ergebnis: } 7.221
 \end{array}$$

Entsprechend gilt: $84 \times 86 = 7.224$.

Jetzt sind Sie dran. Versuchen Sie

$$26 \times 24$$

Wie beginnt das Ergebnis? Mit $2 \times 3 = 6$. Wie endet es? Mit $6 \times 4 = 24$. Also gilt $26 \times 24 = 624$.

Bitte beachten Sie, dass diese Methode nur funktioniert, wenn die vorderen Ziffern die gleichen sind und die hinteren zusammen 10 ergeben. Mit Hilfe der Methode können wir sofort ermitteln, dass

$$31 \times 39 = 1.209$$

$$32 \times 38 = 1.216$$

$$33 \times 37 = 1.221$$

$$34 \times 36 = 1.224$$

$$35 \times 35 = 1.225$$

Jetzt fragen Sie sich vielleicht,

»Was, wenn die zwei Endziffern nicht zusammen zehn ergeben? Können wir diese Methode verwenden, um zweiundzwanzig und dreiundzwanzig zu multiplizieren?«

Nun, noch nicht. Aber im achten Kapitel werde ich Ihnen zeigen, wie Sie solche Aufgaben mit der Nahe-beieinander-Methode leicht lösen. (Statt 22×23 würde man 20×25 plus 2×3 rechnen und $500 + 6 = 506$ erhalten, aber ich greife vor.) Sie werden nicht nur lernen, Methoden wie diese anzuwenden, sondern auch verstehen, warum sie funktionieren.

»Gibt es Tricks für das Addieren und Subtrahieren im Kopf?«

Aber klar, und das ganze nächste Kapitel wird sich damit beschäftigen. Müsste ich meine Methode in vier Worten zusammenfassen, würde ich sagen: »Von links nach rechts«. Hier kommt ein kleiner Vorgeschmack.

Betrachten Sie die folgende Subtraktion:

$$\begin{array}{r} 1.241 \\ - 587 \\ \hline \end{array}$$

Die meisten Leute täten sich schwer, diese Aufgabe im Kopf (oder selbst auf einem Blatt) zu lösen. Aber vereinfachen wir sie. Ziehen wir 600 ab statt 587. Da $1.200 - 600 = 600$, bekommen wir

$$\begin{array}{r} 1.241 \\ - 600 \\ \hline 641 \end{array}$$

Nun haben wir aber 13 zu viel abgezogen. (Wie man diese 13 schnell ermittelt, erklären wir im 1. Kapitel.) Unsere schmerzhaft aussehende Subtraktion wird so zu einer einfachen Addition

$$\begin{array}{r} 641 \\ + 13 \\ \hline 654 \end{array}$$

Das lässt sich im Kopf leicht ausrechnen (besonders, wenn man von links nach rechts geht). Also gilt: $1.241 - 587 = 654$. Mit einem bisschen Mathe-Magie, wie sie im 9. Kapitel vorgestellt wird, werden Sie die Summe aus den zehn folgenden Zahlen sofort berechnen können:

$$\begin{array}{r} 9 \\ 5 \\ 14 \\ 19 \\ 33 \\ 52 \\ 85 \\ 137 \\ 222 \\ + 359 \\ \hline 935 \end{array}$$

Ich verrate den Trick an dieser Stelle noch nicht, gebe aber einen Hinweis. Die Lösung, 935, ist in diesem Kapitel schon einmal aufgetaucht. Mehr Tricks für das Rechnen mit Zettel und Stift finden Sie im 6. Kapitel. Darüber hinaus werden Sie den Quotienten der letzten beiden Summanden rasch ermitteln können:

$$359 \div 222 = 1,61 \text{ (auf drei Stellen genau)}$$

Im 4. Kapitel werden wir zur Division von Zahlen (auch von Dezimalzahlen und Brüchen) viel mehr zu sagen haben.

MEHR PRAKTISCHE TIPPS

Hier ist eine Methode, wie man schnell Trinkgelder berechnet: Angenommen, die Rechnung in einem Restaurant macht 42 € und Sie wollen 15 % Trinkgeld geben (ein gängiger Satz in Ländern, wo das Bedienungspersonal fast ausschließlich von Trinkgeldern lebt). Zuerst berechnen wir 10 % von 42 €, also 4,20 €. Wenn wir das halbieren, bekommen wir 2,10 € oder 5 % der Rechnungssumme. Zählt man diese beiden Beträge zusammen, erhält man 6,30 €, was genau 15 % der Rechnungssumme ausmacht. Wir werden im 5. Kapitel erläutern, wie man am besten die Höhe von Verkaufssteuern berechnet, von Rabatten, Zinseszinsen und anderem. Dort finden Sie auch Strategien, wie Sie rasch im Kopf eine gute Schätzung ermitteln, wenn Sie einmal keine ganz exakte Lösung brauchen.